УДК 551.510.413.5

ВОЛНОВЫЕ ЭФФЕКТЫ, СВЯЗАННЫЕ С ВЫСОТНЫМ ИЗМЕНЕНИЕМ ИОННОГО СОСТАВА ИОНОСФЕРЫ

Д. И. Вавилов [1], *Д. Р. Шкляр* [1,2] *

[1] Институт космических исследований РАН, г. Москва;
[2] Московский физико-технический институт, г. Долгопрудный, Россия

Свойства волн в диапазоне частот ниже протонной гирочастоты, которые могут распространяться в магнитоактивной плазме, существенно зависят от её ионного состава. Добавление нового сорта ионов приводит к появлению новой резонансной частоты, на которой показатель преломления обращается в бесконечность, и новой частоты отсечки, на которой показатель преломления обращается в нуль. При этом изменяется топология зависимости квадрата показателя преломления от частоты, в частности появляется новая ветвь колебаний, которая лежит выше частоты отсечки. Возникает вопрос о возбуждении этих колебаний при наличии в плазме излучения с соответствующей частотой, распространяющегося в другой волновой моде. Линейная трансформация волн является другим важным эффектом, связанным с изменением ионного состава плазмы. Указанные два вопроса, которые имеют непосредственное отношение к теории формирования протонных свистов в ионосфере, где ионный состав изменяется с высотой, составляют предмет исследования в данной работе.

ВВЕДЕНИЕ

Свойства волновых мод, которые присутствуют в магнитоактивной плазме в диапазоне частот ниже протонной гирочастоты, существенно определяются ионным составом плазмы [1]. В ионосферной плазме, начиная с высот порядка 300 км, основными ионами являются ионы кислорода O^+, азота N^+, гелия He^+ и водорода H^+ (протоны). Вблизи гирочастоты каждого сорта ионов показатель преломления $N \equiv kc/\omega$, где k — волновое число, ω — круговая частота волны и c — скорость света в вакууме, вычисленный в приближении «холодной» плазмы, обращается в бесконечность для одной из двух возможных волновых мод и остаётся конечным для другой. В то же время в диапазоне между гирочастотами двух «соседних» (по массе) ионов существует так называемая частота отсечки, для которой квадрат показателя преломления N^2 одной из волновых мод обращается в нуль и ниже которой $N^2 < 0$, так что между гирочастотой более тяжёлого иона и частотой отсечки существует только одна распространяющаяся мода. Общий вид частотной зависимости квадрата показателя преломления для холодной магнитоактивной плазмы, содержащей три сорта ионов, подробно обсуждался в статье [2].

Помимо относительного ионного состава, который определяет качественный вид зависимости показателя преломления от частоты, величина N^2 зависит также от угла распространения θ, т. е. от угла между волновым вектором $\mathbf{k}$ и направлением внешнего магнитного поля $\mathbf{B}_0$, и от отношения плазменной частоты протонов ω_{pH} к их гирочастоте ω_{cH}. На рис. 1 показан квадрат показателя преломления N^2 — точнее, величина $\ln(1 + N^2)$ — как функция частоты на различных высотах. Цвет линии указывает на поляризацию, которую имеет волна на данной частоте: чёрная линия соответствует правой поляризации, а серая — левой. Профиль концентрации электронов и ионов взят из модели IRI-2007 [3] для минимума солнечной активности (лето 2007 года), полуночи на нулевом меридиане и низких широт (20° северной геомагнитной широты). Угол θ соответствует вертикальному распространению волны: при начальной геомагнитной широте $\lambda = 20°$ он примерно равен 53°. Следует отметить, что углы распространения $\theta = 0$ и $\theta = \pi/2$

* david@iki.rssi.ru

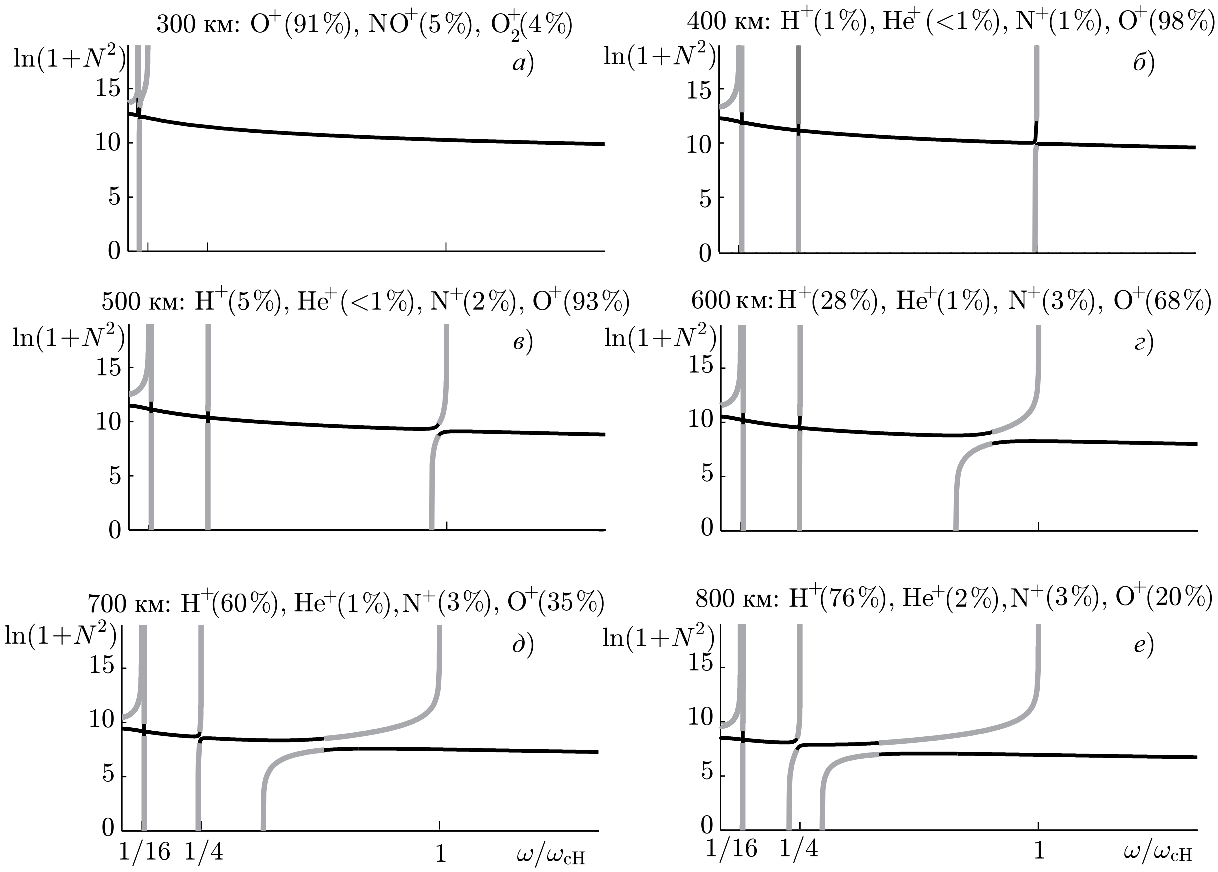

Рис. 1. Топология частотной зависимости показателя преломления на различных высотах в ионосфере. На графиках указаны высоты и относительные концентрации ионов. Цвет линии указывает на знак поляризации волны: чёрная линия соответствует правой поляризации, серая — левой. Профиль плотности электронов и ионов взят из модели IRI-2007

являются в определённом смысле «вырожденными» с точки зрения топологии зависимости показателя преломления от частоты и далее не рассматриваются, поскольку, как мы увидим ниже, эти значения не реализуются в рассматриваемой нами задаче.

Подтверждение высказанных утверждений с помощью общего дисперсионного уравнения в холодной магнитоактивной плазме будет дано ниже. Здесь же укажем, что, как следует из рис. 1, при вариации относительного ионного состава изменяется топология зависимости показателя преломления от частоты, так что в зависимости от относительной концентрации ионов на одной и той же частоте могут существовать либо одна, либо две распространяющиеся моды. При этом возникает естественная задача об описании распространения волны с определённой частотой в ионосфере при возникновении на этой частоте второй распространяющейся моды. Решению этой задачи, которая имеет прямое отношение к теории формирования ионных свистов в верхней ионосфере [4–8], посвящены первые три раздела данной работы. Поскольку появление распространяющейся моды происходит при обращении величины N^2 в нуль, т. е. при очень малых значениях k, решение этой задачи требует, очевидно, волнового подхода. В чётвертом разделе рассмотрена задача о линейной трансформации ионно-циклотронных волн в ионосферной плазме с учётом столкновений, т. е. в случае, когда тензор диэлектрической проницаемости плазмы не является эрмитовым.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Распространение монохроматической волны с частотой ω в анизотропной плазме описывается системой уравнений для компонент комплексного вектора $\mathbf{E}(\mathbf{r})$:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial E_j}{\partial x_j}\right) - \frac{\partial^2 E_i}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\omega^2}{c^2}\,\varepsilon_{ij}(\mathbf{r},\ \omega) E_j(\mathbf{r}), \tag{1}$$

через который действительное электрическое поле волны выражается соотношением

$$\mathcal{E}_j(\mathbf{r}, t) = \mathrm{Re}\left[E_j(\mathbf{r})\exp(-i\omega t)\right]. \tag{2}$$

