

УДК 621.382.082

## ОБОБЩЁННАЯ ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ УСТРОЙСТВ С РАСПРЕДЕЛЁННОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ НА ПОВЕРХНОСТНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛНАХ

*Б. В. Сवेशников*<sup>1\*</sup>, *А. С. Багдасарян*<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Центр физических исследований им. П. Н. Лебедева;

<sup>2</sup> Институт радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, г. Москва, Россия

Разработана самосогласованная физическая модель, увеличивающая точность расчёта характеристик устройств на основе как чисто поверхностных, так псевдоповерхностных акустических волн. Модель свободна от ограничений, присущих хорошо известному методу связанных мод и другим феноменологическим методам исследования распределённых систем. С помощью аналитического решения разностных уравнений получены компактные соотношения, описывающие все характеристики акустоэлектрических преобразователей любого типа с учётом возможной направленности их излучения и распределённой диссипации. Указан способ определения пространственной ориентации эллипса упругой поляризации в анизотропном кристалле, позволяющий однозначно вычислять фазовый сдвиг между колебаниями двух связанных динамических подсистем: упругих смещений и сопутствующего им электрического поля. Полученные результаты, значительно облегчающие задачу быстрого и точного проектирования разнообразных устройств на основе поверхностных и псевдоповерхностных акустических волн, справедливы в общем случае для любой частоты, включая гармоники частоты основного акустического синхронизма.

### ВВЕДЕНИЕ

Самую высокую точность исследования характеристик встречно-штыревых преобразователей (ВШП) и отражательных решёток, знание которых необходимо для создания разнообразных устройств на поверхностных и псевдоповерхностных акустических волнах, способна обеспечить получившая в последнее время широкое распространение комбинация двух численных методов: метода конечных элементов и метода граничных элементов [1]. Однако подобный подход требует огромных вычислительных ресурсов, что делает его практически малопривлекательным при синтезе реальных (особенно волноводных) систем на основе многоэлектродных структур.

В то же время скорость необходимых вычислений существенно увеличивается за счёт использования приближённых, но весьма удобных и компактных феноменологических методов исследования распределённых систем на поверхностных акустических волнах, точность которых может стать вполне приемлемой для решения очень широкого круга задач.

Поскольку обычно пьезоэлектрические свойства твёрдотельных кристаллов выражены слабо, то для повышения эффективности акустоэлектрического преобразования любое устройство на поверхностных акустических волнах содержит целый ряд блоков, имеющих периодическую структуру. Аналитические выражения, описывающие подобные блоки, позволяют очень существенно сократить время вычислений в процессе оптимального синтеза архитектуры устройств в целом. В известных приближённых методах расчёта характеристик периодических распределённых систем в качестве входных феноменологических параметров используются получаемые заранее данные о скорости волны, величине коэффициента её отражения от периода системы, её замедления и затухания в рабочей области исследуемых устройств и эффективности акустоэлектрического преобразования. Эти параметры необходимо находить отдельно [2, 3] с целью их

\* bv.svesh@gmail.com

использования в качестве базы данных, которая учитывается при расчёте и оптимизации конкретных систем.

Множество моделей такого рода можно со значительной долей общности характеризовать принадлежностью к одному из трёх основных типов: методу эквивалентных схем, модели связанных мод («СОМ analysis» в англоязычной литературе), являющейся аналогом давно используемого в радиофизике метода усреднения [4], и дискретному описанию распределённых систем. Первый из этих методов связан с представлением периода ВШП в виде отрезка длинной линии, параметры сосредоточенных элементов которой определяются простой подгонкой при сравнении результатов моделирования и экспериментов. Основной недостаток такого подхода заключается в том, что номиналы элементов эквивалентных схем, которые необходимо уточнять в каждом конкретном случае, не имеют наглядного физического смысла.

В отличие от метода эквивалентных схем, метод связанных мод [5–8] основан на использовании в качестве входных параметров физически наглядных величин, которые относятся к периоду электродных структур и могут быть измерены каждый в отдельности. В англоязычной литературе для их обозначения обычно используют термин «СОМ parameters», но мы применяем ниже более адекватное контексту общего исследования название: ключевые феноменологические параметры (КФП).

В соответствии с концепцией теории возмущений, в методе связанных мод встречные волны, распространяющиеся в распределённой системе и испытывающие слабое рассеяние на каждой из периодических поверхностных неоднородностей, представляются в виде осциллирующих функций, амплитуды которых при распространении медленно меняются. Получаемые в итоге простые аналитические результаты могут привести к ясной физической интерпретации большинства эффектов, присущих периодическим системам с распределённой обратной связью. Однако указанные результаты справедливы, строго говоря, только вблизи основной частоты акустического синхронизма. При этом оставался неясным количественный критерий оценки предельной величины возмущений поверхностных граничных условий в многоэлектродных структурах, допустимой для эффективного описания их характеристик с помощью метода связанных мод. Такая оценка действительно необходима, например, при исследовании получивших за последнее десятилетие широкое распространение устройств на псевдоповерхностных волнах, для которых характерны довольно сильные возмущения граничных условий, а также дисперсионное затухание, связанное с заметным оттоком акустической энергии от поверхности кристалла (в дальнейшем с помощью аббревиатуры ПАВ будем обозначать устройства на основе и поверхностных, и псевдоповерхностных волн).

Важным достоинством дискретных моделей является лишённая всяческих ограничений возможность описания свойств ВШП и отражательных решёток на любой частоте (в том числе и на высших гармониках основной брэгговской частоты). В работах [9–11] была разработана свободная от основных недостатков метода связанных мод «модель отражательной решётки» (модель Моргана). Эта модель (применимая, строго говоря, только при отсутствии диссипации) позволяет непротворечно анализировать структуры, содержащие произвольное количество элементов, отражательная способность которых не ограничивается никакими предварительными условиями.

