

УДК 535.361

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ВОЛНЕНИЯ ПО СТАТИСТИЧЕСКИМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ ИЗОБРАЖЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ТЕСТ-ОБЪЕКТА

*В. Л. Вебер\**

Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород, Россия

Проведён статистический анализ изображений объектов типа «светлая линия» и «полуплоскость», наблюдаемых через случайно неровную границу раздела воздух—вода. Найдены выражения для функции корреляции флуктуаций изображения объекта, заданного в виде светящейся полуплоскости. Показана возможность определения из этих соотношений пространственной и временной корреляционных функций уклонов взволнованной водной поверхности.

Решена задача о вероятности пересечения малого произвольно ориентированного отрезка контурным изображением светящейся прямой линии. На основе результатов решения этой задачи показана возможность определения значений дисперсий кривизн взволнованной водной поверхности.

Предложен практический способ получения изображения прямолинейного светящегося объекта в отражённых от взволнованной поверхности световых лучах. Теоретически показано, что такой объект можно синтезировать путём временного накопления изображения точечного источника света, быстро перемещающегося в горизонтальной плоскости относительно водной поверхности.

### ВВЕДЕНИЕ

При решении задач диагностики волнения на морской поверхности, наряду с контактными, акустическими и радиолокационными методами, широко используются оптические методы. Большим преимуществом последних являются их высокая разрешающая способность и малая инерционность. Важным направлением в развитии оптических методов диагностики волнения является разработка способов получения информации о пространственно-временных характеристиках взволнованной морской поверхности из её оптических изображений в различных условиях освещения. Особое место здесь отводится разработке методов диагностики с использованием изображений различных тест-объектов, в роли которых выступают самосветящиеся объекты с различными законами пространственного или углового распределения светимости.

Одной из первых научных работ, посвящённых анализу оптических полей, отражённых или преломлённых взволнованной поверхностью моря, является работа [1], в которой исследовано угловое распределение яркости солнечного излучения, отражённого морской поверхностью. Можно сказать, что в этом случае тест-объектом являлся диск Солнца. В этой работе, в частности, было показано, что по ширине изображения солнечной дорожки можно оценить дисперсию уклонов морской поверхности, линейно связанную со скоростью надводного ветра. Отметим, что теоретические расчёты угловых зависимостей яркости солнечной дорожки для различных скоростей ветра и геометрии наблюдения приведены в атласе [2].

Использование тест-объекта с линейно неоднородным угловым распределением светимости лежит в основе метода пространственного спектрального анализа изображения взволнованной морской поверхности в условиях безоблачного неба [3–5].

Использование малоразмерного изотропного источника света при фотографировании его в отражённых от неровной поверхности воды лучах позволило авторам работы [6] измерить статистические характеристики кривизны водной поверхности в зависимости от скорости надводного

---

\* w.weber@ipfran.ru

ветра. Теоретические вопросы связи уровня отражённого оптического сигнала с параметрами кривизны морской поверхности исследованы в работе [7].

Вопросы использования самосветящихся тест-объектов типа «шум», «клин», «синусоида», «линия» и «уступ» впервые рассмотрены в работах [8, 9]. В них, в частности, показано, что по статистическим характеристикам изображений этих тест-объектов можно с успехом определять корреляционные функции и энергетические спектры уклонов, а также дисперсии уклонов и кривизн морской поверхности. Случайную реализацию векторного поля уклонов взволнованной поверхности воды с хорошей точностью можно восстановить по изображению тест-объекта типа «сетка» [10].

Интересными возможностями с точки зрения диагностики морского ветрового волнения обладают изображения круга Снеллиуса. Двухградационное изображение круга Снеллиуса статистически близко к изображению объекта типа «уступ», что позволяет определять по нему дисперсию и пространственно-временную корреляционную функцию уклонов водной поверхности [11–13].

В данной работе более углублённо рассматриваются вопросы, связанные со статистическим анализом изображений тест-объектов типа «линия» и «уступ» и впервые рассмотренные в работах [9, 13, 14]. Для решения поставленных задач используются методы теории прохождения случайных сигналов через нелинейные устройства и теории выбросов случайных процессов [15–17].

## 1. ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННАЯ КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ ФЛУКТУАЦИЙ ЯРКОСТИ ИЗОБРАЖЕНИЯ ТЕСТ-ОБЪЕКТА ТИПА «УСТУП»

При наблюдении через взволнованную водную поверхность плоского объекта с неоднородной яркостью  $B_{об}(\mathbf{r}_0)$  видимое распределение его яркости  $B_i(\mathbf{r}, t)$  имеет вид [8]

$$B_i(\mathbf{r}, t) = B_{об}(\mathbf{r}_0), \quad (1)$$

где  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r} + a\mathbf{q}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки наблюдения,  $\mathbf{r}_0$  — радиус-вектор точки на объекте,  $\mathbf{q} = \mathbf{x}_0 q_x + \mathbf{y}_0 q_y$  — вектор уклонов водной поверхности,  $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0$  — орты прямоугольной системы координат в горизонтальной плоскости,  $t$  — время,  $a = h(m - 1)/m$ ,  $h$  — глубина размещения объекта,  $m = 1,33$  — показатель преломления воды.

Отметим, что формула (1) получена для системы наблюдения, ориентированной в надир и проводящей сканирование объекта по пространству, что справедливо для бесконечно удалённого наблюдателя, визирующего поверхность воды под малыми углами к вертикали. При этом радиус-вектор  $\mathbf{r}$ , фактически, соответствует координатам точки на поверхности раздела воздух—вода. Отметим также, что формула (1) получена без учёта эффектов рассеяния и поглощения света в водной среде.

Пространственно-временная корреляционная функция флуктуаций яркости изображения (1) выражается через первый и второй статистические моменты следующими соотношениями [8]:

$$M_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = M_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) - M_1(\mathbf{r}_1)M_1(\mathbf{r}_2). \quad (2)$$

Здесь

$$M_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^4} \iint_{\infty} F_0(\mathbf{k}_1)F_0(\mathbf{k}_2)\theta_2(a\mathbf{k}_1, a\mathbf{k}_2, \rho, \tau) \exp[i(\mathbf{k}_1\mathbf{r}_1 + \mathbf{k}_2\mathbf{r}_2)] d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2,$$

$$M_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{\infty} F_0(\mathbf{k}) \theta_1(a\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) d\mathbf{k},$$

$F_0$  — фурье-образ распределения яркости на объекте  $B_{\text{об}}$ ,  $\theta_1$  и  $\theta_2$  — одно- и двухточечная характеристические функции распределения вероятностей уклонов водной поверхности соответственно,  $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ ,  $\tau = t_1 - t_2$ .