Разумеется, что комплексный вектор $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ зависит от частоты волны ω как от параметра. Здесь t — время, x_j — компоненты радиус-вектора в декартовой системе координат, индекс $j = \{x, y, z\}$ соответствует осям этой системы. Величина $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{r})$, входящая в уравнения (1), — тензор диэлектрической проницаемости, который для «холодной» плазмы с внешним магнитным полем, направленным вдоль оси z, имеет вид

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & i\varepsilon_2 & 0 \\ -i\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Величины ε_1, ε_2 и ε_3 выражаются через параметры плазмы и внешнего магнитного поля соотношениями

$$\varepsilon_1 = 1 - \sum_s \frac{\omega_{\mathrm{p}s}^2(\omega + i\nu_s)}{\omega[(\omega + i\nu_s)^2 - \omega_{Hs}^2]}, \quad \varepsilon_2 = -\sum_s \frac{\omega_{Hs}\omega_{\mathrm{p}s}^2}{\omega[(\omega + i\nu_s)^2 - \omega_{Hs}^2]}, \quad \varepsilon_3 = 1 - \sum_s \frac{\omega_{\mathrm{p}s}^2}{\omega(\omega + i\nu_s)}, \tag{4}$$

где $\omega_{\mathrm{p}s}$ и ω_{Hs} — плазменная частота и гирочастота частиц сорта s соответственно, ν_s — их частота столкновений, суммирование ведётся по всем компонентам плазмы: электронам и всем сортам ионов. В случае однородной плазмы решение системы уравнений (1) можно искать в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E\mathbf{a}\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}),$$

соответствующем плоской волне с волновым вектором $\mathbf{k}$, комплексной амплитудой E и комплексным поляризационным вектором $\mathbf{a}$, причём все эти величины не зависят от $\mathbf{r}$. Поскольку решение уравнения (1) определено с точностью до постоянной, одну из компонент поляризационного вектора можно положить равной единице. Требование существования нетривиального решения системы уравнений (1) приводит к дисперсионному уравнению вида

$$Ak^4 + B\,\frac{\omega^2}{c^2}\,k^2 + C\,\frac{\omega^4}{c^4} = 0, \tag{5}$$

где

$$A = \varepsilon_1\sin^2\theta + \varepsilon_3\cos^2\theta, \quad C = \varepsilon_3\,(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2), \quad B = -\varepsilon_1\varepsilon_3\,(1 + \cos^2\theta) - (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)\sin^2\theta, \tag{6}$$

а θ, как и выше, угол волновой нормали, т. е. угол между волновым вектором $\mathbf{k}$ и внешним магнитным полем $\mathbf{B}_0$, так что $k_\parallel = k\cos\theta$ и $k_\perp = k\sin\theta$.

Уравнение (5) представляет собой биквадратное уравнение, которое определяет два возможных значения квадрата волнового вектора (или, что эквивалентно, квадрата показателя преломления) при заданных частоте ω и угле θ. Корни этого уравнения для различных параметров плазмы и приведены на рис. 1. В случае неоднородной плазмы решение системы (1) в виде плоской волны с постоянным волновым вектором теряет силу, однако для случая слабонеоднородной плазмы, когда справедливо приближение Вентцеля—Крамерса—Бриллюэна (ВКБ), дисперсионное соотношение (5) по-прежнему имеет смысл и определяет координатную зависимость абсолютной величины локального волнового вектора при заданных ω и θ.

Приведённые в данном разделе сведения, которые мы используем в дальнейшем, хорошо известны и могут быть найдены во многих монографиях, посвящённых распространению волн в плазме, например в [9].

2. ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ ВБЛИЗИ ОБЛАСТИ ПОЯВЛЕНИЯ НОВОЙ МОДЫ

Сформулированная во введении физическая задача возникает, в частности, при проникновении в ионосферу излучения молниевого разряда. Это излучение сначала распространяется в волноводе Земля—ионосфера, частично проникая в ионосферу через верхнюю границу волновода, которой служит нижняя граница ионосферы [10]. Поскольку показатель преломления ионосферы много больше единицы, то проникновение излучения в неё происходит гораздо медленнее, чем его распространение в волноводе. В результате начальное возмущение поля оказывается локализованным в узкой области нижней ионосферы вблизи верхней границы волновода Земля—ионосфера. Поэтому в спектральном разложении начального возмущения по координатам доминируют вертикальные волновые векторы. Каждому такому волновому вектору соответствует согласно дисперсионному уравнению определённая частота, причём эта частота не изменяется при дальнейшем распространении волнового пакета, т. к. на интересующих нас временах параметры ионосферы можно считать не зависящими от времени. Изменение же волнового вектора вдоль траектории волнового пакета описывается уравнениями геометрической оптики, если это приближение применимо. Если же оно неприменимо, то изложенные выше соображения позволяют считать, что волновое поле зависит главным образом от вертикальной координаты, которая, впрочем, не совпадает с направлением внешнего магнитного поля. Кроме того, если параметры среды не зависят от азимутальной координаты, а начальный волновой вектор имеет вертикальное направление, т. е. лежит в меридиональной плоскости, то волна и в дальнейшем распространяется в этой плоскости, так что рассматриваемая задача двумерная. Пренебрегая кривизной внешнего магнитного поля, а также горизонтальными градиентами концентрации плазмы в области появления новой волновой моды, мы приходим к одномерной волновой задаче, в которой поле зависит от одной вертикальной координаты. Принимая направление внешнего магнитного поля в качестве направления оси z в соответствии с выбранным видом тензора диэлектрической проницаемости, мы выберем меридиональную плоскость, в которой происходит распространение волны, в качестве плоскости x, z, считая ось y третьей ортогональной координатой, дополняющей координаты x и z до правой тройки.

Важным упрощением рассматриваемой задачи о распространении волн с частотами ниже или порядка протонной гирочастоты в ионосферной плазме является малость продольной компоненты электрического поля по сравнению с его поперечными компонентами,

$$E_z \ll \{E_x,\ E_y\},$$

что связано с высокой продольной проводимостью плазмы в рассматриваемом диапазоне частот.

Введём новую ортогональную систему координат (ξ, y, h) так, чтобы ось h совпадала с вертикальным направлением и составляла острый угол θ с осью z, ось y оставалась неизменной, т. е.

перпендикулярной к меридиональной плоскости, а ось ξ дополняла y и h до правой тройки. Тогда связь старых и новых координат задаётся соотношениями

$$\xi = x\cos\theta + z\sin\theta, \qquad h = z\cos\theta - x\sin\theta. \tag{7}$$

Поскольку рассматривается чисто вертикальное распространение, мы используем обозначение θ для угла между вертикалью и внешним магнитным полем $\mathbf{B}_0$, которое традиционно применяется для угла между волновым вектором $\mathbf{k}$ и $\mathbf{B}_0$. Отметим, что при данном выборе новой системы координат в Северном геомагнитном полушарии, где внешнее магнитное поле направлено к Земле, положительное направление вертикальной оси h также отвечает направлению к Земле.

В новой системе координат при сделанных выше предположениях система уравнений (1) существенно упрощается и принимает вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 E_x}{\partial h^2}\cos^2\theta + \frac{\omega^2}{c^2}\,\varepsilon_1 E_x = -i\,\frac{\omega^2}{c^2}\,\varepsilon_2 E_y,\\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial h^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\,\varepsilon_1 E_y = i\,\frac{\omega^2}{c^2}\,\varepsilon_2 E_x.\end{gathered} \tag{8}$$

Следует подчеркнуть, что в качестве независимой переменной в этих уравнениях используется вертикальная координата h, а в качестве функций – поперечные (по отношению к внешнему магнитному полю) проекции E_x и E_y электрического поля в исходной системе координат.

Несмотря на то, что в дальнейшем мы будем решать волновую задачу, полезно рассмотреть дисперсионное уравнение, которое соответствует системе (8). Подставляя в (8) $E_x = a_x\exp(ikh)$ и $E_y = a_y\exp(ikh)$, получим

$$(\varepsilon_1 - N^2\cos^2\theta)\,a_x + i\varepsilon_2 a_y = 0, \qquad -i\varepsilon_2 a_x + (\varepsilon_1 - N^2)\,a_y = 0. \tag{9}$$

Приравнивая определитель системы (9) к нулю, приходим к локальному дисперсионному уравнению, которое определяет значения N^2, при которых система (8) имеет нетривиальные решения:

$$N_1^2 = \frac{\varepsilon_1(1+\cos^2\theta) + \sqrt{D}}{2\cos^2\theta}\,, \qquad N_2^2 = \frac{\varepsilon_1(1+\cos^2\theta) - \sqrt{D}}{2\cos^2\theta}\,, \tag{10}$$

где дискриминант

$$D = \varepsilon_1^2\,(1+\cos^2\theta)^2 - 4\,(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)\,\cos^2\theta \equiv \varepsilon_1^2\sin^4\theta + 4\varepsilon_2^2\cos^2\theta. \tag{11}$$

Для удобства анализа мы привели два эквивалентных выражения для величины D.