Однако с помощью модели Моргана можно получить аналитические решения только для коэффициентов отражения и прохождения короткозамкнутого преобразователя (т. е. элементов  $P_{11} = P_{22}$  и  $P_{12} = P_{21}$  так называемой  $P$ -матрицы, широко используемой в расчётах ВШП), в то время как элементы  $P_{31}$  и  $P_{13}$  этой матрицы получаются с помощью каскадирования элементарной матрицы одного периода решётки. Более того, реальная часть проводимости ВШП ( $\text{Re } P_{33}$ ) находилась в работах [9–11] (в отсутствие потерь) как нормированная мощность волн, излучаемых за пределы ВШП, а динамическая реактивность определялась потом с помощью

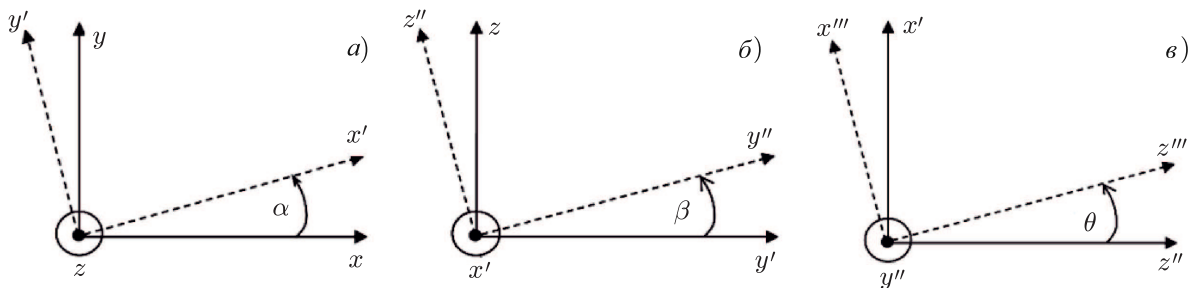


Рис. 1. Преобразование локальной системы координат: вектор упругих смещений волны описывает эллиптическую траекторию, главные оси которой совпадают с осями  $x'''$  и  $z'''$

преобразования Гильберта. Громоздкий характер такого рода манипуляций, естественно, значительно увеличивает время проводимых с их помощью вычислений, затрудняя оптимизацию характеристик ПАВ-устройств. Кроме того, представляется сомнительной возможность применения упомянутых результатов к анализу реальных диссипативных систем, в том числе широко используемых в современной радиоэлектронике устройств на псевдоповерхностных волнах. Ниже предлагается компактное решение поставленной Морганом задачи [9–11] с помощью оригинального дискретного анализа распределённых систем в самом общем виде.

## 1. О ВАЖНЫХ ОСОБЕННОСТЯХ РАСПРЕДЕЛЁННЫХ АКУСТОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Ключевыми феноменологическими параметрами, упрощающими моделирование устройств ПАВ, являются следующие локальные (относящиеся к периоду рассматриваемой распределённой структуры) характеристики: ёмкость одного периода ВШП  $C_1$ , средняя скорость волны в области периодических возмущений  $V_g$ , модуль коэффициента отражения волны от периода решётки  $r_0$ , логарифмический декремент затухания волны  $\gamma$ , коэффициент акустоэлектрического преобразования  $\chi$  (в пренебрежении краевыми эффектами количественно эта величина представляет собой отношение реальной части проводимости одного периода ВШП и её ёмкостной составляющей:  $\chi = \text{Re } y_1 / (\omega C_1)$ ) и фазовый параметр направленности излучения элементарной ячейки ВШП  $\phi$ . В общем случае перечисленные величины зависят как от технологических факторов (ориентации пьезокристаллической подложки, материала электродов, их относительной толщины, коэффициента металлизации и т. п.), так и от частоты [2, 3].

Необходимые дисперсионные «портреты» КФП, их зависимость от топологии электродных структур, а также от типа и кристаллической ориентации подложки, должны определяться предварительно с помощью дополнительных теоретических или экспериментальных исследований, выходящих за рамки данной статьи. Заметим лишь, что в работе [3] использован новый метод оценки величин КФП на основе сравнения результатов специальных тестовых вычислений, выполняемых с помощью метода конечных элементов, и результатов дискретного анализа распределённых систем. Полученная в результате аппроксимация КФП полиномиальными функциями нормированных параметров системы позволила уменьшить время расчёта импульсного отклика пассивной радиочастотной метки на шесть порядков по сравнению с основанной на комбинации метода конечных элементов и метода граничных элементов программой «FEMSAW» [3]. При этом было достигнуто очень хорошее совпадение результатов приближённого моделирования как с высокоточными расчётами «FEMSAW», так и с результатами проведённого впоследствии натурального эксперимента [12].

Анализируя свойства систем с распределённой обратной связью, обусловленной рассеянием

волн на периодических неоднородностях, следует, прежде всего, уточнять характеристики этого рассеяния. Нужно всегда определять, какую из описывающих волну величин мы рассматриваем, вводя понятия коэффициента отражения  $r$  и прохождения  $t$ , характеризующих взаимодействие плоской волны с локальной неоднородностью. Дело в том, поверхностная акустическая волна состоит из двух связанных динамических подсистем: упругих смещений  $u_j$ , характеризуемых вектором  $\mathbf{u}$ , и электрического поля с поверхностным потенциалом  $\Phi = |\Phi| \exp(i\psi_\Phi)$ . Между этими подсистемами имеется фазовое смещение  $\varphi_0$ , однозначное определение которого является специальной задачей, поскольку в общем случае все три проекции вектора  $\mathbf{u}$  на оси исходной декартовой системы координат имеют разные фазы. Комплексные величины проекций  $u_j = |u_j| \exp(i\psi_j)$ , где  $j = 1, 2, 3$  и потенциала  $\Phi$  могут быть с высокой точностью найдены численно с помощью известных коммерческих программ, основанных на строгом трёхмерном варианте метода конечных элементов.

Вектор  $\mathbf{u}$ , как и любой другой вектор, характеризующий гармонический волновой процесс произвольной природы, всегда описывает плоскую траекторию в виде эллипса [13] (линейная поляризация поперечных упругих волн — частный случай эллиптической поляризации). Для описания алгоритма определения его пространственной ориентации представим вектор упругих смещений в виде  $\mathbf{u} = \mathbf{U} \exp(-ikX + i\psi_3)$ , где

$$\mathbf{U} = |U_1| \exp(i\phi_1)\mathbf{x}_0 + |U_2| \exp(i\phi_2)\mathbf{y}_0 + |U_3| \mathbf{z}_0, \quad (1)$$

$\phi_1 = \psi_1 - \psi_3$ ,  $\phi_2 = \psi_2 - \psi_3$ , а  $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0$  — единичные векторы исходного декартового базиса. Ориентация вектора  $\mathbf{U}$  зависит как от типа кристаллической подложки, так и от поверхностных граничных условий в анализируемой области [14].