Предметом нашего последующего анализа являются статистические характеристики объектов, яркость которых зависит лишь от одной координаты, т. е. одномерных объектов. В ходе рассуждений мы будем опираться на результаты работ [8, 9].

Для одномерного объекта первый и второй статистические моменты флуктуаций изображения определяются формулами, следующими из формулы (2), и имеют вид

$$M_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\infty} F_0(k) \theta_1(ak) \exp(ikx) dk;$$

$$M_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{\infty} F_0(k_1) F_0(k_2) \times$$

$$\times \exp[-0,5a^2\sigma_x^2(k_1^2 + k_2^2 + 2R_x k_1 k_2) + i(k_1 x_1 + k_2 x_2)] dk_1 dk_2, \quad (3)$$

где  $\sigma_x^2$  — дисперсия и  $R_x \equiv R_x(\boldsymbol{\rho}, \tau)$  — нормированная корреляционная функция проекции вектора уклонов поверхности на ось  $x$  (коэффициент пространственно-временной корреляции уклонов),  $k \equiv k_x$ ,  $k_1 \equiv k_{1x}$ ,  $k_2 \equiv k_{2x}$ .

Рассмотрим тест-объект типа «уступ», т. е. объект со ступенчатым распределением светимости (светящаяся полуплоскость):

$$B_{\text{об}}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (4)$$

Напомним способ решения задачи, приведённый в работе [9]. Продифференцируем выражение (3) по  $R_x$  (здесь  $R_x$  можно считать свободным параметром, поскольку эта величина не зависит от переменных интегрирования) и, используя соотношение

$$kF_0(k) = -i \int_{\infty} \frac{dB_{\text{об}}(x)}{dx} \exp(-ikx) dx,$$

получим

$$\frac{dM_2}{dR_x} = \frac{a^2\sigma_x^2}{(2\pi)^2} \iiint_{\infty} \frac{dB_{\text{об}}}{dx}(x') \frac{dB_{\text{об}}}{dx}(x'') \exp[-0,5a^2\sigma_x^2(k_1^2 + k_2^2 + 2R_x k_1 k_2)] \times$$

$$\times \exp\{i[k_1(x_1 - x') + k_2(x_2 - x'')]\} dk_1 dk_2 dx' dx''.$$

Подставим сюда выражение (4) и, проведя интегрирование по всем переменным, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dM_2}{dR_x} = \frac{1}{2\pi \sqrt{1 - R_x^2}} \exp\left[-\frac{x_1^2 + x_2^2 - 2R_x x_1 x_2}{2a^2\sigma_x^2(1 - R_x^2)}\right]. \quad (5)$$

Из уравнения (5) следует, что  $M_2 = \int dM_2/(dR_x) dR_x + A$ , где  $A$  есть некоторая функция от  $x_1$  и  $x_2$ . Интеграл в выражении для  $M_2$  легко берётся при условии  $x_1 = x_2 = 0$ :

$$M_2(\tau) \equiv M_2(\boldsymbol{\rho} = 0, \tau) = \frac{1}{2\pi} \arcsin R_x(\tau) + A.$$

Функция временной корреляции флуктуаций яркости изображения имеет вид

$$M_i(\tau) \equiv M_i(\boldsymbol{\rho} = 0, \tau) = M_2(\tau) - M_1^2(0).$$

Отсюда из условий  $M_1(0) = 0,5$  и  $M_i(\tau \rightarrow \infty) = 0$  следует, что  $A = 0,25$  и

$$M_i(\tau) = \frac{1}{2\pi} \arcsin R_x(\tau),$$

где  $R_x(\tau) \equiv R_x(\boldsymbol{\rho} = 0, \tau)$ .

Формула для нормированной временной корреляционной функции изображения (или коэффициента временной корреляции флуктуаций яркости изображения) имеет вид

$$R_i(\tau) = \frac{M_i(\tau)}{M_i(0)} = \frac{2}{\pi} \arcsin[R_x(\tau)]. \quad (6)$$

Выражение для коэффициента пространственной корреляции флуктуаций яркости изображения может быть получено лишь при соблюдении условия статистической однородности поля изображения:  $\rho_{xx}, \rho_{xy} \ll \sqrt{2} a\sigma_x$ , где  $\rho_{xx}, \rho_{xy}$  — характерные радиусы корреляции  $x$ -составляющей уклонов взволнованной поверхности по  $x$  и  $y$  соответственно. Физически это требование означает, что на характерном размере  $a\sigma_x$  бликовой картины от точечного объекта укладывается много случайных неровностей на поверхности моря с характерным размером  $\max(\rho_{xx}, \rho_{xy})$ . В этом случае выражение для коэффициента пространственной корреляции флуктуаций яркости изображения принимает аналогичный (6) вид

$$R_i(\boldsymbol{\rho}) = \frac{M_i(\boldsymbol{\rho})}{M_i(0)} = \frac{2}{\pi} \arcsin[R_x(\boldsymbol{\rho})], \quad (7)$$

где  $M_i(\boldsymbol{\rho}) = M_i(\boldsymbol{\rho}, \tau = 0)$ ,  $R_x(\boldsymbol{\rho}) = R_x(\boldsymbol{\rho}, \tau = 0)$ .

Основным достоинством описанного способа определения пространственной корреляционной функции уклонов взволнованной водной поверхности является то, что он не зависит от условий внешнего освещения и нелинейности фотоприёмника, поскольку информация о функции  $R_x(\boldsymbol{\rho})$  содержится не в яркостных, а в геометрических характеристиках регистрируемого изображения.

Из выражений (6) и (7) следует, что корреляционная функция изображения наиболее простым (линейным) образом связана с корреляционной функцией уклонов лишь в области больших  $\boldsymbol{\rho}$  и  $\tau$ . В области малых значений аргумента коэффициент временной корреляции флуктуаций яркости изображения (6) приближённо описывается выражением

$$R_i(\tau) \approx 1 - \frac{2\sqrt{2}}{\pi\tau_q} \tau,$$

где  $\tau_q = \sqrt{2\sigma_x^2/\sigma_{xt}^2}$  — характерное время корреляции  $x$ -составляющей уклонов взволнованной поверхности,  $\sigma_{xt}^2 = \iint_{\infty} S(\mathbf{k})k_x^2\omega_k^2 d\mathbf{k}$  — дисперсия временной производной проекции вектора уклонов морской поверхности на ось  $x$ ,  $S(\mathbf{k})$  — энергетический спектр возвышений взволнованной морской поверхности,  $\omega_k$  — частота, определяемая дисперсионным соотношением для волн на воде.