При наличии столкновений компоненты ε_1, ε_2 и ε_3 тензора диэлектрической проницаемости являются комплексными. Влияние этого фактора мы рассмотрим в четвёртом разделе; в этом и следующем разделе мы будем считать величины ε_1 и ε_2 действительными. Второе из выражений (11) тогда показывает, что оба значения N^2 являются действительными. Кроме того, нас будет интересовать случай, когда новая мода на заданной частоте появляется при наличии второй распространяющейся моды, т. е. нас интересует вопрос об эффективности вынужденной трансформации мод в этом случае (несмотря на очевидную неэффективность такого процесса с физической точки зрения — волны со столь разными волновыми векторами не могут взаимодействовать между собой, — строгое доказательство этого факта оказывается нетривиальным). Ясно, что такая ситуация реализуется только в случае, когда в области, где появляется новая мода, величина $\varepsilon_1 > 0$, т. к. в противном случае величина N^2 для одной из мод отрицательна (см. (10)). В то же время из первого выражения (11) для D следует, что при $(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) > 0$ оба значения N^2 положительны, т. е. существуют две распространяющиеся моды, а при $(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) < 0$ лишь одно значение N^2 положительно, так что есть только одна распространяющаяся мода. Таким образом, появление новой моды происходит при $(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) = 0$. Не нарушая общности, будем считать, что последнее равенство реализуется при $h = 0$. Как показывает анализ, в интересующей нас области величина $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$ всегда положительна, так что появлению новой моды отвечает обращение величины $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ в нуль; при этом $\varepsilon_1(\omega, h = 0) \equiv \varepsilon_0 > 0$ и $\varepsilon_2(\omega, h = 0) \equiv -\varepsilon_0 < 0$. Характерные зависимости величин ε_1, ε_2 и их суммы ε_+ от высоты показаны на рис. 2.

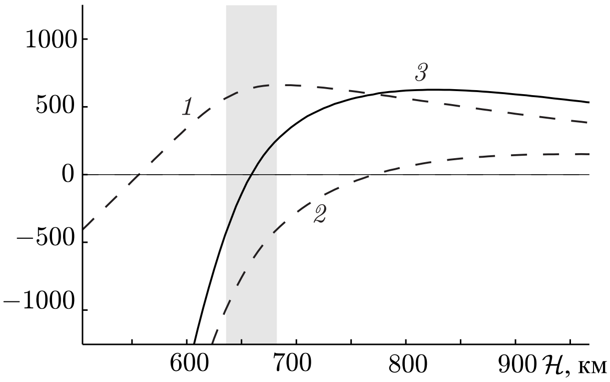

Рис. 2. Компоненты ε_1 (кривая *1*) и ε_2 (кривая *2*) тензора диэлектрической проницаемости и их сумма ε_+ (кривая *3*) как функции высоты $\mathcal{H}$ для волны с частотой 420 Гц и углом распространения 23° и профиля концентрации плазмы, взятого из модели IRI-2007

Будем для определённости рассматривать появление на некоторой частоте ниже протонной гирочастоты быстрой магнитозвуковой моды с ростом концентрации протонов с высотой (см. рис. 1). Для Северного геомагнитного полушария это означает, что при положительных h существует только одна распространяющаяся мода, а при отрицательных h их две. Несмотря на кажущуюся простоту системы уравнений (8), её прямое численное интегрирование приводит к физически некорректной зависимости решения от высоты, на которой задаются граничные условия. Это связано с тем, что при положительных h система (8) содержит экспоненциально нарастающее решение, которое не имеет физического смысла. Чтобы исключить эту трудность и построить решение, плавно зависящее от граничных условий, поступим следующим образом. Введём вместо величин E_x, E_y, ε_1 и ε_2 их линейные комбинации:

$$E_1 = E_x - iE_y, \qquad E_3 = E_x \cos^2\theta + iE_y, \qquad \varepsilon_+ = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \qquad \varepsilon_- = \varepsilon_1 - \varepsilon_2. \tag{12}$$

Уравнения для величин E_1 и E_3, которые следуют из (8), имеют вид

$$\frac{\partial^2 E_1}{\partial h^2} + \frac{\omega^2\,(1+\cos^2\theta)\,\varepsilon_-}{2c^2\cos^2\theta}\,E_1 + \frac{\omega^2\varepsilon_+\sin^4\theta}{2c^2\,(1+\cos^2\theta)\,\cos^2\theta}\,E_1 = -\,\frac{\omega^2\varepsilon_+\,\mathrm{tg}^2\,\theta}{c^2\,(1+\cos^2\theta)}\,E_3,$$
$$\frac{\partial^2 E_3}{\partial h^2} + \frac{2\omega^2\varepsilon_+}{c^2\,(1+\cos^2\theta)}\,E_3 = -\,\frac{\omega^2\varepsilon_+\sin^2\theta}{c^2\,(1+\cos^2\theta)}\,E_1. \tag{13}$$

Напомним, что при $h = 0$, где появляется вторая распространяющаяся мода, величина $\varepsilon_+ = 0$, а $\varepsilon_- = 2\varepsilon_0$. При этом система уравнений (13) описывает взаимодействие двух «осцилляторов» E_1 и E_3 со слабой связью, определяемой величиной ε_+. Эта связь, однако, возрастает с увеличением $|h|$, что свидетельствует о том, что величины E_1 и E_3 не описывают интересующие нас волновые моды. Однако именно в этих переменных система волновых уравнений вблизи $h = 0$, т. е. вблизи высоты, где появляется вторая распространяющаяся мода, имеет точное решение.

Поскольку, как было отмечено выше, вторая распространяющаяся мода появляется при увеличении расстояния от Земли, т. е. при отрицательных h, разложение величины $2\omega^2\varepsilon_+/[c^2(1+\cos^2\theta)]$ с точностью до линейных членов должно иметь вид

$$\frac{2\omega^2\varepsilon_+}{c^2\,(1+\cos^2\theta)} = -\alpha h, \tag{14}$$

где $\alpha > 0$. Вблизи точки $h = 0$ систему (13) можно решать методом последовательных приближений, считая h малым параметром. В нулевом приближении по h имеем

$$\frac{\partial^2 E_1^{(0)}}{\partial h^2} + \frac{\omega^2 (1 + \cos^2\theta)\, \varepsilon_0}{c^2 \cos^2\theta} E_1^{(0)} = 0, \qquad E_3^{(0)} = 0. \tag{15}$$

При этом решение для $E_1^{(0)}$, которое нас интересует, представляет собой волну с постоянной амплитудой E_0 и постоянным волновым вектором

$$k_0 = [\omega/(c\cos\theta]\,(1 + \cos^2\theta)^{1/2}\, \varepsilon_0^{1/2}, \tag{16}$$

распространяющуюся от Земли, т. е. в отрицательном направлении оси h. В первом приближении по малому параметру уравнение для E_1 совпадает с первым уравнением системы (13) с нулевой правой частью, т. е. снова оказывается замкнутым однородным уравнением для величины E_1, и для его решения можно использовать приближение ВКБ. Уравнение же для величины E_3, которое и представляет наибольший интерес, принимает вид

$$\frac{\partial^2 E_3}{\partial h^2} - \alpha h E_3 = \frac{\sin^2\theta}{2}\, \alpha h E_1^{(0)}. \tag{17}$$

Прежде чем переходить к решению уравнения (17), обсудим область его применимости. Согласно формуле (14) $\alpha = 2\omega^2/[c^2 (1 + \cos^2\theta)]\, \mathrm{d}\varepsilon_+/\,\mathrm{d}h$. Определим теперь характерный масштаб $\mathcal{L}$, на котором справедливо разложение (14), соотношением

$$\alpha \sim \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\varepsilon_0}{\mathcal{L}} \sim \frac{k_0^2}{\mathcal{L}}, \tag{18}$$

где мы использовали выражение (16) для k_0^2 . Ясно, что введённая величина $\mathcal{L}$ связана с характерным масштабом, на котором изменяются величины ε_1 и ε_2. Согласно определению величины $\mathcal{L}$ уравнение (17) справедливо при $|h| \ll \mathcal{L}$ или, с учётом (18), при

$$|h| \ll \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\varepsilon_0}{\alpha} \sim \frac{k_0^2}{\alpha}. \tag{19}$$

Переходя к безразмерной координате $h' = \alpha^{1/3} h$ и нормированному полю $E_3' = E_3/E_0$, из (17), опуская штрихи, получим

$$\frac{\partial^2 E_3}{\partial h^2} - h E_3 = \frac{\sin^2\theta}{2}\, h \exp(-i\kappa h), \tag{20}$$

где $\kappa = \alpha^{-1/3} k_0$. Нетрудно видеть, что величина $\kappa \sim (k_0\mathcal{L})^{1/3}$, а условие применимости уравнения (20) в безразмерных переменных имеет вид $|h| \ll \kappa^2 \sim (k_0\mathcal{L})^{2/3}$. Следует подчеркнуть, что при условии $(k_0\mathcal{L})^{2/3} \gg 1$, которое мы будем считать выполненным, величина $|h|$ в области применимости уравнения (20) может быть много больше единицы.