Продемонстрируем теперь, что путём максимум трёх преобразований исходной декартовой системы координат этот вектор можно представить как суперпозицию его проекций только на две ортогональные оси. Первое преобразование — поворот вокруг оси  $z$  на угол  $\alpha$  (см. рис. 1а) — описывается соотношениями

$$U'_1 = U_1 \cos \alpha + U_2 \sin \alpha, \quad U'_2 = U_2 \cos \alpha - U_1 \sin \alpha. \quad (2)$$

Поворот (2) совмещает ось  $x'$  с плоскостью поляризации, устраняя мнимую составляющую проекции вектора  $\mathbf{U}$ , на ось  $y'$  ( $\text{Im } U'_2 = 0$ ):

$$\alpha = \text{arctg} \left( \frac{|U_2| \sin \phi_2}{|U_1| \sin \phi_1} \right). \quad (3)$$

При этом проекции вектора  $\mathbf{U}$  на оси  $x'$  и  $y'$  находятся с помощью формул

$$U'_1 = |U_1| \cos \alpha \left[ \cos \phi_1 \left( 1 + \frac{\text{tg } \phi_1}{\text{tg } \phi_2} \text{tg}^2 \alpha \right) + i \sin \phi_1 (1 + \text{tg}^2 \alpha) \right], \\ U'_2 = |U_1| \sin \alpha (\sin \phi_1 / \text{tg } \phi_2 - \cos \phi_1). \quad (4)$$

С помощью поворота на угол  $\beta$  вокруг оси  $x'$  определяется плоскость поляризации упругих смещений  $(x', z'')$  (см. рис. 1б):

$$\beta = \text{arctg}(-U'_2/|U_3|), \quad U''_3 = |U_3|/\cos \beta, \quad U''_2 = 0. \quad (5)$$

Затем можно определить проекции  $U'''_1$  и  $U'''_3$  вектора  $\mathbf{U}$  на главные оси эллипса поляризации при повороте ортогональной системы координат около оси  $y''$  на угол  $\theta$  (см. рис. 1в):

$$U'''_3 = U''_3 \cos \theta + U'_1 \sin \theta, \quad U'''_1 = U'_1 \cos \theta - U''_3 \sin \theta. \quad (6)$$

Обозначив  $\tilde{A} = |U_3''/U_1''|$  и  $\tilde{\varphi} = \arg(U_3''/U_1'')$ , из условия  $\operatorname{Re}[U_3'''(\theta)/U_1'''(\theta)] = 0$  получим величину угла  $\theta$ , обеспечивающего квадратурное смещение между фазами величин  $U_1''' = |U_1'''| \exp(i\phi_1)$  и  $U_3''' = |U_3'''| \exp(i\phi_3)$ , при котором справедливо соотношение  $\cos(\phi_1''' - \phi_3''') = 0$ :

$$\theta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{2\tilde{A} \cos \tilde{\varphi}}{\tilde{A}^2 - 1} \right). \quad (7)$$

В качестве «опорной» компоненты выберем проекцию вектора  $\mathbf{U}$  на главные оси эллипса поляризации, абсолютная величина которой доминирует. Именно фазу доминирующей компоненты целесообразно использовать для определения фазового сдвига между электрическим потенциалом поверхностной акустической волны и вектором упругих смещений:  $\varphi_0 = \psi_\Phi - (\phi_1''' + \psi_3)$ , если  $|U_1'''| > |U_3'''|$ , и  $\varphi_0 = \psi_\Phi - (\phi_3''' + \psi_3)$ , если  $|U_3'''| > |U_1'''|$ . При этом изменение направления распространения поверхностной волны на противоположное приводит и к изменению знака указанного фазового сдвига: если  $\Phi^+ \propto \exp(-ikx)$ ,  $\Phi^- \propto \exp(ikx)$ , то  $u_1^+ \propto \exp[-i(kx - \varphi_0)] \propto \exp(i\varphi_0)$ ,  $u_1^- \propto \exp[i(kx - \varphi_0)] \propto \exp(-i\varphi_0)$ .

Имеющие конечную толщину электроды возмущают как электрические, так и упругие граничные условия на поверхности пьезоэлектрической подложки. Поэтому коэффициенты отражения  $\Gamma^+$ ,  $\Gamma^-$  электрического потенциала плоских волн, падающих на симметричный заземлённый электрод с противоположных направлений, измеренные в симметричных по отношению к электроду поперечных сечениях, определяются суперпозицией парциальных отражений, «электрического» ( $r_e$ ) и «упругого» ( $r_u$ ) [15]:

$$\Gamma^+ \sim r_e \left[ 1 + \left| \frac{r_u}{r_e} \right| \exp(2i\varphi_0) \right] \propto \exp(i\phi), \quad \Gamma^- \sim r_e \left[ 1 + \left| \frac{r_u}{r_e} \right| \exp(-2i\varphi_0) \right] \propto \exp(-i\phi).$$

В итоге, если  $\varphi_0 \neq \pi n/2$ , где  $n$  — целое число, и  $r_u \neq 0$ , то возникает эффект «естественной направленности» ( $\phi \neq \pi n$ ), т. е. асимметрия излучения поверхностной акустической волны топологически симметричным преобразователем. Эта асимметрия (максимальная при  $|\phi| = \pi/2$ ) является результатом различной интерференции волн, излучаемых каждой из его ячеек во взаимно противоположных направлениях, с волнами, возникающими вследствие отражения поверхностной акустической волны от соседних электродов с конечной толщиной [15, 16].

## 2. ОБОБЩЁННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ЯЧЕЙКИ ВШП

Существует множество различных конструкций элементарных электродных секций ВШП с периодом  $\lambda_0$ , используемых для достижения тех или иных функциональных целей. На рис. 2 представлены четыре из них: секция с «расщеплёнными» электродами, минимизирующими отражение волны на частоте  $f_0$  (а), традиционная симметричная секция с двумя одинаковыми разнополярными электродами (б), а также две асимметричные конструкции, имеющие три ((в), DART [17]) и два ((г), «TF SPUDT» [18]) штыря на периоде ВШП.

Секции в) и г) предназначены для создания «однонаправленных» ВШП, обеспечивающих преимущественное излучение поверхностных акустических волн в одном из двух противоположных направлений. С целью разработки одномерного формализма, необходимого для универсального описания произвольных преобразователей и отражателей поверхностных акустических волн, прежде всего рассмотрим обобщённую конструкцию ячейки ВШП и выявим её основные характеристики, необходимые для дальнейшего моделирования.