Отсюда следует, что, зная дисперсию уклонов  $\sigma_x^2$ , по производной временной функции корреляции яркости изображения  $R'_{it}(\tau = 0)$  можно определить дисперсию  $\sigma_{xt}$ .

В области малых значений аргумента коэффициент пространственной корреляции флуктуаций яркости изображения (7) приближённо описывается выражением

$$R_i(\boldsymbol{\rho}) \approx 1 - \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \left( \frac{\rho_x}{\rho_{xx}} + \frac{\rho_y}{\rho_{xy}} \right),$$

где

$$\rho_{xx}^2 = \frac{2\sigma_x^2}{\sigma_{xx}^2}, \quad \rho_{xy}^2 = \frac{2\sigma_x^2}{\sigma_{xy}^2}$$

— характерные радиусы корреляции проекции вектора уклонов взволнованной морской поверхности на ось  $x$ ,

$$\sigma_{xx}^2 = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} M_x(\mathbf{r})|_{r=0} = \iint_{\infty} S(\mathbf{k}) k_x^4 d\mathbf{k},$$

$$\sigma_{xy}^2 = -\frac{\partial^2}{\partial y^2} M_x(\mathbf{r})|_{r=0} = \iint_{\infty} S(\mathbf{k}) k_x^2 k_y^2 d\mathbf{k}$$

— дисперсии кривизн морской поверхности,  $M_x(\mathbf{r}) = \sigma_x^2 R_x(\mathbf{r})$ .

Отсюда следует, что, зная дисперсию уклонов  $\sigma_x^2$ , по производным пространственной корреляции яркости изображения  $R'_{ix,y}(\rho = 0)$  можно определить дисперсии кривизн  $\sigma_{xx}^2$  и  $\sigma_{xy}^2$ .

Заметим, что результаты данного раздела совпадают с результатами, полученными в ходе исследования возможности диагностики параметров волнения по искажениям границы круга Снеллиуса [13]. Данное обстоятельство свидетельствует об аналогии этих двух, казалось бы, далёких друг от друга задач.

## 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИСПЕРСИЙ КРИВИЗН ВЗВОЛНОВАННОЙ МОРСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПО ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ ИЗОБРАЖЕНИЯ ТЕСТ-ОБЪЕКТА ТИПА «ЛИНИЯ»

В случае двумерной случайно-неровной водной поверхности имеются три дисперсии её кривизн:

$$\sigma_{xx}^2 = \left\langle \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)^2 \right\rangle, \quad \sigma_{yy}^2 = \left\langle \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)^2 \right\rangle, \quad \sigma_{xy}^2 = \left\langle \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\rangle,$$

где  $\zeta \equiv \zeta(x, y)$  — функция возвышений случайно неровной водной поверхности.

Рассмотрим изображение тест-объекта, наблюдаемого через случайную морскую поверхность, который задан распределением яркости  $B_{\text{об}}(\mathbf{r}_0) = \delta(x_0)$  (объект в виде прямой линии вдоль оси  $\mathbf{y}_0$ ). Распределение яркости в изображении объекта описывается формулой

$$B_i(\mathbf{r}) = B_{\text{об}}[\mathbf{r}_0 = \mathbf{r} + a\mathbf{q}(\mathbf{r})] = \delta[x + aq_x(\mathbf{r})],$$

где  $\mathbf{r} = (x, y)$  — координаты точек в горизонтальной плоскости,  $q_x$  — проекция на ось  $x$  градиента  $\mathbf{q}(\mathbf{r}) = \nabla \zeta(\mathbf{r})$  морской поверхности воды (вектора уклонов),  $\delta$  — дельта-функция.

Зададим произвольно ориентированный малый отрезок  $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ ,  $\Delta \mathbf{r} = (\Delta x, \Delta y)$ , центр которого расположен на линии  $x$  (см. рис. 1). Будем искать вероятность пересечения контуром  $\xi = q_x(\mathbf{r})$  отрезка  $\Delta \mathbf{r}$ . При этом предполагается, что поверхность раздела воздух—вода  $\zeta(\mathbf{r})$  является случайной статистически однородной функцией с гауссовой плотностью вероятности.

Вероятность пересечения контуром  $\xi$  малого отрезка  $\Delta \mathbf{r}$  определяется суммой вероятностей  $P = P_1 + P_2$ , где

$$P_1 = \int_{-\infty}^{-(x+\Delta)/a} d\xi_2 \int_{-(x-\Delta)/a}^{\infty} d\xi_1 w_2(\xi_1, \xi_2, \Delta \mathbf{r})$$

— вероятность одновременного выполнения условий  $\xi(\mathbf{r}_1) \geq -x_1/a$  и  $\xi(\mathbf{r}_2) \leq -x_2/a$ ,

$$P_2 = \int_{-(x+\Delta)/a}^{\infty} d\xi_2 \int_{-\infty}^{-(x-\Delta)/a} d\xi_1 w_2(\xi_1, \xi_2, \Delta \mathbf{r})$$

— вероятность одновременного выполнения условий  $\xi(\mathbf{r}_1) \leq -x_1/a$  и  $\xi(\mathbf{r}_2) \geq -x_2/a$ . Здесь  $\xi_1 = q_x(\mathbf{r}_1)$ ,  $\xi_2 = q_x(\mathbf{r}_2)$ ,  $x_1 = x - \Delta$ ,  $x_2 = x + \Delta$ ,  $\Delta = \Delta x/2$ ,  $w_2$  — двухточечная гауссовая функция распределения вероятностей составляющей  $q_x$ . Предполагается, что вероятность двух- и более кратного пересечения отрезка  $\Delta \mathbf{r}$  пренебрежимо мала.

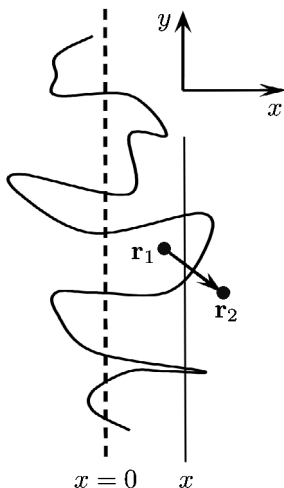


Рис. 1. Искажённое изображение (сплошная линия) объекта типа «линия» (штриховая линия)

Запишем эти выражения в более удобном для последующих рассуждений виде:

$$P_1 = \int_{(x+\Delta)/a}^{\infty} d\xi_2 \int_{-\infty}^{(x-\Delta)/a} d\xi_1 w_2(\xi_1, \xi_2, \Delta \mathbf{r}),$$

$$P_2 = \int_{-\infty}^{(x+\Delta)/a} d\xi_2 \int_{(x-\Delta)/a}^{\infty} d\xi_1 w_2(\xi_1, \xi_2, \Delta \mathbf{r}).$$

Важным обстоятельством, упрощающим решение задачи, является то, что величина  $P_2$  может быть выражена через  $P_1$  простым соотношением  $P_2 = P_1(-a)$ .