3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПОЛЯ

Как известно, для решения неоднородного уравнения (20) необходимо знать фундаментальную систему решений однородного уравнения, которое в рассматриваемом случае представляет собой уравнение Эйри. В качестве фундаментальной системы решений выберем два линейно независимых решения уравнения Эйри: функции Эйри $\mathrm{Ai}(h)$ и $\mathrm{Bi}(h)$. Для действительных значений аргумента эти функции имеют следующие асимптотики при бóльших абсолютных значениях аргумента:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ai}(z) &\sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}\, z^{1/4}} \exp(-\zeta), \qquad \mathrm{Ai}(-z) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}\, z^{1/4}} \sin(\zeta + \pi/4), \\ \mathrm{Bi}(z) &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi}\, z^{1/4}} \exp\zeta, \qquad \mathrm{Bi}(-z) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}\, z^{1/4}} \cos(\zeta + \pi/4), \end{aligned} \tag{21}$$

где $\zeta = 2z^{3/2}/3$, $z \to \infty$. Как следует из (21), в области отрицательных h, т. е. там, где существуют две распространяющиеся моды, обе функции имеют волновые асимптотики; в области положительных h функция $\mathrm{Ai}(h)$ экспоненциально убывает, а функция $\mathrm{Bi}(h)$ экспоненциально нарастает.

Мы будем рассматривать решение уравнения (20) в области его применимости $|h| < h_{\mathrm{m}}$, считая $h_{\mathrm{m}} \gg 1$. Согласно общим формулам (см., например, [11]) решение неоднородного уравнения (20) имеет вид

$$\begin{aligned} E_3(h) &= C_1 \mathrm{Ai}(h) + C_2 \mathrm{Bi}(h) + \\ &+ \frac{\pi \sin^2\theta}{2} \mathrm{Bi}(h) \int\limits_0^h \mathrm{Ai}(h') h' \exp(-i\kappa h')\, \mathrm{d}h' - \frac{\pi \sin^2\theta}{2} \mathrm{Ai}(h) \int\limits_0^h \mathrm{Bi}(h') h' \exp(-i\kappa h')\, \mathrm{d}h', \end{aligned} \tag{22}$$

где C_1 и C_2 — две произвольные постоянные, определяемые из граничных условий, и учтено, что определитель Вронского $A(h)\, \mathrm{dB(h)/dh} - \mathrm{B(h)\, dA(h)/dh}$ используемой нами фундаментальной системы равен $1/\pi$.

При бóльших κ асимптотическое вычисление входящих в соотношение (22) интегралов сводится к интегрированию по частям (см., например, [12]), что даёт

$$\begin{aligned} E_3(h) &= C_1 \mathrm{Ai}(h) + C_2 \mathrm{Bi}(h) - \\ &- \frac{\pi \sin^2\theta}{2\kappa^2} \mathrm{Bi}(h) \mathrm{Ai}(0) + \frac{\pi \sin^2\theta}{2\kappa^2} \mathrm{Ai}(h) \mathrm{Bi}(0) - \frac{\pi h \sin^2\theta}{2\kappa^2} \exp(-i\kappa h). \end{aligned} \tag{23}$$

Чтобы при бóльших положительных h величина E_3 не обращалась в бесконечность, необходимо положить

$$C_2 = \frac{\pi \sin^2\theta}{2\kappa^2} \mathrm{Ai}(0). \tag{24}$$

Условие же на постоянную C_1, которое следует из условия излучения для второй моды, из выражения для E_3 получить нельзя, т. к. эта величина не описывает вторую моду. Для отыскания этого условия введём величину E_2 согласно соотношению

$$E_2 = E_3 + \frac{\pi h \sin^2\theta}{2\,(h + \kappa^2)} \exp(-i\kappa h). \tag{25}$$

Используя уравнение (20) для E_3, нетрудно убедиться, что при достаточно бóльших $|h|$, но всё ещё в области применимости уравнения (20), а именно $1/\kappa \ll |h| \ll \kappa^2$, величина E_2 удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 E_2}{\partial h^2} - h E_2 = 0, \tag{26}$$

т. е. действительно описывает вторую моду колебаний. Из (23), (24) и (25) тогда получим

$$E_2 = \left[C_1 + \frac{\pi \sin^2\theta}{2\kappa^2} \mathrm{Bi}(0) \right] \mathrm{Ai}(h). \tag{27}$$

При достаточно больши́х по абсолютной величине отрицательных h выражение (27) описывает две волны с одинаковой амплитудой, бегущих в разных направлениях, в то время как в этой области может существовать только волна, бегущая от Земли, т. е. в отрицательном направлении оси h. Поэтому амплитуды этих волн, а с ними и поле E_2, соответствующее второй волновой моде, равны нулю. Что же касается величины E_3, то она, как мы видим, представляет собой малую добавку к первой волновой моде.

4. ЛИНЕЙНАЯ ТРАНСФОРМАЦИЯ МОД

Вернёмся к системе уравнений (8) и связанному с ней дисперсионному уравнению (10). При заданной частоте волны последнее уравнение определяет два возможных значения волнового вектора k как функции координаты h. Отсюда следует хорошо известный результат [13], что в области, где два значения волнового вектора сливаются, т. е. величина D (11) обращается в ноль, нарушается приближение ВКБ, поскольку в этой области $\mathrm{d}k/\mathrm{d}h \to \infty$. В этой области становится возможна линейная трансформация мод [14], и для описания этого процесса необходимо использовать волновой подход.

Линейная трансформация альвеновских и магнитозвуковых волн при квазипродольном распространении исследована в работе [15] методом последовательных приближений. Случай же вертикального распространения под произвольным углом к внешнему магнитному полю рассмотрен в работе [16], где задача о линейном взаимодействии волн в ионосферной плазме, содержащей несколько сортов ионов, исследована методом фазовых интегралов применительно к теории формирования ионных свистов. Использованный автором [16] подход основан на аналитическом продолжении ВКБ-решения в комплексную плоскость с обходом области тех действительных значений координат, где приближение ВКБ неприменимо. В данном разделе мы решаем ту же задачу, используя численные методы и профили концентрации ионов из указанной выше модели IRI. Как мы увидим, численное решение этой задачи, также как и её аналитическое решение, несколько нетривиально. Сравнение наших результатов с результатами работы [16] приведено в конце раздела.

Рассмотрим задачу о трансформации волн в следующей постановке. Будем считать, что во всей рассматриваемой области оба значения N_1 и N_2 показателя преломления удовлетворяют следующим условиям: $\mathrm{Re}\,N \gg 1$, $\mathrm{Re}\,N \gg \mathrm{Im}\,N$. Тогда вне области трансформации, где два значения N не близки, мы можем говорить о двух слабо затухающих распространяющихся модах, которые мы будем называть p- и s-модами. Эти моды отличаются значениями волнового числа и поляризации, причём p-мода имеет больший по абсолютной величине показатель преломления.

Как известно из общей теории волн в холодной магнитоактивной плазме [9], в плоскости x, y волны имеют эллиптическую поляризацию. Если записать соотношение между компонентами поля E_x и E_y в виде

$$E_y = aE_x \equiv i\beta E_x, \tag{28}$$

то случай $\mathrm{Re}\,\beta > 0$ отвечает правой поляризации, а $\mathrm{Re}\,\beta < 0$ — левой. Из второго уравнения (8) следует, что

$$\beta = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 - N^2}\,,$$

где N^2 — квадрат показатель преломления соответствующей моды (хотя поляризацию волны удобно определять через коэффициент β, в большинстве дальнейших соотношений более удобно использовать величину $a = i\beta$). Будем отмечать индексами p и s соответствующие показатели преломления, волновые числа и поляризационные коэффициенты для этих мод.

Будем считать, что на достаточно большом расстоянии перед и за областью трансформации параметры плазмы изменяются очень медленно, так что там можно пренебречь отражением волн, которое в волновом приближении имеет место в более широкой области, чем область трансформации. В дальнейшем область, где существенны отражения и которая включает область трансформации, будем для краткости называть неоднородной областью.

Вне области трансформации поле представляет собой сумму слабо затухающих p- и s-волн, распространяющихся, вообще говоря, вверх и вниз. Поскольку волновые векторы и поляризационные коэффициенты для этих волн известны, то разложение поля по этим волнам полностью определяется комплексными значениями их x-компонент $E_{x\mathrm{p}\uparrow}, E_{x\mathrm{p}\downarrow}, E_{x\mathrm{s}\uparrow}, E_{x\mathrm{s}\downarrow}$ полей, которые могут быть найдены из системы алгебраических уравнений по данным значениям компонент поля и их производных:

$$\begin{aligned} E_x &= E_{x\mathrm{p}\uparrow} + E_{x\mathrm{p}\downarrow} + E_{x\mathrm{s}\uparrow} + E_{x\mathrm{s}\downarrow}, \\ E_y &= a_\mathrm{p} E_{x\mathrm{p}\uparrow} + a_\mathrm{p} E_{x\mathrm{p}\downarrow} + a_\mathrm{s} E_{x\mathrm{s}\uparrow} + a_\mathrm{s} E_{x\mathrm{s}\downarrow}, \\ \frac{\mathrm{d}E_x}{\mathrm{d}h} &= ik_\mathrm{p} E_{x\mathrm{p}\uparrow} - ik_\mathrm{p} E_{x\mathrm{p}\downarrow} + ik_\mathrm{s} E_{x\mathrm{s}\uparrow} - ik_\mathrm{s} E_{x\mathrm{s}\downarrow}, \\ \frac{\mathrm{d}E_y}{\mathrm{d}h} &= ik_\mathrm{p} a_\mathrm{p} E_{x\mathrm{p}\uparrow} - ik_\mathrm{p} a_\mathrm{p} E_{x\mathrm{p}\downarrow} + ik_\mathrm{s} a_\mathrm{s} E_{x\mathrm{s}\uparrow} - ik_\mathrm{s} a_\mathrm{s} E_{x\mathrm{s}\downarrow}, \end{aligned} \tag{29}$$

где индексы $\uparrow$ и $\downarrow$ соответствуют распространению волны вверх и вниз. Рассмотрим, например, задачу о трансформации волн при падении на неоднородную область p-волны. Будем для определённости считать, что эта волна распространяется в положительном направлении h, отвечающем направлению снизу вверх, что для выбранной ранее геометрии (см. (7)) соответствует Южному геомагнитному полушарию, и положим $h = 0$ на нижней границе неоднородной области.