Следуя терминологии, введённой в работе [16], элементарную ячейку ВШП можно представить как комбинацию двух «центров возбуждения» и помещённого между ними «центра отражения» (см. рис. 3). При этом центр возбуждения понимается как поперечное сечение, в котором

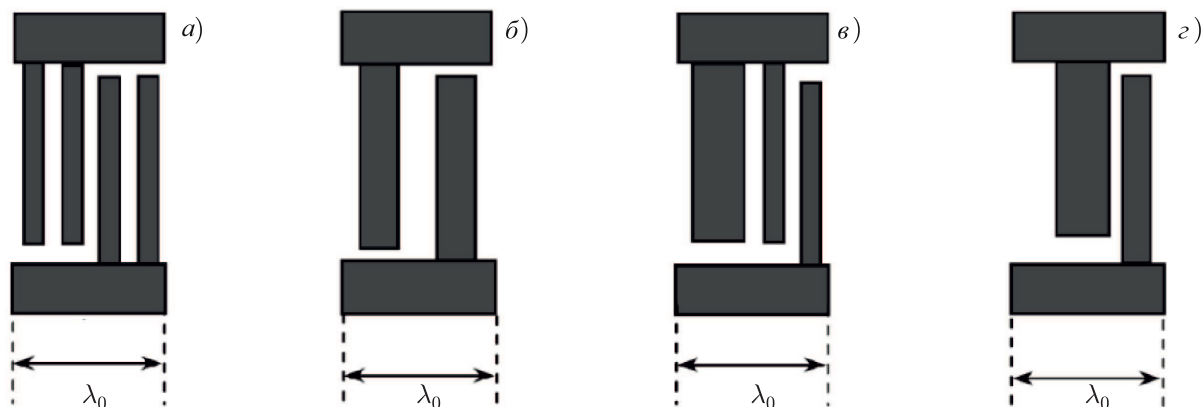
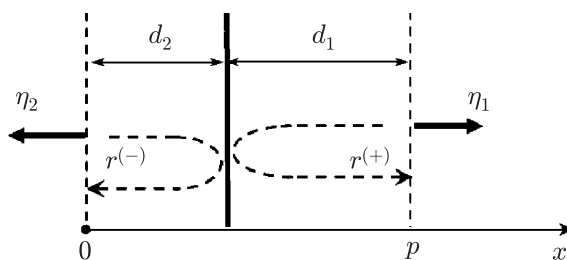
Рис. 2. Четыре типа электродных периодов ВШП ( $\lambda_0 = V_g/f_0$ )

Рис. 3. Условное изображение ячейки обобщённого вида с центрами возбуждения в сечениях  $x = 0$  и  $x = p$  и одним центром отражения в сечении  $x = d_2$ . Величины  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  обозначают безразмерные амплитуды волн, излучаемых ВШП в противоположных направлениях при единичной разности потенциалов между электродами ВШП



оказываются синфазными ( $S = 1$ ) или противофазными ( $S = 2$ ) потенциалы электрического поля волн, возбуждаемых внутри ВШП внешним напряжением  $V \propto \exp(i\omega t)$  и распространяющихся во взаимно противоположных направлениях ( $\pm x$ ), а центр отражения — это координата поперечного сечения, в котором имеется квадратурный фазовый сдвиг между электрическими потенциалами падающей на отдельную неоднородность и отражаемой ею волн.

При таком представлении ячейки учитывается, что возможная асимметрия её излучения может быть вызвана как топологической асимметрией ВШП (при  $r_0 \neq 0$  и  $d_1 \neq d_2$ ), так и анизотропией подложки (если  $r_u \neq 0$  и  $\varphi_0 \neq \pi n/2$ ). Любой ВШП представляет собой пространственную последовательность подобных ячеек, каждая из которых характеризуется коэффициентами отражения  $r^{(+)}$ ,  $r^{(-)}$  и прохождения  $t$ :  $r^{(+)} = r_C \exp(i\phi')$ ,  $r^{(-)} = r_C \exp(-i\phi')$ ,  $r_C = ir_0 \exp[-(ik + \gamma)p]$ ,  $t = t_0 \exp[-(ik + \gamma)p]$ ,  $t_0 = \sqrt{1 - r_0^2}$ ,  $k = \pi f/(pf_0)$ ,  $\phi' = \phi - k(d_1 - d_2)$ .

Продольный размер ячейки определяется как  $p = \lambda_0/S$ , где величина  $S$  может принимать два значения (2 и 1) при описании симметричных (рис. 2а, б) и асимметричных (рис. 2в, г) ячеек соответственно. Сказанное означает, что коэффициент прохождения волны с потенциалом  $\Phi \propto \exp(-i\omega p/V_g)$  через такую ячейку на центральной частоте  $f_0$  является действительной величиной, положительной при  $S = 1$  и отрицательной при  $S = 2$ :  $t(f_0) = (-1)^{2/S} t_0 \exp(-\gamma\lambda_0/S)$ .

С другой стороны, мы соотнесли потери на распространение акустической волны с экспоненциальным фактором  $\exp(-\gamma\lambda_0)$ . Поэтому в симметричном случае (при  $d_1 = d_2$  и  $\phi = 0$ ) диссипация не влияет на фазу отношений  $r^{(+)} / t = r^{(-)} / t = r_C / t$  и в ходе дальнейшего моделирования следует считать, что  $\text{Re}(r_C/t) = 0$ , как и в случае отсутствия потерь [11].

Пусть  $\Pi_0$  — мощность, переносимая пучком ПАВ с единичной амплитудой в акустическом канале без диссипации, а  $g_0$  — кондактанс ячейки ( $g_0 = \text{Re} y_1$ ). Тогда амплитуды возбуждаемых элементарной ячейкой и распространяющихся в противоположных направлениях волн (см. рис. 3) выражаются следующим образом [19]:

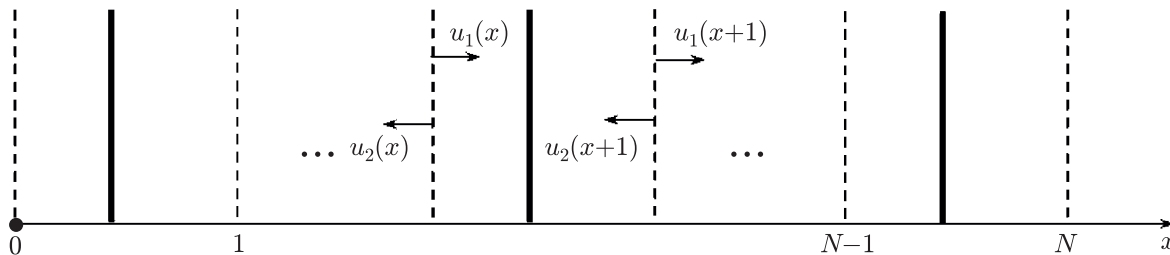


Рис. 4. Обозначения мгновенных амплитуд встречных волн в рамках дискретного анализа распределённых систем

$$\eta_1 = \eta_0 (1 + \tilde{t} + r^{(+)}) , \quad \eta_2 = \eta_0 (1 + \tilde{t} + r^{(-)}) , \tag{8}$$

где  $\tilde{t} = t (-1)^{2/S}$ ,  $\eta_0 = \sqrt{g_0/\Pi_0} \{4\text{Re}[(1 + \tilde{t})(1 + r_C^* \cos \phi')]\}^{-1/2}$ .