Для доказательства этого обратимся к выражению для  $P_1$ . Заменим в нём переменные  $\xi_\alpha \rightarrow -t_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ , и получим

$$P_1 = \int_{-(x+\Delta)/a}^{-\infty} dt_2 \int_{\infty}^{-(x-\Delta)/a} dt_1 w_2(-t_1, -t_2, \Delta \mathbf{r}).$$

Поменяв здесь местами пределы интегрирования и воспользовавшись чётностью подынтегральной функции, имеем

$$P_1 = \int_{-\infty}^{-(x+\Delta)/a} dt_2 \int_{-(x-\Delta)/a}^{\infty} dt_1 w_2(t_1, t_2, \Delta \mathbf{r}),$$

откуда следует

$$P_1(-a) = \int_{-\infty}^{(x+\Delta)/a} dt_2 \int_{(x-\Delta)/a}^{\infty} dt_1 w_2(t_1, t_2, \Delta \mathbf{r}) = P_2.$$

Сказанное иллюстрируется рис. 2.

Заметим (опустив достаточно простое доказательство), что вероятность пересечения может быть определена и другим способом, а именно по формуле

$$P = 1 - P'_1 - P'_2,$$

где

$$P'_1 = \int_{-\infty}^{(x+\Delta)/a} d\xi_2 \int_{-\infty}^{(x-\Delta)/a} d\xi_1 w_2(\xi_1, \xi_2, \Delta \mathbf{r}),$$

$$P'_2 = \int_{(x+\Delta)/a}^{\infty} d\xi_2 \int_{(x-\Delta)/a}^{\infty} d\xi_1 w_2(\xi_1, \xi_2, \Delta \mathbf{r}).$$

Простую геометрическую интерпретацию этого факта также можно получить на основании анализа рис. 2.

Окончательные выражения для вероятностей  $P_1$  и  $P_2$  имеют следующий вид (см. Приложение):

$$P_1 = \frac{\Delta \rho}{\sqrt{2} \pi} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2 \sigma_x^2}\right) \left\{ \exp\left[-\frac{(\Delta x)^2}{4a^2 \sigma_x^2 (\Delta \rho)^2}\right] - \sqrt{\pi} \frac{\Delta x}{2a \sigma_x \Delta \rho} \left[1 - \Phi\left(\frac{\Delta x}{2a \sigma_x \Delta \rho}\right)\right] \right\};$$

$$P_2 = \frac{\Delta \rho}{\sqrt{2} \pi} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2 \sigma_x^2}\right) \left\{ \exp\left[-\frac{(\Delta x)^2}{4a^2 \sigma_x^2 (\Delta \rho)^2}\right] + \sqrt{\pi} \frac{\Delta x}{2a \sigma_x \Delta \rho} \left[1 + \Phi\left(\frac{\Delta x}{2a \sigma_x \Delta \rho}\right)\right] \right\},$$

где  $(\Delta \rho)^2 = (\Delta x)^2 / \rho_{xx}^2 + (\Delta y)^2 / \rho_{yy}^2$ ,  $\rho_{xx}^2 = 2\sigma_x^2 / \sigma_{xx}^2$ ,  $\rho_{xy}^2 = 2\sigma_x^2 / \sigma_{xy}^2$ ,  $\Phi(x) = 2 / \sqrt{\pi} \int_0^x \exp(-t^2) dt$ ,  $\sigma_x^2$  — дисперсия уклонов  $q_x(\mathbf{r})$ .

Определим полную вероятность  $P = P_1 + P_2$  пересечения контуром  $\xi$  отрезка  $\Delta \mathbf{r}$  в двух случаях его расположения. В случае  $\Delta x = 0$

$$P = \frac{\sigma_{xy}}{\pi \sigma_x} \Delta y \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2 \sigma_x^2}\right).$$

Средняя плотность числа пересечений контуром линии  $x = \text{const}$  при этом равна

$$n = \frac{P}{\Delta y} = \frac{\sigma_{xy}}{\pi \sigma_x} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2 \sigma_x^2}\right).$$

В случае  $\Delta y = 0$

$$P = \frac{\sigma_{xx}}{\pi \sigma_x} \Delta x \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2 \sigma_x^2}\right) \left[ \exp\left(-\frac{1}{u^2}\right) + \frac{\sqrt{\pi}}{u} \Phi\left(\frac{1}{u}\right) \right],$$

где  $u = \sqrt{2} a \sigma_{xx}$ . Среднее полное число пересечений контуром  $\xi$  линии  $y = \text{const}$  при этом равно

$$N = \int_{-\infty}^{+\infty} P \frac{dx}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[ u \exp\left(-\frac{1}{u^2}\right) + \sqrt{\pi} \Phi\left(\frac{1}{u}\right) \right].$$

При  $u \rightarrow 0$  ( $u \ll 1$ ) величина  $N \rightarrow 1$ . При  $u \rightarrow \infty$  ( $u \gg 1$ ) имеем  $N \approx u / \sqrt{\pi}$ . Функция  $N(u)$  в диапазоне  $u \geq 5$  является близкой к линейной функции величины  $u = \sqrt{2} a \sigma_{xx}$ .

Из сказанного следует, что, измеряя среднюю плотность числа пересечений контуром  $\xi$  линии  $x = \text{const}$  и зная дисперсию уклонов  $\sigma_x$  (в частности, из функции  $n(x)$ ), можно определить

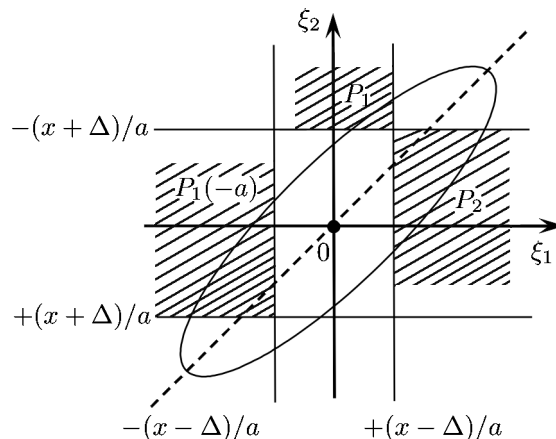


Рис. 2. Области определения вероятностей  $P_1$  и  $P_2$  на плоскости  $\xi_1, \xi_2$

дисперсию кривизн  $\sigma_{xy}$ . Измеряя среднее полное число пересечений контуром  $\xi$  линии  $y = \text{const}$ , можно найти дисперсию кривизн  $\sigma_{xx}$ .