Для решения системы (8), описывающей трансформацию волн, необходимо задать четыре граничных условия: значения полей E_x и E_y и их первых производных по h на одной из границ неоднородной области. При этом в силу линейности уравнений одну из этих величин можно задать произвольно. Остальные же граничные условия следуют из принципа излучения и определяются рассматриваемой задачей. В частности, при падении на неоднородную область p-волны на верхней границе этой области поле представляет собой две убегающие волны, в то время как волны, распространяющиеся в противоположном направлении, отсутствуют. На нижней же границе неоднородной области, т. е. при $h = 0$, помимо падающей p-волны существуют отражённые p- и s-волны, в то время как падающая s-волна отсутствует.

При учёте столкновений квадраты показателей преломления для обеих мод имеют положительную мнимую часть, что приводит к наличию решений системы (8), экспоненциально нарастающих с увеличением h. Чтобы исключить эти решения, которые не имеют физического смысла, систему уравнений (8) следует интегрировать сверху вниз, задавая граничные условия на верхней границе неоднородной области. Это можно понять на простейшем примере уравнения

$$\frac{\mathrm{d}^2 E}{\mathrm{d}h^2} + q^2 E = 0,$$

где постоянная комплексная величина равна $q = q_1 + iq_2$, причём $q_2 > 0$. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$E = c_1 \exp(iqh) + c_2 \exp(-iqh),$$

и нас интересует решение с $c_2 = 0$, которое не содержит экспоненциально нарастающей с увеличением координаты h компоненты. Это решение при $h = 0$ удовлетворяет следующим граничным условиям: $E = c_1$ и $\mathrm{d}E/\mathrm{d}h = iqc_1$. Решение, которое удовлетворяет граничным условиям $E = c_1\,(1+\delta)$ и $\mathrm{d}E/\mathrm{d}h = iqc_1$, где $\delta \ll 1$, и имеет вид

$$E = c_1(1+\delta/2)\exp(iqh) + c_1\delta/2\exp(-iqh),$$

содержит экспоненциально нарастающий член, пропорциональный $\exp(-iqh)$, и очень быстро отклоняется от интересующего нас решения. Поскольку при численном интегрировании уравнений абсолютно точное задание граничных условий невозможно, выбор этих условий на нижней границе области интегрирования приводит к неустойчивому решению.

На верхней же границе области, скажем при $h = h_{\mathrm{m}} > 0$, интересующее нас решение удовлетворяет граничным условиям $E = c_1\exp(iqh_{\mathrm{m}})$ и $\mathrm{d}E/\,\mathrm{d}h = iqc_1\exp(iqh_{\mathrm{m}})$, а решение, удовлетворяющее граничным условиям $E = c_1\,(1+\delta)\exp(iqh_{\mathrm{m}})$ и $\mathrm{d}E/\mathrm{d}h = iqc_1\exp(iqh_{\mathrm{m}})$, где $\delta \ll 1$, имеет вид

$$E = c_1(1+\delta/2)\exp(iqh) + (c_1\delta/2)\,\exp[iq\,(2h_{\mathrm{m}} - h)]$$

и во всей интересующей нас области мало отличается от искомого решения. Аналогично и систему (8) при наличии столкновений следует интегрировать сверху вниз, задавая граничные условия на верхней границе области.

Для отыскания решения, отвечающего сформулированным выше условиям, поступим следующим образом. Зададим сначала на верхней границе неоднородной области одну убегающую p-волну с $E_x = 1$. Поскольку компонента E_y связана с компонентой E_x поляризационным коэффициентом ($E_y = a_{\mathrm{p}}E_x$), а производные компонент поля связаны с самими этими компонентами соотношениями $\mathrm{d}E_x/\,\mathrm{d}h = ik_{\mathrm{p}}E_x$ и $\mathrm{d}E_y/\,\mathrm{d}h = ik_{\mathrm{p}}E_y$, причём волновое число и поляризационный коэффициент на верхней границе известны, то граничные условия оказываются полностью заданными. Это даёт возможность рассчитать поле на нижней границе неоднородной области. Это поле, вообще говоря, содержит как падающие, так и отражённые волны обеих мод, определяемые системой (29) по значениям полей E_x, E_y и их производных при $h = 0$, в том числе и падающую s-волну с амплитудой α_1, которой в рассматриваемой задаче о падении p-волны быть не должно. Зададим теперь на верхней границе неоднородной области одну убегающую s-волну также с $E_x = 1$ и снова рассчитаем поле на нижней границе неоднородной области. Это поле тоже будет содержать падающую s-волну с амплитудой α_2. В силу линейности уравнений любая линейная комбинация полученных двух решений также является решением. Очевидно, что линейная комбинация этих решений с коэффициентами 1 и $(-\alpha_1/\alpha_2)$ уже не содержит падающей s-волны и, следовательно, является искомым решением. Совершенно аналогично решается задача о падении на неоднородную область s-волны.

Прежде чем переходить к результатам расчётов, укажем, что из системы уравнений (8) следует соотношение

$$\frac{\mathrm{d}\Pi_h}{\mathrm{d}h} = -\frac{\omega^2}{c^2}\,\varepsilon_1''(|E_x|^2 + |E_y|^2) - 2\,\frac{\omega^2}{c^2}\,\varepsilon_2''\mathrm{Im}(E_xE_y^*), \tag{30}$$

где

$$\Pi_h = \mathrm{Re}\left[i\left(E_x\,\frac{\mathrm{d}E_x^*}{\mathrm{d}h}\cos^2\theta + E_y\,\frac{\mathrm{d}E_y^*}{\mathrm{d}h}\right)\right], \tag{31}$$

и индексы $''$ и * означают мнимую часть и комплексное сопряжение соответственно. Величина Π_h с точностью до коэффициента равна h-компоненте вектора Пойнтинга, так что соотношение (30) представляет собой закон сохранения энергии. Очевидно, что в случае $\varepsilon_1'' = \varepsilon_2'' = 0$, т. е. в отсутствие столкновений, величина Π_h сохраняется. Указанный закон сохранения использовался для контроля точности расчётов. Отметим, что входящие в (30) и (31) величины E_x и E_y представляют собой компоненты полного поля (т. е. поля обеих мод). Можно показать, что за неоднородной областью, где электромагнитное поле представляет собой сумму убегающих p- и s-волн с действительными волновыми векторами $k_{\rm p}$ и $k_{\rm s}$, $\Pi_h = \Pi_{{\rm p}h} + \Pi_{{\rm s}h}$, где величины $\Pi_{{\rm p}h}$ и $\Pi_{{\rm s}h}$ определяются соотношением (31) с соответствующими значениями компонент поля.

Перейдём теперь к определению коэффициента трансформации. Будем для определённости говорить о коэффициенте трансформации $T_{\rm p\to s}$ p-моды в s-моду при падении на неоднородную область p-волны. Поскольку уменьшение потока энергии, падающего на неоднородную область, связано не только с частичным отражением и трансформацией волны, но и с её затуханием, коэффициент трансформации разумно определить как отношение потока энергии в уходящей s-волне к полному потоку энергии в том же направлении на выходе (индекс out) из области трансформации:

$$T_{\rm p\to s} = \Pi_{{\rm s}h}^{\rm out} \Big/ \Pi_h^{\rm out}.$$

Ясно, что данное определение не учитывает отражений волн в области трансформации.

Поскольку после выхода из области трансформации волны продолжают затухать и частично отражаться, для количественной характеристики коэффициента трансформации следует точно определить понятие границы этой области. Определим эту границу как высоту, после которой полный вектор Пойнтинга равен сумме векторов Пойнтинга в p- и s-волнах, распространяющихся в обоих направлениях, и соотношение (30) выполняется с заданной точностью для каждой из волн в отдельности. Под заданной точностью будем понимать выполнение соотношения (30) с точностью до 5 % по сравнению с характерной величиной ${\rm d}\Pi_{{\rm s}h}/{\rm d}h$ в области трансформации, которая определяется как отношение максимальной компоненты вектора Пойнтинга $\Pi_{sh_{\rm max}}$ в s-моде к удвоенному расстоянию между высотой $\mathcal{H}(\Pi_{{\rm s}h} = \Pi_{sh_{\rm max}})$, где достигается это максимальное значение, и высотой $\mathcal{H}(\Pi_{{\rm s}h} = \Pi_{sh_{\rm max}}/2)$, где достигается половина этого значения. Аналогично определяется коэффициент трансформации s-моды в p-моду:

$$T_{\rm s\to p} = \Pi_{{\rm p}h}^{\rm out} \Big/ \Pi_h^{\rm out} .$$

Численное решение системы уравнений (8) следует проводить в диапазоне высот, где существуют две распространяющиеся моды и который включает область трансформации. В качестве нижней границы этого диапазона высот мы выбрали границу области применимости аналитического решения для поля в месте рождения новой моды (19). Для решения системы (8) требуется задать угол распространения θ и величины ε_1 и ε_2 (см. (4)), которые являются функциями плазменных частот всех сортов частиц $\omega_{{\rm p}s}$ ($\omega_{{\rm p}s}^2 = 4\pi e^2 n_s/m_s$, где n_s и m_s — концентрация и масса частиц сорта s соответственно), частот столкновений этих частиц с другими частицами ν_s (как заряженными, так и нейтральными) и циклотронных частот ω_{Hs}. Как было отмечено во введении, в качестве профилей концентраций мы взяли значения, даваемые моделью IRI-2007 для минимума солнечной активности (лето 2007 года), полуночи на нулевом меридиане и низких широт (около 20° северной геомагнитной широты).