При этом выполняется очевидное соотношение, выражающее локальный закон сохранения энергии:

$$(|\eta_1|^2 + |\eta_2|^2) \Pi_0 \leq g_0 . \tag{9}$$

Строгое равенство в формуле (9) достигается при  $\gamma = 0$ .

Рассмотрим теперь обобщённый преобразователь поверхностных акустических волн как периодическую последовательность описанных выше идентичных ячеек.

### 3. ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ РАСПРЕДЕЛЁННЫХ СИСТЕМ И ЕГО СРАВНЕНИЕ С МЕТОДОМ СВЯЗАННЫХ МОД

В отличие от метода связанных мод, дискретный анализ распределённых систем основан на решении не дифференциальных, а разностных уравнений, не налагающих никаких ограничений на величину  $r_0$  [19, 20]. В рамках дискретного анализа продольные координаты имеют лишь дискретные значения:  $x = 0, 1, 2, \dots, N$  (см. рис. 4). При этом очевидны следующие исходные соотношения [10, 19, 20]:

$$u_1(x + 1) = tu_1(x) + r^{(+)}u_1(x + 1) + \eta_1(x + 1), \quad u_2(x) = r^{(-)}u_1(x) + tu_2(x + 1) + \eta_2(x) . \tag{10}$$

В силу периодичности рассматриваемых ячеек  $\eta_l = \bar{\eta}_l (-1)^{2x/S}$ , где  $l = 1, 2$  (краевыми эффектами при  $x = 0$  и  $x = N$  пренебрегаем). Умножив уравнения (10) на величину  $(-1)^{2x/S}$  и введя новые переменные

$$C(x) = u_1(x) (-1)^{2x/S}, \quad D(x) = u_2(x) (-1)^{2x/S}, \tag{11}$$

получим для них систему уравнений с независимой (в самом общем случае) от координаты  $x$  правой частью ( $\tilde{t} = t_0 (-1)^{2/S}$ ):

$$C(x + 1) - \tilde{t}C(x) - r^{(+)}D(x + 1) = \bar{\eta}_1, \quad -r^{(-)}C(x) + D(x) - \tilde{t}D(x + 1) = \bar{\eta}_2 . \tag{12}$$

Решение системы (12) представляем в виде суммы общего и частного решений однородной и неоднородной систем,  $C_0 = \tilde{C}(x) + A_0$ ,  $D_0 = \tilde{D}(x) + B_0$ , полагая при этом, что величины  $A_0, B_0$  не зависят от координаты  $x$  [19–21]:

$$\tilde{C}(x + 1) - \tilde{t}\tilde{C}(x) - r^{(+)}\tilde{D}(x + 1) = 0, \quad -r^{(-)}\tilde{C}(x) + \tilde{D}(x) - \tilde{t}\tilde{D}(x + 1) = 0 . \tag{13}$$

$$(1 - \tilde{t}) A_0 - r^{(+)}B_0 = \bar{\eta}_1, \quad -r^{(-)}A_0 + (1 - \tilde{t}) B_0 = \bar{\eta}_2 . \tag{14}$$

Представив решение однородной системы (13) в виде  $\tilde{C}(x) = Az^x$ ,  $\tilde{D}(x) = Bz^x$ , находим её характеристическое уравнение  $\tilde{t}z^2 - (\tilde{t}^2 + 1 - r^2)z + \tilde{t}$  с корнями  $z_1$  и  $z_2$ :

$$z_1 = \frac{\cos \Psi}{\tilde{t}} + \sqrt{\left(\frac{\cos \Psi}{\tilde{t}}\right)^2 - 1}, \quad z_2 = \frac{\cos \Psi}{\tilde{t}} - \sqrt{\left(\frac{\cos \Psi}{\tilde{t}}\right)^2 - 1}, \quad (15)$$

где  $\Psi = 2\pi(f/f_0 - 1)/S - i\gamma p$ .

Частное решение неоднородной системы (14) записывается как

$$A_0 = \frac{(1 - \tilde{t})\bar{\eta}_1 + r^{(+)}\bar{\eta}_2}{(1 - \tilde{t})^2 - r_C^2}, \quad B_0 = \frac{(1 - \tilde{t})\bar{\eta}_2 + r^{(-)}\bar{\eta}_1}{(1 - \tilde{t})^2 - r_C^2}. \quad (16)$$

В результате полное решение уравнений (13) и (14) выражается следующим образом:

$$C(x) = A_1 z_1^x + A_2 z_2^x + A_0, \quad D(x) = B_1 z_1^x + B_2 z_2^x + B_0. \quad (17)$$

Заметим, что условие нетривиальности решения однородной системы (13) приводит к однозначной связи между коэффициентами  $A_l$  и  $B_l$ ,  $l = 1, 2$ :

$$B_l/A_l = \alpha_l = \bar{\alpha}_l \exp(-i\phi'), \quad (18)$$

где  $\bar{\alpha}_l = r_C/(1 - \tilde{t}z_l)$ .

Поскольку  $z_1 z_2 = 1$  и  $\alpha_1 \alpha_2 = 1$ , введём следующие обозначения:

$$z_1 = \exp(i\theta), \quad z_2 = \exp(-i\theta), \quad \bar{\alpha}_1 = \exp(i\tau), \quad \bar{\alpha}_2 = \exp(-i\tau). \quad (19)$$

Задавая граничные условия ( $\tilde{C}(0) = 1$ ,  $\tilde{D}(N) = 0$  или  $\tilde{C}(0) = 0$ ,  $\tilde{D}(N) = 1$ ) в сечениях  $x = 0$  и  $x = N$ , определим полное распределение акустических полей в системе при  $V = 0$ , откуда, в частности, найдём выражения для коэффициентов отражения и прохождения короткозамкнутой решётки ( $R^+$ ,  $R^-$  и  $T$ ). Они совпадают с хорошо известными соотношениями [11, 19]:

$$R^+ = \frac{z_2^N - z_1^N}{\alpha_2 z_2^N - \alpha_1 z_1^N} = \frac{\sin(\theta N)}{\sin(\theta N + \tau)} \exp(i\phi'), \quad R^- = \frac{\sin(\theta N)}{\sin(\theta N + \tau)} \exp(-i\phi'), \quad (20)$$

$$T = \frac{(-1)^{2N/S} (\alpha_2 - \alpha_1)}{\alpha_2 z_2^N - \alpha_1 z_1^N} = \frac{(-1)^{2N/S} \sin \tau}{\sin(\theta N + \tau)}. \quad (21)$$