Аналогичным образом можно показать, что определение величин  $\sigma_{yy}$  и  $\sigma_{xy}$  осуществляется анализом изображения линейного объекта, ориентированного вдоль оси  $\mathbf{x}_0$ . При этом соответствующие формулы имеют следующий вид. Для  $\Delta y = 0$

$$P = \frac{\sigma_{xy}}{\pi\sigma_y} \Delta x \exp\left(-\frac{y^2}{2a^2\sigma_y^2}\right),$$

где  $\sigma_y^2$  — дисперсия уклонов  $q_y(\mathbf{r})$ . При этом средняя плотность числа пересечений контуром  $\xi$  линии  $y = \text{const}$  равна

$$n = \frac{P}{\Delta x} = \frac{\sigma_{xy}}{\pi\sigma_y} \exp\left(-\frac{y^2}{2a^2\sigma_y^2}\right).$$

Для  $\Delta x = 0$

$$P = \frac{\sigma_{yy}}{\pi\sigma_y} \Delta y \exp\left(-\frac{y^2}{2a^2\sigma_y^2}\right) \left[ \exp\left(-\frac{1}{u_y^2}\right) + \frac{\sqrt{\pi}}{u_y} \Phi\left(\frac{1}{u_y}\right) \right],$$

где  $u_y = \sqrt{2} a\sigma_{yy}$ . При этом среднее полное число пересечений контуром  $\xi$  линии  $x = \text{const}$  равно

$$N = \int_{-\infty}^{+\infty} P \frac{dy}{\Delta y} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[ u_y \exp\left(-\frac{1}{u_y^2}\right) + \sqrt{\pi} \Phi\left(\frac{1}{u_y}\right) \right].$$

При  $u_y \rightarrow 0$  ( $u_y \ll 1$ ) величина  $N \rightarrow 1$ . При  $u_y \rightarrow \infty$  ( $u_y \gg 1$ ) имеем  $N \approx u_y/\sqrt{\pi}$ .

Отсюда следует, что, измеряя среднюю плотность числа пересечений контуром линии  $y = \text{const}$  и зная дисперсию уклонов  $\sigma_y$  (в частности, из функции  $n(y)$ ), можно определить дисперсию кривизн  $\sigma_{xy}$ . Измеряя среднее полное число пересечений контуром линии  $x = \text{const}$ , можно найти дисперсию кривизн  $\sigma_{yy}$ .

### 3. ПРАКТИЧЕСКИЙ СПОСОБ ПОЛУЧЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЯ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ОБЪЕКТА В ОТРАЖЁННЫХ ОТ ВЗВОЛНОВАННОЙ ПОВЕРХНОСТИ СВЕТОВЫХ ЛУЧАХ

При практической реализации метода диагностики волнения на морской поверхности по изображениям объектов типа «линия» и «уступ» нет необходимости использовать тест-объект вида (4). Данный объект легко синтезировать, превратив контурное изображение тест-объекта типа «линия» в двухградационное изображение объекта типа «уступ», как показано на рис. 3. В свою очередь, линейный объект можно синтезировать путём временного накопления изображения точечного источника света, быстро перемещающегося в горизонтальной плоскости относительно водной поверхности. Одно из возможных инженерных решений [18] этой задачи иллюстрирует рис. 4. Соответствующая теоретическая схема приведена на рис. 5.

Фотокамера 1 с открытым затвором совместно с изотропным источником света 2 установлены на самолёте, летящем на высоте  $H$  над водной поверхностью 3 со скоростью  $V$ . Фотоплёнка 4, расположенная в фокальной плоскости объектива фотокамеры, непрерывно протягивается со скоростью  $v = VF/H$ . Этим обеспечивается оптическое сопряжение точки на фотоплёнке с соответствующей точкой на водной поверхности в течение всего времени пролёта бликовой области (с размером порядка  $H\sigma_x$ ). Поле зрения объектива  $\varphi$  должно быть таким, чтобы обеспечить наблюдение всей области водной поверхности, на которой имеются блики.