На рис. 3*а* изображены профили концентраций электронов и ионов, получаемые по данной модели и использованные в наших расчётах. Частоты столкновений каждого сорта заряженных частиц с другими частицами были вычислены по формулам, приведённым в работе [17] (см. в этой работе формулы (4.143)–(4.146), (4.151) и табл. 4.3–4.6). Профили температуры и концентрации нейтральных частиц, требуемые для расчёта частот столкновений, были взяты из модели MSIS-E-90 [18] для того же времени и места, что и профили концентраций заряженных частиц. Рассчитанные частоты столкновений показаны на рис. 3*б*. Волны в наших расчётах распространяются вертикально. При этом задаётся начальная геомагнитная широта и вычисляются величина и направление магнитного поля Земли на её поверхности согласно дипольной модели. Поскольку

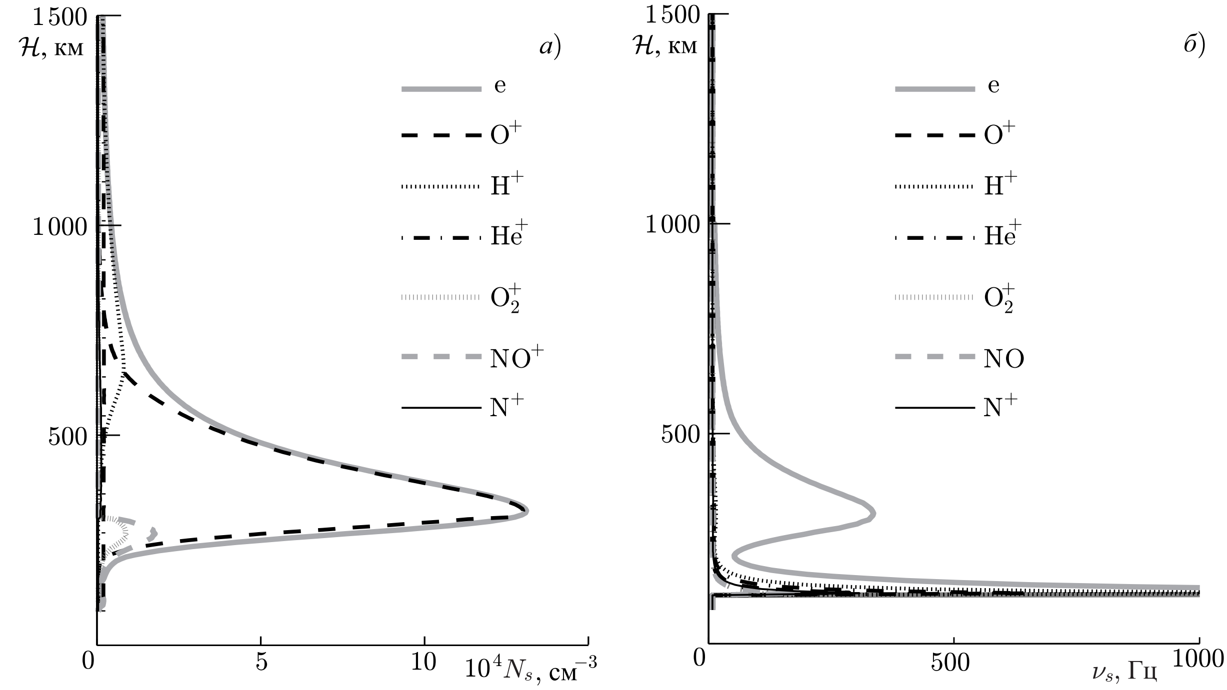

Рис. 3. Высотные профили концентраций электронов и ионов, взятый из модели IRI-2007 (*а*), и высотный профиль частот столкновений электронов и ионов с другими частицами (*б*). Серая и чёрная сплошные линии соответствует электронам и ионам N^+, серая и чёрная штриховые — ионам NO^+ и O^+, серая и чёрная пунктирные — ионам ${O^+}_2$ и H^+, штрихпунктирная — ионам He^+

диапазон высот в нашей задаче мал, мы считаем, что геомагнитное поле не изменяется с высотой, а зависит только от широты.

На рис. 4 представлены результаты численного решения системы уравнений (8) с учётом столкновений для волн с частотой 420 Гц и начальной геомагнитной широтой 50° в p-моде (рис. 4*а*, *в*, *д*) и s-моде (рис. 4*б*, *г*, *е*). Данная начальная широта соответствует углу распространения $\theta \approx 23°$. На рис. 4*а*, *б* и рис. 4*в*, *г* изображены компоненты E_x и E_y электрического поля соответственно, а на рис. 4*д*, *е* приведены векторы Пойнтинга: полный (линия *1*), p-моды (*2*) и s-моды (*3*). Вплоть до высот порядка 800 км решение представляет собой гармонические колебания, что соответствует распространению одной волны. Выше 800 км колебания поля превращаются в биения, что говорит о наличии двух распространяющихся мод с различными волновыми числами. Полный вектор Пойнтинга не сохраняется, однако ввиду малости частот столкновений на данных высотах (а значит, и мнимых частей ε_1'' и ε_2''), он изменяется незначительно (см. закон сохранения энергии (30)). Затемнённые участки на рис. 4 соответствуют области трансформации. При выходе из этой области вектор Пойнтинга представляет собой сумму двух ненулевых компонент $\Pi_{\mathrm{p}h}$ и $\Pi_{\mathrm{s}h}$, соответствующих p- и s-модам. В области трансформации, вообще говоря, некорректно раскладывать поле на волновые моды. Однако формально можно определить величины $\Pi_{\mathrm{p}h}$ и $\Pi_{\mathrm{s}h}$, подставив в формулу (31) поля соответствующих мод. Полученные зависимости изображены на рис. 4 штриховыми линиями в области трансформации и сплошными — вне этой области. Их поведение показывает, что наибольшее изменение величины $\Pi_{\mathrm{p}h}$ и $\Pi_{\mathrm{s}h}$ испытывают, как и ожидалось, внутри области трансформации. На выходе из этой области происходят небольшие затухающие с высотой колебания величин $\Pi_{\mathrm{p}h}$ и $\Pi_{\mathrm{s}h}$ в противофазе. Без учёта столкновений эти величины вышли бы на постоянные значения, что указывало бы на то, что взаимодействие двух мод прекратилось. Учёт же столкновений приводит к затуханию векторов Пойнтинга для p- и s-мод.