Отметим, что коэффициент отражения для полубесконечной решётки ( $N \rightarrow \infty$ ) равен

$$R_I(f) = \begin{cases} \alpha_1(f), & |\alpha_1| \leq |\alpha_2|; \\ \alpha_2(f), & |\alpha_2| < |\alpha_1|. \end{cases}$$

Учитывая граничные условия  $C(N) = D(0) = 0$  в системе (17), определяем соответствующие коэффициенты  $A_1$ ,  $A_2$ :

$$A_1 = \frac{B_0 - A_0 \alpha_2 z_2^N}{\alpha_2 z_2^N - \alpha_1 z_1^N}, \quad A_2 = \frac{B_0 - A_0 \alpha_1 z_1^N}{\alpha_1 z_1^N - \alpha_2 z_2^N}. \quad (22)$$

С учётом соотношений (16) и (19) находим искомое распределение мгновенных амплитуд встречных волн, возбуждаемых в преобразователе:

$$u_1(x) = (A_1 z_1^x + A_2 z_2^x + A_0) (-1)^{2x/S}, \quad u_2(x) = (B_1 z_1^x + B_2 z_2^x + B_0) (-1)^{2x/S}. \quad (23)$$



В частности, нормированные амплитуды плоских волн, излучаемых ВПП в противоположных направлениях вдоль оси  $x$ , описываются формулами

$$H^{(+)} = u_1(N) = 2 \sin(N\theta/2) \frac{A_0 \cos(\tau + N\theta/2) - B_0 \cos(N\theta/2) \exp(i\phi')}{\sin(\tau + N\theta)} (-1)^{N-1}, \quad (24)$$

$$H^{(-)} = u_2(0) = 2 \sin(N\theta/2) \frac{B_0 \cos(\tau + N\theta/2) - A_0 \cos(N\theta/2) \exp(-i\phi')}{\sin(\tau + N\theta)}. \quad (25)$$

Как видно из соотношений (20), величина эффективного значения фазового параметра направленности может быть определена с помощью соотношения

$$\phi' = \frac{1}{2} \arg \left[ \frac{R^{(+)}}{R^{(-)}} \right]. \quad (26)$$

Другой способ оценки значения  $\phi'$  основан на анализе направленности излучения ВПП, описываемой функцией  $DR(f) = |H^{(+)}|/|H^{(-)}|$ . Если  $\gamma = 0$  и  $|\phi'| = \pi/2$ , то эта функция максимальна на основной частоте брэгговского резонанса и строго равна [11] величине

$$DR_0 = \frac{1 + R(f_0)}{|T_0(f_0)|}. \quad (27)$$

В общем случае максимальная направленность ВПП достигается на частоте  $f_m \approx f_0 [1 + (r_0/\pi) \times \cos \phi']$  и приближённо вычисляется с помощью простой формулы

$$DR_m \approx DR(f_m) = DR_0^{\sin \phi'}, \quad (28)$$

т. е.

$$\phi' \approx \arcsin(\ln DR_m / \ln DR_0). \quad (29)$$

Таким образом, определяя (с помощью численных или натуральных экспериментов) эффективные величины модулей максимальных коэффициентов отражения и направленности излучения ВПП, можно оценивать эффективную величину его фазового параметра направленности  $\phi'$  не только в рамках метода связанных мод как варианта теории возмущений [15], но и в самом общем случае.

В завершение, пренебрегая краевыми эффектами, вычислим динамическую проводимость ВПП путём простого суммирования степенных рядов при сложении токов, индуцируемых акустическими волнами во всех ячейках:

$$Y_A = N g_0 + \sum_{x=1}^N [\bar{\chi}_2 C(x) + \bar{\chi}_1 D(x)] = g_0 \left( N + 2 \left\{ Q_0 (N-1) - \frac{\sin[\theta(N-1)/2]}{\sin(\theta N + \tau) \sin(\theta/2)} (Q_1 + Q_2) \right\} \right), \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\chi}_{1,2} [A/B] &= 2\bar{\eta}_{1,2}, & Q_0 &= A_0\bar{\eta}_1 + B_0\bar{\eta}_2, \\ Q_1 &= A_0 [\bar{\eta}_2 \sin(\theta N/2 + \tau) + \bar{\eta}_1 \sin(\theta N/2) \exp(-i\phi')], \\ Q_2 &= B_0 [\bar{\eta}_1 \sin(\theta N/2 + \tau) + \bar{\eta}_2 \sin(\theta N/2) \exp(i\phi')]. \end{aligned} \quad (31)$$

Выражение (30) значительно упрощается и становится весьма компактным для обычного «двунаправленного» ВПП (при  $\phi' = \pi n$ ) [19]:

$$Y_A = Y_S = g_0 \left( N + \frac{2(r_C + \tilde{t})}{1 - \tilde{t} - r_C} \left\{ N - 1 - \frac{\sin[\theta(N-1)/2] \cos(\tau/2)}{\sin(\theta/2) \cos[(\theta N + \tau)/2]} \right\} \right). \quad (32)$$

