

УДК 534.2+534.6.08+550.834

АНАЛИЗ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В УПРУГОЙ СРЕДЕ С ВОДОНОСНЫМ СЛОЕМ

А. И. Коньков^{1*}, А. В. Лебедев¹, А. В. Разин²

¹ Институт прикладной физики РАН;

² Нижегородский научно-исследовательский институт радиотехники, г. Нижний Новгород, Россия

Исследовано распространение сейсмоакустических волн в трёхслойной среде, которая состоит из однородного изотропного деформируемого твёрдого слоя, нагруженного на однородный жидкий слой над однородным изотропным твёрдым полупространством. Данная среда моделирует геологический разрез, в котором верхний слой грунта отделён от глубинных пород водоносным слоем. Получено и проанализировано дисперсионное уравнения, представлены его решения для важных с практической точки зрения случаев. Выявлены особенности дисперсионных кривых и пространственного распределения полей мод, позволяющие не только устанавливать наличие под верхним слоем грунта водоносного слоя, но и определять мощность и глубину залегания последнего. Показано, что для решения задачи реконструкции особенностей строения геологической среды существенным параметром является отношение вертикальной и горизонтальной компонент вектора смещения, измеренных на земной поверхности.

ВВЕДЕНИЕ

Дистанционная диагностика структурных неоднородностей природных сред представляет значительный интерес, в том числе для оценки параметров грунта при строительстве инженерных сооружений, устойчивости уже имеющихся строений, для обнаружения зарождающихся карстовых провалов, а также при решении задач поиска источников воды или диагностики возможного протекания трубопроводов. Весь круг обозначенных задач имеет отношение к рациональному природопользованию и гармоничному развитию городских территорий, подверженных техногенному воздействию [1]. Совершенствование методов диагностики невозможно без развития их теоретических оснований.

Целью данной работы является теоретическое исследование эффектов, связанных с наличием водного слоя в приповерхностной слоистой структуре. Найденное аналитическое решение позволяет, с одной стороны, понять роль ключевых параметров, а с другой — использовать его как эталон для проверки более сложных численных схем. При решении задачи значительное внимание уделено возможности использования полученных результатов для реализации перспективных схем дистанционной диагностики, основанных на анализе поверхностных (нормальных) волн.

Широкое использование моделей слоистой среды в геоакустике связано с накоплением осадочных отложений в поле тяжести Земли, приводящим к появлению плоскостройной структуры. Теория распространения волн в слоистых структурах имеет долгую историю [2–7]. Обзор современного состояния этой проблемы представлен в недавних монографиях [8, 9]. Стандартное описание сводится к численному решению системы уравнений, записанной с помощью ленточных матриц (матричного пропагатора). В литературе достаточно подробно исследованы вопросы устойчивости получаемых решений, возможности их оптимизации, учёта непрерывности изменения параметров с глубиной и тому подобное (см. например, [10]). Тем не менее, наличие эффективных численных методов не означает, что аналитические решения не нужны. Последние

* swan@hydro.appl.sci-nnov.ru

позволяют не только калибровать численные схемы решения, что отмечено выше, но и получать результаты, допускающие ясную физическую интерпретацию.

Среди методов диагностики приповерхностных слоёв выделяется метод спектрального анализа поверхностных волн в двухканальной (spector analysis of surface waves, SASW [11]) и многоканальной (multi-channel analysis of surface waves, MASW [12]) реализациях с использованием активных и пассивных схем наблюдения. Поскольку поверхностные волны являются медленными и характеризуются эффективной глубиной проникновения порядка длины волны, при использовании источников их возбуждения, размещённых на поверхности, можно управлять глубиной проникновения волны изменением её частоты. Наиболее простым для реализации является возбуждение волн вертикальным силовым источником (вертикальной монохроматической силой), который, кроме объёмных продольной и сдвиговой волн, возбуждает волну Рэлея. Последняя на границе однородного полупространства распространяется без дисперсии, которая появляется при учёте неоднородности среды по глубине.

Стандартное решение задачи реконструкции глубинного строения среды, в которой распространяется волна Рэлея, предложено в работе [11] и сводится к легко реализуемой схеме наблюдения. В импульсном отклике двух приёмников, расположенных на одной линии с источником, выделяется отклик за счёт волны Рэлея. Осуществить эту процедуру несложно, например, с помощью выделения соответствующего сигнала с учётом высокой эффективности возбуждения поверхностных волн вертикальным силовым источником. Более половины энергии излучения переносится волной Рэлея [13, 14], что позволяет надёжно выделить вклад этой волны в отклик среды на динамическое воздействие. Вычисление взаимного спектра сигналов с двух приёмников, расположенных в волновой зоне источника, позволяет определить зависимость фазы от частоты, $\varphi(\omega)$. Зная расстояние между приёмниками d , нетрудно определить зависимость фазовой скорости от частоты: $C_R = \omega d / \varphi(\omega)$. В дальнейшем идея, высказанная в работе [11] получила развитие за счёт использования пространственно-временной обработки сигналов [12].

Реконструированный глубинный «профиль» скорости волны Рэлея отвечает минимуму среднеквадратичного отклонения между измеренной и вычисленной в рамках модели плоскостройной среды скоростями этой волны [15]. Параметры верхнего слоя и полупространства задаются на основе измеренных скоростей волны Рэлея в диапазонах высоких и низких частот. Глубина границы раздела этих двух сред оценивается по положению точки перегиба в частотной зависимости $C_R(\omega)$.