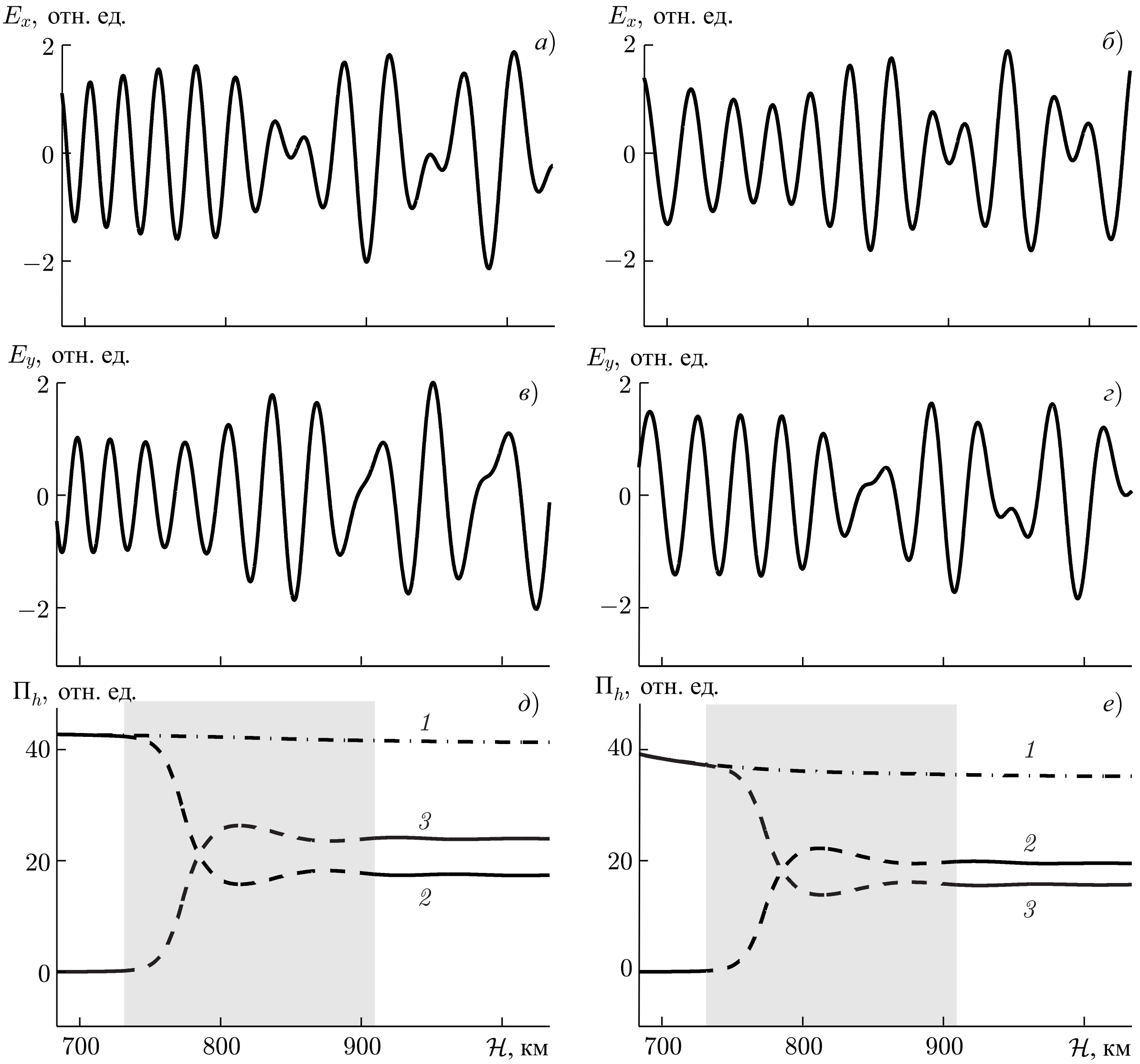

Рис. 4. Результат расчёта полей при падении на неоднородную область p-моды (левый столбец) и s-моды (правый столбец) с учётом столкновений. На панелях *а*, *б* и *в*, *г* показаны высотные зависимости x- и y-компонент электрического поля соответственно. На панелях *д* и *е* показаны высотные зависимости векторов Пойнтинга: полного Π_h (линия *1*), p-моды $\Pi_{\mathrm{p}h}$ (*2*) и s-моды $\Pi_{\mathrm{s}h}$ (*3*). Затемнённые участки отвечают области трансформации

На рис. 5 изображены мнимые части волновых чисел для волн с частотой 420 Гц и углом $\theta \approx 23^\circ$, распространяющихся в p-моде (чёрная линия) и s-моде (серая линия). Из этого рисунка видно, что выше области трансформации мнимая часть волнового числа (а значит, и пространственное затухание поля) для p-моды больше, чем для s-моды. Ниже области трансформации это соотношение противоположное. Заметим, что в области трансформации, наряду с изменением мнимой части волнового числа, изменяется и поляризация волн. При этом оказывается, что волна левой поляризации во всём диапазоне высот затухает сильнее, чем волна правой поляризации. Покажем, каким образом это влияет на коэффициенты трансформации. Пусть $T^{(0)}_{\mathrm{p}\to\mathrm{s}}$ — коэффициент трансформации p-моды в s-моду, определённый при h_0 выше области трансформации:

$$T^{(0)}_{\mathrm{p}\to\mathrm{s}} = \frac{\Pi^{(0)}_{\mathrm{s}h}}{\Pi^{(0)}_{\mathrm{h}}} \equiv \frac{\Pi^{(0)}_{\mathrm{s}h}}{\Pi^{(0)}_{\mathrm{s}h} + \Pi^{(0)}_{\mathrm{p}h}}\,,$$

где $\Pi^{(0)}_{\mathrm{s}h}$ и $\Pi^{(0)}_{\mathrm{p}h}$ – величины векторов Пойнтинга s- и p-мод соответственно при $h = h_0$. Тогда при $h = h_0 + \Delta h$ векторы Пойнтинга имеют величины $\Pi_{\mathrm{s}h} = \Pi^{(0)}_{\mathrm{s}h} - \Delta\Pi_{\mathrm{s}h}$ и $\Pi_{\mathrm{p}h} = \Pi^{(0)}_{\mathrm{p}h} - \Delta\Pi_{\mathrm{p}h}$, где $\{\Delta\Pi_{\mathrm{s}h}, \Delta\Pi_{\mathrm{p}h}\} > 0$. Коэффициент трансформации при некотором h равен

$$T_{\mathrm{p}\to\mathrm{s}} \approx T^{(0)}_{\mathrm{p}\to\mathrm{s}} + \frac{\Pi^{(0)}_{\mathrm{s}h}\Delta\Pi_{\mathrm{p}h} - \Pi^{(0)}_{\mathrm{p}h}\Delta\Pi_{\mathrm{s}h}}{(\Pi^{(0)}_{h})^2}\,.$$

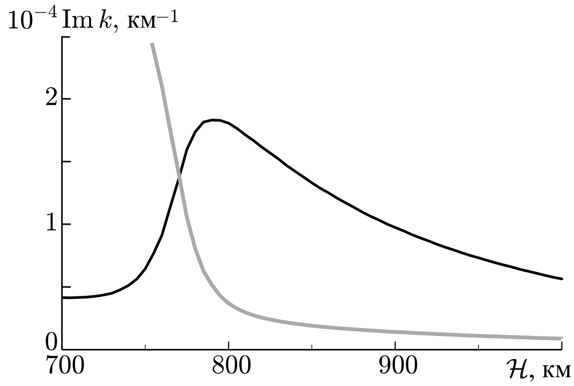

Рис. 5. Мнимые части волновых чисел для волн с частотой 420 Гц и углом $\theta \approx 23°$, распространяющихся в p-моде (чёрная линия) и s-моде (серая линия)

Поскольку затухание p-моды больше, чем затухание s-моды, т. е. $\Delta\Pi_{\mathrm{p}h}/\Pi^{(0)}_{\mathrm{p}h} > \Delta\Pi_{\mathrm{s}h}/\Pi^{(0)}_{\mathrm{s}h}$, то $T_{\mathrm{p}\to\mathrm{s}} > T^{(0)}_{\mathrm{p}\to\mathrm{s}}$. Аналогично

$$T_{\mathrm{s}\to\mathrm{p}} \approx T^{(0)}_{\mathrm{s}\to\mathrm{p}} + \frac{\Pi^{(0)}_{\mathrm{p}h}\Delta\Pi_{\mathrm{s}h} - \Pi^{(0)}_{\mathrm{s}h}\Delta\Pi_{\mathrm{p}h}}{(\Pi^{(0)}_{h})^2}$$

и $T_{\mathrm{s}\to\mathrm{p}} < T^{(0)}_{\mathrm{s}\to\mathrm{p}}$. Таким образом, коэффициенты трансформации зависят от выбора высоты, на которой их определили, и с учётом столкновений величина $T_{\mathrm{p}\to\mathrm{s}}$ при прочих равных условиях больше, чем $T_{\mathrm{s}\to\mathrm{p}}$.

На рис. 6 изображены зависимости коэффициентов трансформации $T_{\mathrm{p}\to\mathrm{s}}$ (рис. 6*а*–*в*) и $T_{\mathrm{s}\to\mathrm{p}}$ (рис. 6*г*–*е*) от частоты волны для различных углов распространения без учёта столкновений (рис. 6*а*, *г*), с учётом столкновений (рис. 6*б*, *д*) и с учётом столкновений, частота которых увеличена в 7 раз (рис. 6*в*, *е*). Из этого рисунка видно, что оба коэффициента трансформации зависят главным образом от угла распространения (иначе говоря, от начальной геомагнитной широты) и слабо зависят от частоты, за исключением малых частот (около 250 Гц), где коэффициенты трансформации падают до нуля, и больши́х частот (около 500 Гц), где коэффициенты трансформации возрастают. Без учёта столкновений эти коэффициенты оказываются равными. С учётом столкновений значения $T_{\mathrm{p}\to\mathrm{s}}$ ($T_{\mathrm{s}\to\mathrm{p}}$) оказываются больше (меньше) по сравнению с бесстолкновительным случаем. При увеличении частот столкновений в 7 раз этот эффект проявляется сильнее, особенно при больши́х частотах волн (порядка 500 Гц).

Полученные в данном разделе зависимости коэффициентов трансформации от параметров задачи включают и те, которые исследовались ранее в работе [16]. Хотя соответствующие результаты качественно совпадают, интерпретация этих результатов различна. Автор [16] считает трансформацией переход энергии правополяризованной (R) волны как в R-волну, так и в левополяризованную L-волну. Однако как мы видели выше (см. рис. 1), поляризация волны, принадлежащей одной моде, изменяется с высотой, что не является трансформацией мод. Трансформацией же мод является процесс, при котором исходная волна, имеющая до области трансфомации определённую поляризацию, возбуждает волну той же поляризации, но принадлежащей другой волновой моде; при этом поляризация исходной волны за областью трансформации изменяется на противоположную. Заметим, что в области трансформации поляризации волн, принадлежащих обеим модам, близки к линейным.