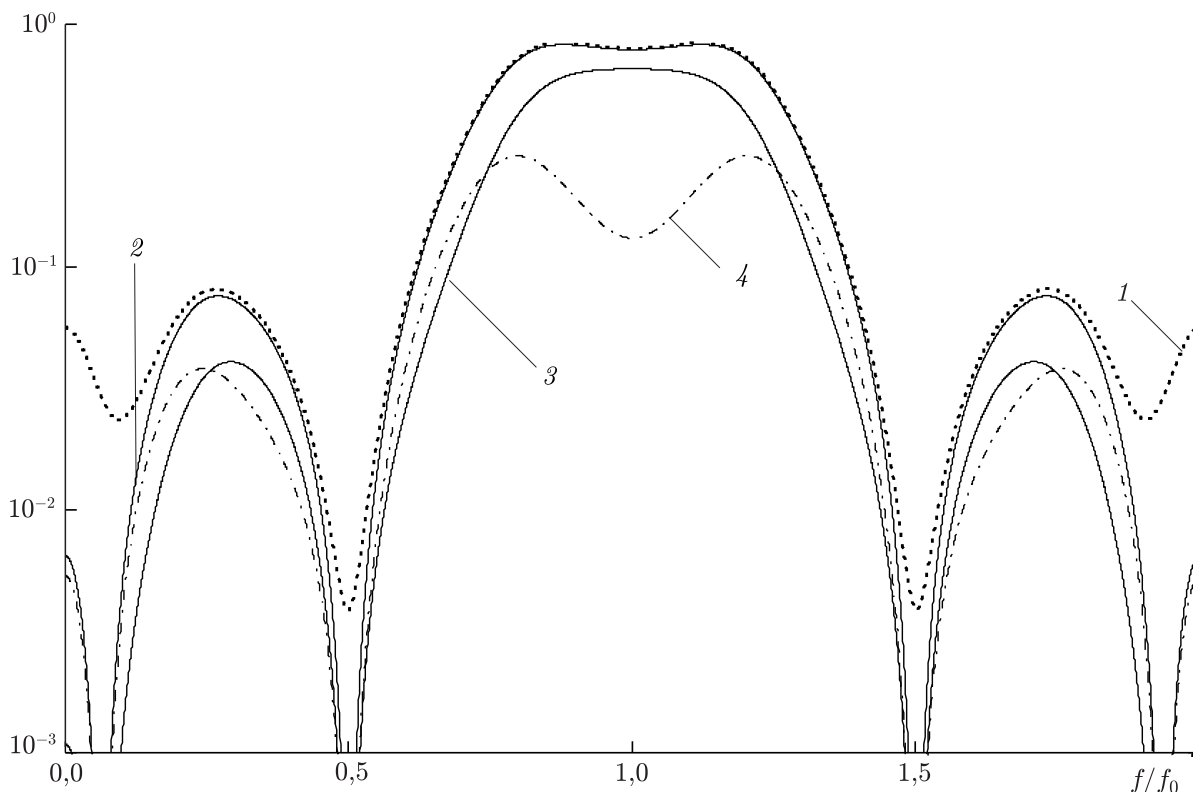


Рис. 5. Сравнение нормированных величин кондактанса  $\text{Re } Y_A / (g_0 N^2)$  (кривая 1) однонаправленного преобразователя и нормированной мощности волны, излучаемой им суммарно в обоих направлениях,  $P_A / (g_0 N^2)$  (кривая 2), а также нормированных мощностей излучения в направлениях  $x$  (3) и  $-x$  (4), при  $S = 2$ ,  $\phi' = \pi/2$ ,  $N = 4$ ,  $\gamma\lambda_0 = 0,01$  и  $r_0 = 0,2$

Важнейшим обстоятельством, подтверждающим адекватность предложенного способа моделирования ВШП, служит выполнение закона сохранения энергии и в интегральном виде. Заметим, что в дискретной бездиссипативной модели Моргана этот закон играет роль исходного постулата, на котором основывается весь матричный алгоритм вывода результатов. Здесь мы просто убеждаемся в соответствии фундаментальному принципу получаемых нами аналитических выражений, решив исходные уравнения напрямую.

Нормированная величина полной мощности акустического излучения ВШП равна  $P_A = P_A^{(+)} + P_A^{(-)}$ , где  $P_A^{(+)} = \Pi_0 (|H^{(+)}|^2)$ ,  $P_A^{(-)} = \Pi_0 (|H^{(-)}|^2)$  — мощности пучков, излучаемых в направлениях  $x$  и  $-x$  соответственно. Следовательно, в силу закона сохранения энергии, на любой частоте всегда  $P_A = \text{Re } Y_A$  при отсутствии потерь на распространение и сопротивления электродов, а для диссипативных систем во всём анализируемом спектре должно выполняться соотношение  $P_A < \text{Re } Y_A$ , т.к. часть потребляемой ВШП мощности превращается в тепло.

Для иллюстрации последних утверждений на рис. 5 приведены частотные зависимости нормированного кондактанса однонаправленного ВШП (кривая 1), а также мощностей излучения этого преобразователя: полной (кривая 2) и для каждого из взаимно противоположных направлений в отдельности (кривые 3 и 4). Все графики отвечают  $\phi = \pi/2$ ,  $S = 2$ ,  $N = 4$ ,  $\gamma\lambda_0 = 0,01$  и  $r_0 = 0,2$ .

Другим существенным аспектом нашего исследования является сравнение нового способа моделирования и популярного метода связанных мод с целью определения эффективности последнего при сильных возмущениях поверхностных граничных условий широкополосными структу-

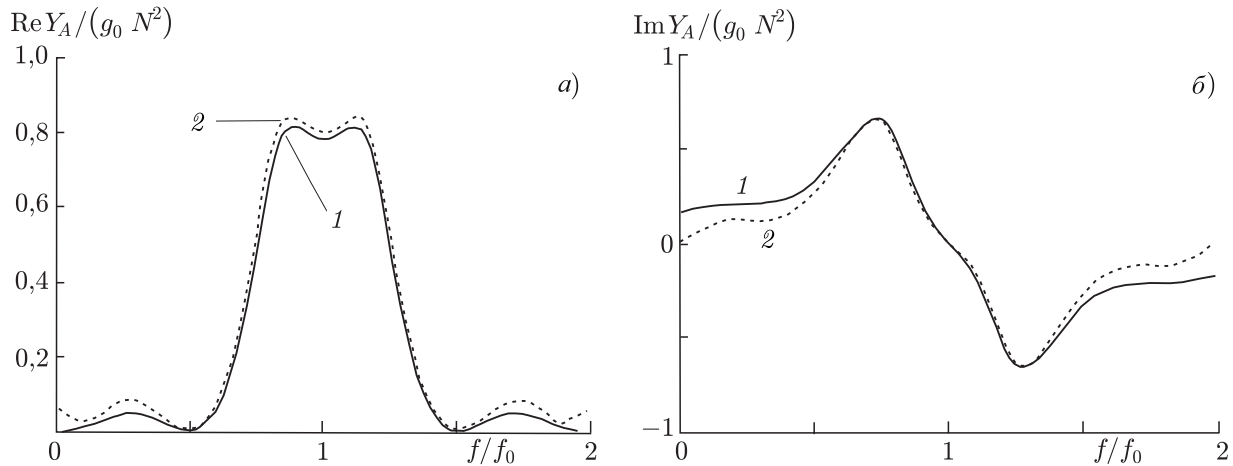


Рис. 6. Нормированные характеристики однонаправленного ВШП: *а*) кондактанс  $\text{Re } Y_A / (g_0 N^2)$  и *б*) мнимая часть динамической проводимости  $\text{Im } Y_A / (g_0 N^2)$ , рассчитанные с помощью метода связанных мод (кривая 1) и дискретного анализа (кривая 2) при  $|\phi'| = \pi/2$ ,  $S = 2$ ,  $N = 4$ ,  $\gamma\lambda_0 = 0,01$  и  $r_0 = 0,2$

рами. На рис. 6 приведены частотные зависимости кондактанса (*а*) и мнимой части динамической проводимости (*б*) однонаправленного преобразователя, состоящего из четырёх электродов, каждый из которых обладает довольно существенной отражательной способностью ( $r_0 = 0,2$ ). Расчёты проводились в предположении, что ключевые локальные параметры системы от частоты не зависят. Результаты метода связанных мод отмечены линиями 1, а результаты дискретного анализа — линиями 2.