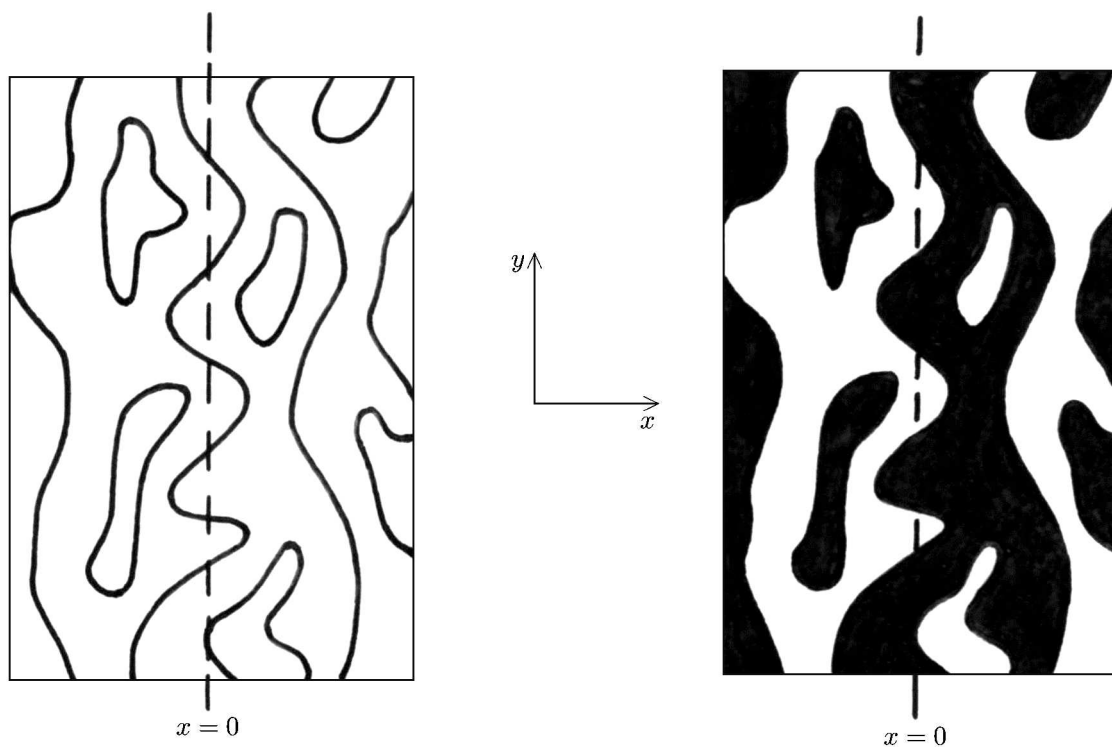


Рис. 3. Преобразование контурного изображения линии в двухградационное

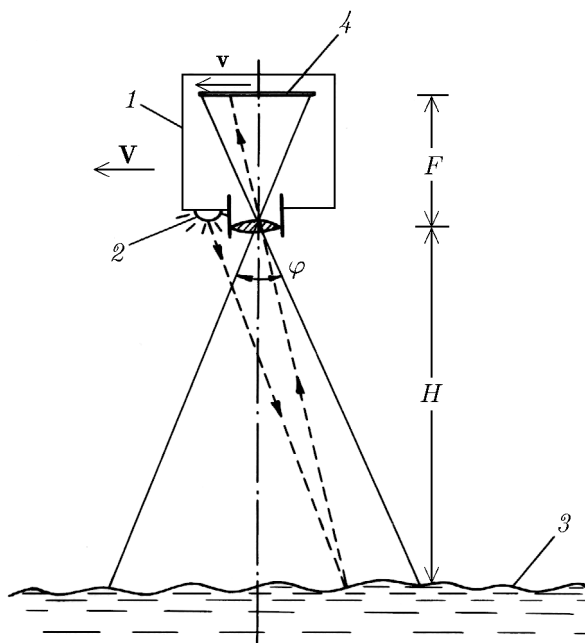


Рис. 4. Практическая реализация способа получения изображения объекта типа «линия»

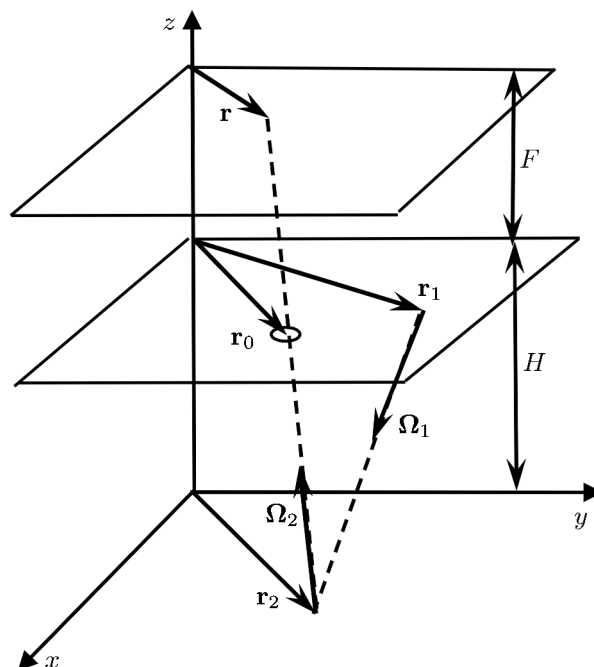


Рис. 5. Схема наблюдения точечного объекта в отражённых от водной поверхности лучах

Яркость  $B_i(\mathbf{r})$  регистрируемого в плоскости  $F$  светового поля от изотропного источника с распределением яркости  $B_{ob}(\mathbf{r}_1)$ , расположенного в плоскости  $H$ , определяется формулой

$$B_i(\mathbf{r}) = B_{ob}(\mathbf{r}_1),$$

где  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ .

Из соотношений  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + H\boldsymbol{\Omega}_1$ ,  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_2 + H\boldsymbol{\Omega}_2$ ,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + F\boldsymbol{\Omega}_2$  и  $\boldsymbol{\Omega}_1 = \boldsymbol{\Omega}_2 + 2\mathbf{q}(\mathbf{r}_2, t)$  получаем

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 \left( 1 + \frac{2H}{F} \right) - \frac{2H}{F} \mathbf{r} - 2H\mathbf{q}(\mathbf{r}_2, t),$$

где  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_0(1 + H/F) - \mathbf{r}(H/F)$ .

При большой скорости движения системы наблюдения временной изменчивостью волнения можно пренебречь, т. е. считать поверхность воды «замороженной». Анализ показывает [9], что скорость  $V$  при этом должна удовлетворять условию  $V \gg 2H\sigma_x/\tau_q$ .

Полагая, что  $B_{ob}(\mathbf{r}_1) = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)$ , для «замороженной» поверхности получим

$$B_i(\mathbf{r}) = \delta \left\{ \frac{2H}{F} (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}) - 2H\mathbf{q} \left[ \mathbf{r}_0 \left( 1 + \frac{H}{F} \right) - \mathbf{r} \frac{H}{F} \right] \right\}. \quad (8)$$

Введём в рассмотрение движение системы наблюдения:  $\mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{r}_0 - \mathbf{V}t$ ,  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} - \mathbf{V}'t$ , где  $\mathbf{V}$  — вектор скорости движения системы наблюдения,  $\mathbf{V}'$  — вектор скорости движения фотоплёнки. В результате из формулы (8) при  $\mathbf{r}_0 = 0$  получаем

$$B_i(\mathbf{r}, t) = \delta \left( -\frac{2H}{F} \mathbf{r} + \frac{2H}{F} (\mathbf{V}' - \mathbf{V})t - 2H\mathbf{q} \left\{ t \left[ \mathbf{V}' \frac{H}{F} - \mathbf{V} \left( 1 + \frac{H}{F} \right) \right] - \mathbf{r} \frac{H}{F} \right\} \right). \quad (9)$$

Положим здесь  $\mathbf{V}' = \mathbf{V}(1 + F/H)$ . Фотоплёнка при этом движется относительно системы наблюдения со скоростью  $\mathbf{v} = \mathbf{V}' - \mathbf{V} = \mathbf{V}(F/H) \ll \mathbf{V}$ . В результате из формулы (9) следует, что

$$B_i(\mathbf{r}, t) = \delta \left[ -\mathbf{r} \frac{2H}{F} + 2\mathbf{V}t - 2H\mathbf{q} \left( -\mathbf{r} \frac{H}{F} \right) \right]. \quad (10)$$

Допустим, что система наблюдения движется прямолинейно вдоль оси  $y$ . При этом для интегрального по времени изображения из выражения (10) имеем

$$B'_i(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} B_i(\mathbf{r}, t) dt = \frac{F}{4VH} \delta \left[ x + Fq_x \left( -\mathbf{r} \frac{H}{F} \right) \right].$$

Если перейти к переменной  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}(H/F)$ , то получим более привычное соотношение

$$B'_i(\mathbf{r}_2) = \frac{1}{4V} \delta[x_2 + Hq_x(-\mathbf{r}_2)].$$

Отметим, что данная формула идентична (1). После преобразования полученного изображения в двухградационное его можно подвергнуть корреляционному анализу, результат которого (при выполнении условия  $\max(\rho_{xx}, \rho_{yy}) \ll \sqrt{2} a\sigma_x$ ) описывается, как показано выше, формулой  $R_i(\boldsymbol{\rho}) \propto \arcsin[R_x(\boldsymbol{\rho})]$ .