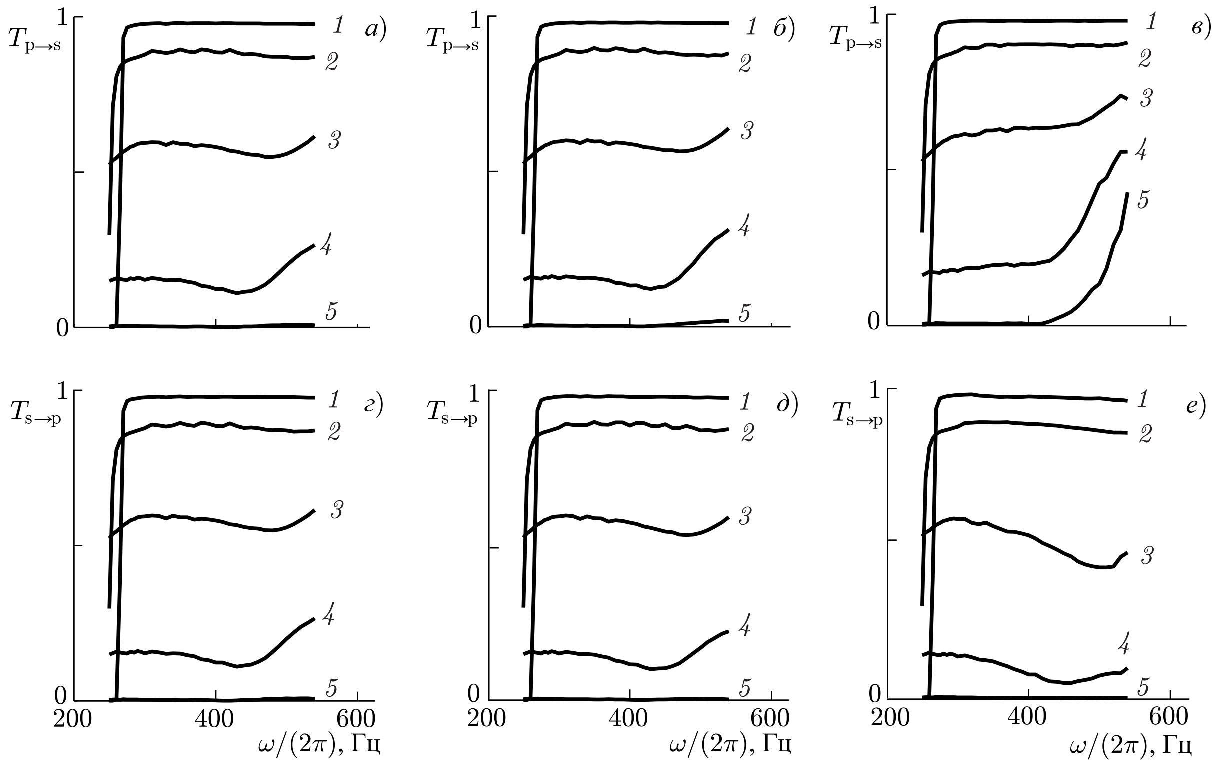

Рис. 6. Коэффициенты трансформации p-моды в s-моду (*а—в*) и s-моды в p-моду (*г—е*) как функции частоты для различных углов распространения θ: $\theta = 10°$ (линии *1*), $16°$ (*2*), $23°$ (*3*), $31°$ (*4*) и $41°$ (*5*). Этим углам соответствуют начальные геомагнитные широты $\lambda = 70°$, $60°$, $50°$, $40°$ и $30°$. Графики в левом столбце построены без учёта столкновений, в среднем – с учётом столкновений, в правом — с учётом столкновений, частота которых увеличена в 7 раз

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе исследованы два волновых эффекта, возникающих при распространении ионно-циклотронных волн в верхней ионосфере и связанных с изменением концентрации и ионного состава плазмы с высотой. Во-первых, показано, что при распространении в плазме ионно-циклотронной волны на заданной частоте через область, где возникает вторая распространяющаяся мода на той же частоте, не происходит вынужденной трансформации волн. Во-вторых, исследовано влияние столкновений на линейную трансформацию ионно-циклотронных волн в области, где их показатели преломления сближаются. Показано, что в отсутствие столкновений коэффициенты трансформации $T_{\mathrm{p}\to\mathrm{s}}$ и $T_{\mathrm{s}\to\mathrm{p}}$ равны. Коэффициент трансформации существенно зависит от угла распространения θ, который в предположении вертикального начального распространения является однозначной функцией геомагнитной широты. Конкретно, коэффициент трансформации возрастает с уменьшением угла θ. Зависимость коэффициента трансформации от частоты оказывается слабой, за исключением бóльших (около 500 Гц) и малых (около 250 Гц) частот. Коэффициент трансформации зависит от выбора высоты, где он вычисляется: с ростом высоты он испытывает слабые затухающие колебания.

Наибольший интерес представляет влияние столкновений на трансформацию волн. При учёте столкновений коэффициенты трансформации $T_{\mathrm{p}\to\mathrm{s}}$ и $T_{\mathrm{s}\to\mathrm{p}}$ становятся различными, причём величина $T_{\mathrm{p}\to\mathrm{s}}$ возрастает по сравнению с бесстолкновительным случаем, а $T_{\mathrm{s}\to\mathrm{p}}$, напротив, убывает, так что при учёте столкновений $T_{\mathrm{p}\to\mathrm{s}} > T_{\mathrm{s}\to\mathrm{p}}$. При увеличении частоты столкновений этот эффект усиливается, особенно для бóльших частот (около 500 Гц). При этом коэффициент трансформации зависит от высоты, на которой он вычисляется, т. к. более быстрое затухание p-моды по сравнению с s-модой приводит к кажущемуся росту коэффициента $T_{\mathrm{p}\to\mathrm{s}}$ и уменьшению $T_{\mathrm{s}\to\mathrm{p}}$. При учёте столкновений, как и в бесстолкновительном случае, оба коэффициента значительно возрастают с ростом широты.

Авторы выражают благодарность И. В. Кузичеву за полезные обсуждения. Работа выполнена в рамках Программы РАН I.7П и при поддержке РФФИ (проект 16–02–00079).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gurnett D. A., Shawhan S. D., Brice N. M., Smith R. L. // J. Geophys. Res. 1965. V. 70, No. 7. P. 1 665.
2. Shklyar D. R., Storey L. R. O., Chum J., et al. // J. Geophys. Res. 2012. V. 117. Art no. A12206.
3. http://omniweb.gsfc.nasa.gov/vitmo/iri_vitmo.html
4. Smith R. L., Brice N. M., Katsufrakis J. // Nature. 1964. V. 204, No. 4 955. P. 274.
5. Jones D. // J. Atmosph. Terr. Phys. 1969. V. 31. P. 971.
6. Likhter Ya. I., Sobolev Ya. P., Jiricek F., Triska P. // Space Res. 1974. V. 14. Berlin: Akademie-Verlag. P. 265.
7. Bošková J., Jiříček F., Tříska P. // Space Res. 1976. V. 16. Berlin: Akademie-Verlag. P. 435.
8. Watanabe S., Ondoh T. // J. Atmosph. Terr. Phys. 1980. V. 42. P. 427.
9. Гинзбург В. Л., Рухадзе А. А. Волны в магнитоактивной плазме. М.: Наука, 1975. 256 с.
10. Helliwell R. A. Whistlers and related ionospheric phenomena. Stanford, California: Stanford University Press, 1965. 349 p.
11. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 144 с.
12. Эрдейи А. Асимптотические разложения. М.: Гос. изд-во физико-математической литературы, 1962. 127 с.
13. Заславский Г. М., Мейтлис В. П., Филоненко Н. Н. Взаимодействие волн в неоднородных средах. Новосибирск: Наука, 1982. 177 с.
14. Ерохин Н. С., Моисеев С. С. // Вопросы теории плазмы. М.: Атомиздат, 1973. Вып. 7. С. 146.
15. Будько Н. И., Рябов Б. С. // Геомагнетизм и аэрономия. 1977. Т. 17. С. 751.
16. Беллюстин Н. С. // Изв. вузов. Радиофизика. 1978. Т. 21, № 4. С. 487.
17. Schunk R. W., Nagy A. F. Ionospheres physics, plasma physics and chemistry. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2000. 554 p.
18. http://omniweb.gsfc.nasa.gov/vitmo/msis_vitmo.html

Поступила в редакцию 21 августа 2015 г.; принята в печать 25 декабря 2015 г.

WAVE EFFECTS CONNECTED WITH ALTITUDE VARIATIONS IN THE ION COMPOSITION OF THE IONOSPHERE

D. I. Vavilov and D. R. Shklyar

Properties of the waves, which can propagate in magnetized plasma in the frequency range below the proton gyrofrequency, depend strongly on the ion composition of the plasma. Addition of a new sort of ions leads to appearance of a new resonance frequency, at which the refractive index becomes infinite, and a new cutoff frequency, at which the refractive index becomes zero. In this case, the topology of

frequency dependence of the squared refractive index changes. Specifically, a new oscillation branch appears, which is located above the cutoff frequency. A question arises whether these oscillations are excited, if radiation with the corresponding frequency, which propagates in a different mode, is present in the plasma. A linear transformation of the waves is another important effect, which is related to variations in the ion plasma composition. These two issues, which are directly related to the theory of formation of proton whistlers in the ionospheres, where the ion composition varies with altitude, are considered in this work.