Как видно, различия кривых 1 и 2 очень незначительны в широкой относительной полосе вблизи частоты акустического синхронизма даже при малом числе электродов и довольно большой эффективности локальных отражений.

## ВЫВОДЫ

Предложен новый метод аналитического моделирования устройств на поверхностных и псевдоповерхностных акустических волнах. Этот метод лишён недостатков и ограничений области применимости, присущих известным феноменологическим подходам к исследованию периодических систем с распределённой обратной связью. Модель основана на строгом решении разностных уравнений, описывающих волновые процессы в системах с многократными внутренними отражениями. Полученные компактные соотношения, описывающие все частотные характеристики рассматриваемых периодических структур, полностью удовлетворяют закону сохранения энергии при произвольных входных параметрах.

Указан способ определения ориентации главного эллипса упругой поляризации гармонических поверхностных акустических волн пьезоэлектрической подложки, позволяющий однозначно находить величину фазового сдвига между двумя динамическими подсистемами акустической волны — упругими смещениями и электрическим полем (знание величины этого сдвига необходимо для количественного описания известного эффекта естественной направленности излучения ВШП). Предложена методика для оценки эффективной величины фазового параметра направленности ВШП на основе численного или натурного определения максимальных значений модуля коэффициента отражения преобразователя и направленности его излучения в самом общем случае.

Анализ результатов, получаемых с помощью дискретного анализа распределённых систем и широко используемого метода связанных мод, продемонстрировал очень высокую эффективность последнего даже при довольно существенной рассеивающей способности каждого из электродов и небольшом их количестве. Подобное совпадение служит свидетельством адекватности обеих моделей, построенных с помощью принципиально разных подходов. В то же время у разработчиков ПАВ-устройств появляется возможность отдавать предпочтение тому или иному способу моделирования в зависимости от особенностей архитектуры конкретных систем. Например, для описания характеристик коротких регулярных структур, как и для исследования ПАВ-устройств на гармониках основного резонанса, целесообразно применять результаты дискретного анализа. В то же время для расчёта в сравнительно узкой полосе частот характеристик длинных преобразователей и отражателей поверхностных акустических волн вполне допустимо использовать привычный метод связанных мод, если получаемые с его помощью результаты лишь незначительно отличаются от результатов более строгой модели дискретного анализа распределённых систем.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gamble K. J., Malocha D. C. // IEEE Trans. UFFC. 2002. V. 49, No. 1. P. 47.
2. Svshnikov B. V., Shitvov A. P., Bhattacharjee K. K. // Proc. IEEE Ultrasonics Symposium. Honolulu Hawaii, USA, 5–8 October 2003. P. 715.
3. Svshnikov B. V., et al. // Proc. Joint UFFC, EFTF and PFM Symposium. Prague, Czech Republic, 21–25 July 2013. P. 1408.
4. Реутов В. П. // Изв. вузов. Радиофизика. 1973. Т. 16, № 11. С. 1690.
5. Koyamada Y., Yoshikawa S. // Rev. Electr. Commun. Labs. 1979. V. 27, No. 5–6, P. 432.
6. Сандлер М. С., Свешников Б. В. // Радиотехника и электроника. 1981. Т. 26, № 9. С. 1819.
7. Hartmann C. S., Wright P. V., Kansy R. J., Carber E. M. // Proc. IEEE Ultrasonics Symposium. San Diego, USA, 27–29 October 1982. P. 40.
8. Пасхин В. М., Сандлер М. С., Свешников Б. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1983. Т. 26, № 1. С. 103.
9. Morgan D. P. // Proc. IEEE Ultrasonics Symposium. Seattle, USA, 7–10 November 1995. P. 215.
10. Morgan D. P. // IEEE Transactions on UFFC. 1998. V. 45, No. 1. P. 152.
11. Morgan D. P. Surface acoustic wave filters. London: Elsevier Ltd., 2007. 429 p.
12. Plessky V. P., et al. // IEEE Trans. UFFC. 2014. V. 61, No. 12. P. 2149.
13. Shane Cloude. An introduction to electromagnetic wave propagation and antennas. New York: Springer-Verlag, 1996. 200 p.
14. Анисимкин В. И., Котелянский И. М., Магомедов М. А. // Акуст. журн. 1984. Т. 30, вып. 4. С. 417.
15. Свешников Б. В. // Письма в ЖТФ. 1990. Т. 16, № 3. С. 1.
16. Wright P. V. // Proc. IEEE Ultrasonics Symposium. San Francisco, USA, 16–18 October 1985. P. 58.
17. Kodama T., et al. // Proc. IEEE Ultrasonics Symposium. Williamsburg, USA, 17–19 November 1986. P. 59.
18. Martin G., Biryukov S. V., Schmidt H., et al. // IEEE Trans. UFFC. 2011. V. 58, No. 3. P. 658.
19. Свешников Б. В. // Сб. тр. XXIV сессии Российского акустического общества. Саратов, 2011. С. 235.
20. Svshnikov B. V. // Proc. IEEE Ultrasonics Symposium. San Diego, USA, 11–14 October 2010. P. 1890.

21. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. М.: Физматгиз, 1959. 400 с.

Поступила в редакцию 8 июля 2015 г.; принята в печать 27 декабря 2015 г.

## GENERALIZED DISCRETE MODEL OF SYSTEMS WITH DISTRIBUTED FEEDBACK ON SURFACE ACOUSTIC WAVES

*B. V. Sveshnikov and A. S. Bagdasaryan*

We have developed a self-consistent physical model, which improves the accuracy of calculating the characteristics of the devices based on both pure surface and pseudosurface acoustic waves. The model is free from restrictions characteristic of the well-known method of coupled modes and other phenomenological methods for studying distributed systems. The compact relations describing all the characteristics of the acoustoelectric transducers of all types with allowance for the possible directivity of their radiation and its propagation losses are obtained using analytical solution of the difference equations. The method for determining the spatial orientation of the elastic-polarization ellipse in an anisotropic crystal, which allows one to unambiguously calculate the phase shift between the oscillations of two coupled dynamic subsystems, i.e., elastic displacements and the accompanying electric field. The obtained results, which considerably facilitate the problem of fast and accurate design of various devices on the basis of surface and pseudosurface acoustic wave, are valid in the general case for any frequency including the harmonics of the fundamental acoustic synchronism.