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрены вопросы, связанные со статистическим анализом изображений тест-объектов типа «линия» и «уступ», полученных при наблюдении через случайно неровную границу раздела воздух—вода. Найдены соотношения для пространственно-временной функции корреляции  $R_i(\rho, \tau)$  флуктуаций изображения объекта в виде светящейся полуплоскости. Выявлена зависимость этой пространственно-временной корреляционной функции от дисперсий уклонов и кривизн взволнованной поверхности моря. Основным достоинством описанного способа определения пространственной корреляционной функции уклонов взволнованной водной поверхности является то, что он не зависит от условий внешнего освещения и нелинейности фотоприёмника, поскольку информация о  $R_x(\rho, \tau)$  содержится не в яркостных, а геометрических характеристиках регистрируемого изображения. Отмечена аналогичность результатов решения этой задачи и задачи о флуктуациях изображения круга Снеллиуса при подводной геометрии наблюдения.

Решена задача о вероятности пересечения контурным изображением объекта, заданного в виде светящейся прямой линии, малого произвольно ориентированного отрезка. На основе результатов решения этой задачи показана возможность определения значений дисперсий всех трёх пространственных кривизн  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xy}$  и  $\sigma_{yy}$  взволнованной водной поверхности. В частности, показано, что для линии, ориентированной вдоль оси  $y$ , по измерению средней плотности точек пересечения контуром линии  $x = \text{const}$  (при знании дисперсии уклонов  $\sigma_x$ ), можно определить дисперсию кривизн  $\sigma_{xy}$ . По измерению среднего полного числа пересечений контуром линии  $y = \text{const}$  можно найти дисперсию кривизн  $\sigma_{xx}$ . Аналогичным образом показано, что определение величин  $\sigma_{xy}$  и  $\sigma_{yy}$  может быть осуществлено путём анализа изображения линейного объекта, ориентированного вдоль оси  $x$ .

Предложен практический способ получения изображения прямолинейного светящегося объекта в отражённых от взволнованной поверхности световых лучах. Теоретически показано, что такой объект можно синтезировать путём временного накопления изображения точечного источника света, быстро перемещающегося в горизонтальной плоскости относительно водной поверхности. После преобразования данного изображения в двухградационное его можно подвергнуть корреляционному анализу, результат которого, как показано выше, достаточно простым образом связан с функцией корреляции уклонов морской поверхности.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-45-02610р\_повожье\_a).

#### ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим задачу определения величин  $P_1$  и  $P_2$ . Как известно, двухточечная функция распределения гауссового случайного поля  $\xi(\mathbf{r})$  имеет вид

$$w_2(\xi_1, \xi_2, \Delta\mathbf{r}) = C \exp\left[-\frac{K(\xi_1, \xi_2)}{2\sigma_x^2(1-R^2)}\right],$$

где  $C = (2\pi\sigma_x^2 \sqrt{1-R^2})^{-1}$ ,  $K(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^2 + \xi_2^2 - 2R\xi_1\xi_2$ ,  $R \equiv R_x(\Delta\mathbf{r})$  — нормированная корреляционная функция процесса  $q_x(\mathbf{r})$ ,  $\sigma_x^2$  — дисперсия этого процесса.

Проведём в выражении для  $w_2$  замену переменных  $\xi_1 \rightarrow q_1 - q_2$ ,  $\xi_2 \rightarrow q_1 + q_2$ . При этом

$$w_2(\xi_1, \xi_2, \Delta\mathbf{r}) d\xi_1 d\xi_2 \rightarrow 2w_2(q_1, q_2, \Delta\mathbf{r}) dq_1 dq_2,$$

где

$$w_2(q_1, q_2, \mathbf{\Delta r}) = C \exp\left[-\frac{K(q_1, q_2)}{\sigma_x^2(1-R^2)}\right], \quad K(q_1, q_2) = q_1^2(1-R) + q_2^2(1+R).$$

Определим пределы интегрирования в выражении для  $P_1$  в новых переменных. Из  $\xi_1 \leq (x - \Delta)/a$  следует  $q_1 \leq q_2 + (x - \Delta)/a$ . Из  $\xi_2 \geq (x + \Delta)/a$  следует  $q_1 \geq -q_2 + (x + \Delta)/a$ . Подставим  $q_1 \geq -q_2 + (x + \Delta)/a$  в  $q_1 \leq q_2 + (x - \Delta)/a$  и получим условие для  $q_2$  в виде  $q_0 \leq q_2 < \infty$ , где  $q_0 = \Delta/a = \Delta x/(2a)$ .

В результате получим

$$P_1 = 2C \int_{q_0}^{\infty} \exp\left[-\frac{q_2^2}{\sigma_x^2(1-R)}\right] dq_2 \int_{(x+\Delta)/a-q_2}^{(x-\Delta)/a+q_2} \exp\left[-\frac{q_1^2}{\sigma_x^2(1+R)}\right] dq_1.$$

Рассмотрим интеграл по  $q_1$ . Ширина участка интегрирования равна  $\Delta q_1 = 2(q_2 - q_0)$ , центр участка интегрирования определяется как  $q_{1c} = x/a$ . Учтём, что при малых значениях  $\mathbf{\Delta r}$  корреляционная функция уклонов (в главной системе координат волнения) записывается в виде  $R \approx 1 - (\Delta\rho)^2$ , где  $(\Delta\rho)^2 = (\Delta x)^2/\rho_{xx}^2 + (\Delta y)^2/\rho_{yy}^2$ . Поскольку функция  $\exp\{-q_2^2/[\sigma_x^2(1-R)]\}$  в выражении для  $P_1$  является при  $\Delta r \rightarrow 0$  узкой по переменной  $q_2$  (ширина её имеет порядок  $\sigma_x \sqrt{1-R} \ll \sigma_x$ ),  $q_2$  можно считать малой величиной (очевидно также, что и  $q_0 \rightarrow 0$ ). Следовательно, ширина участка интегрирования во втором интеграле  $\Delta q_1$  оказывается малой по сравнению с шириной подынтегральной функции  $\exp\{-q_1^2/[\sigma_x^2(1+R)]\}$  (ширина которой имеет порядок  $\sigma_x \sqrt{1+R} \approx \sqrt{2} \sigma_x$ ). Вследствие этого внутренний интеграл по  $q_1$  может быть приближённо оценён по формуле

$$\int dq_1 \approx \exp\left[-\frac{q_{1c}^2}{\sigma_x^2(1+R)}\right] \Delta q_1 = \exp\left[-\frac{x^2}{a^2\sigma_x^2(1+R)}\right] 2(q_2 - q_0).$$

В итоге для вероятности  $P_1$  справедливо выражение

$$P_1 = 4C \exp\left[-\frac{x^2}{a^2\sigma_x^2(1+R)}\right] \int_{q_0}^{\infty} (q_2 - q_0) \exp\left[-\frac{q_2^2}{\sigma_x^2(1-R)}\right] dq_2.$$

Проведя в этом интеграле замену переменной  $q_2 - q_0 \rightarrow z/2$ , получим

$$P_1 = C \exp\left[-\frac{x^2}{a^2\sigma_x^2(1+R)}\right] A_z^0,$$

где

$$A_z^0 = \exp\left[-\frac{q_0^2}{\sigma_x^2(1-R)}\right] A_z, \quad A_z = \frac{1}{2\mu} \{1 - \sqrt{\pi} \beta \exp(\beta^2)[1 - \Phi(\beta)]\},$$

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt, \quad \beta = \frac{\nu}{\sqrt{\mu}} = \frac{q_0}{\sigma_x \sqrt{1-R}}, \quad \mu = \frac{1}{4\sigma_x^2(1-R)}, \quad \nu = \frac{q_0}{2\sigma_x^2(1-R)}.$$

Это выражение с учётом соотношения  $R \approx 1 - (\Delta\rho)^2$  принимает вид

$$P_1 = \frac{\Delta\rho}{\sqrt{2}\pi} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2\sigma_x^2}\right) \left\{ \exp\left[-\frac{(\Delta x)^2}{4a^2\sigma_x^2(\Delta\rho)^2}\right] - \sqrt{\pi} \frac{\Delta x}{2a\sigma_x \Delta\rho} \left[1 - \Phi\left(\frac{\Delta x}{2a\sigma_x \Delta\rho}\right)\right] \right\}.$$

Определим величину  $P_2$ . Воспользовавшись соотношением  $P_2 = P_1(-a)$ , получаем

$$P_2 = \frac{\Delta\rho}{\sqrt{2}\pi} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2\sigma_x^2}\right) \left\{ \exp\left[-\frac{(\Delta x)^2}{4a^2\sigma_x^2(\Delta\rho)^2}\right] + \sqrt{\pi} \frac{\Delta x}{2a\sigma_x\Delta\rho} \left[1 + \Phi\left(\frac{\Delta x}{2a\sigma_x\Delta\rho}\right)\right] \right\}.$$

Аналогичным образом вычисляются вероятности  $P_1, P_2$  для изображения линейного объекта, ориентированного вдоль оси  $x_0$ .

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cox C. S., Munk W. H. // J. Opt. Soc. Am. 1954. V. 44, No. 1. P. 838.
2. Мулламаа Ю.-А. Р. Атлас оптических характеристик взволнованной поверхности моря. Тарту: Изд-во АН ЭССР, 1964. 62 с.
3. Stilwell D. J. // J. Geophys. Res. 1969. V. 74, No. 8. P. 1974.
4. Титов В. И. // Изв. АН СССР. ФАО. 1982. Т. 18, № 2. С. 215.
5. Большаков А. Н., Бурдюгов В. М., Гродский С. А., Кудрявцев В. Н. // Изв. АН СССР. ФАО. 1990. Т. 26, № 6. С. 652.
6. Бурцев Ю. Г., Пелевин В. Н. Световые поля в океане. М.: ИО АН СССР, 1979. С. 231.
7. Гардашов Р. Г. // Изв. АН СССР. ФАО. 1991. Т. 27, № 12. С. 1367.
8. Вебер В. Л. // Изв. вузов. Радиофизика. 1979. Т. 22, № 8. С. 989.
9. Вебер В. Л. // Изв. РАН. ФАО. 1982. Т. 18, № 3. С. 286.
10. Вебер В. Л. // Оптика и атмосфера океана. 1999. Т. 12, № 12. С. 1132.
11. Мольков А. А., Долин Л. С. // Изв. РАН. ФАО. 2012. Т. 48, № 5. С. 617.
12. Мольков А. А., Долин Л. С. // Изв. РАН. ФАО. 2013. Т. 49, № 5. С. 615.
13. Вебер В. Л. // Изв. вузов. Радиофизика. 2017. Т. 60, № 6. С. 530.
14. Weber V. L. // Proc. VII Int. Conf. "Current Problems in Optics of Natural Waters". (September 10–14, 2013, St.-Petersburg). P. 230.
15. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Книга первая. М.: Изд-во Советское радио, 1969. 752 с.
16. Тихонов В. И., Хименко В. И. Выбросы траекторий случайных процессов. М.: Наука, 1987. 304 с.
17. Крамер Г., Лидбеттер М. Стационарные случайные процессы. М.: Мир, 1969. 400 с.
18. А. с. 1169424 СССР. Способ получения информации о взволнованной водной поверхности / Вебер В. Л. Заявл. 24.03.1983.

Поступила в редакцию 5 апреля 2017 г.; принята в печать 23 ноября 2017 г.

### DETERMINATION OF THE WAVE PARAMETERS FROM THE STATISTICAL CHARACTERISTICS OF AN IMAGE OF A LINEAR TEST OBJECT

*V. L. Weber*

We statistically analyze the images of the objects of the "light line" and "half-plane" types which are observed through a randomly irregular air–water interface. The expressions for the correlation function of the fluctuations of the image of an object given in the form of a luminous half-plane are found. The possibility of determining the spatial and temporal correlation functions of the slopes of a rough water surface is shown.

*В. Л. Вебер*

947

The problem of the probability of intersection of a small arbitrarily oriented segment by the contour image of a luminous straight line is solved. Using the results of solving this problem, we show the possibility of determining the values of the curvature variances of a rough water surface.

A practical method for obtaining an image of a rectilinear luminous object in the light beams reflected from the rough surface is proposed. It is theoretically shown that such an object can be synthesized by temporal accumulation of the image of a point source of light rapidly moving in the horizontal plane with respect to the water surface.