Недостатком используемых методов является неопределённость значения коэффициента Пуассона ν , который чаще всего задаётся равным $1/3$ или близким к $1/2$ при анализе морских донных отложений [16]. В работе [17] для устранения этой неопределённости предложено анализировать частотную зависимость не только фазовой скорости, но и отношения комплексных амплитуд вертикальной и горизонтальной компонент вектора смещения на поверхности. Это отношение в случае однородного полупространства изменяется в 1,5 раза в области допустимых значений ν . В дальнейшем для краткости авторы метода [17] предложили использовать аббревиатуру PASW (projections analysis of surface waves). В данной работе теоретически анализируются преимущества использования информации о комплексных амплитудах компонент вектора смещения для диагностики водоносного слоя.

Для развития дистанционных схем реконструкции параметров слоистых сред и, в частности, в целях диагностики наличия водоносного слоя необходимо располагать аналитическим решением эталонной задачи. В качестве таковой рассмотрена задача о распространении поверхностных волн в среде, которая состоит из упругого слоя, лежащего на слое жидкости над упругим полупространством. Такая модельная среда имеет минимальное достаточное число слоёв.

Подобная модельная среда рассматривалась в работах [18, 19] для описания распространения

гидроакустических и сейсмоакустических волн. В частности, в статье [18] приведён пример решения задачи о распространении звука в волноводе с жидким дном и упругой поверхностью в виде слоя льда. Основное внимание уделено особенностям поля волноводных мод низких порядков, отвечающих за дальнейшее распространение звука. В работе [19] рассмотрена задача о распространении звука в специальном случае покрытого льдом моря с упругим дном. При этом слой жидкости имеет значительную толщину. Проведённый анализ дисперсионных соотношений указывает на существование волн изгиба пластины льда и наличие фундаментальной донной волны.

Отличительной особенностью настоящей работы является анализ дисперсионных зависимостей для выявления признаков существования жидкого слоя и использование этих зависимостей в целях диагностики. Следует отметить, что в приведённых ниже уравнениях не учитываются объёмные силы гравитации, что приводит к появлению ограничений снизу на область частот, в которой применимы полученные выражения. Влияние гравитации на дисперсионные соотношения в упруго-слоистых средах обсуждается в работе [2]. В частности, отличное от нуля ускорение свободного падения приводит к поправкам порядка 10 % к скорости волны Рэлея в диапазоне частот ниже 0,003 Гц (см. выражения (5)–(28) в работе [2]) для рассмотренных параметров модельной среды. В диапазоне частот ниже 0,1 Гц фазовая скорость волн изгиба имеет тот же порядок величины, что и скорость гравитационной волны в жидком слое. Таким образом, если не рассматривать столь низкие частоты, то в учёте сил гравитации нет необходимости. Отметим, что имеющийся в нашем распоряжении вибрационный источник, который в дальнейшем предполагается использовать в экспериментальных исследованиях и диагностике водоносных слоёв, имеет рабочий диапазон частот выше 10 Гц [20], а регистрирующая аппаратура, которой мы располагаем, не позволяет работать на частотах ниже 5 Гц, что исключает необходимость учёта объёмных сил при выводе приведённых ниже уравнений.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ, АНАЛИЗ АСИМПТОТИК И ЧАСТНЫХ СЛУЧАЕВ

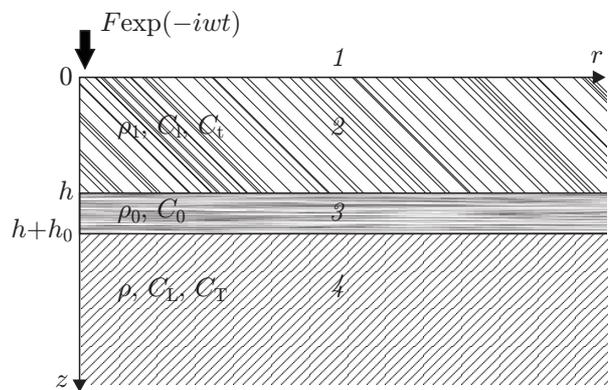


Рис. 1. Рассматриваемая модель среды: 1 – вакуум, 2 – упругий слой, 3 – жидкий слой, 4 – упругое полупространство

Допустим, что имеется среда, моделирующая геологический разрез, в котором верхний слой грунта отделён от глубинных пород водоносным или насыщенным водой слоем. Такая модельная среда состоит из двух слоёв и полупространства. Рассмотрим распространение волн в такой среде при их возбуждении вертикальным силовым источником, помещённым в начало координат.

Наибольший интерес с точки зрения дистанционной диагностики представляют медленные поверхностные волны, которые прижаты к соответствующим границам раздела слоёв. Дисперсионные характеристики этих волн определяются параметрами контактирующих сред. Эффективное возбуждение поверхностных волн вертикальным силовым источником возможно при структуре мод с существенно отличающейся от нуля вертикальной компонентой смещения на поверхности. Поэтому дополнительно анализируются частотные диапазоны, где возможно эффективное возбуждение соответствующих поверхностных волн.

Строение рассматриваемой среды приведено на рис. 1, где величины ρ_1 , ρ_0 и ρ отвечают плотности соответствующих слоёв, величины C_1 , C_0 и C_L – скоростям продольных (звуковых) волн, величины C_t и C_T – скоростям волн сдвига в упругих слоях. Верхняя граница $z = 0$ предполагает-

Строение рассматриваемой среды приведено на рис. 1, где величины ρ_1 , ρ_0 и ρ отвечают плотности соответствующих слоёв, величины C_1 , C_0 и C_L – скоростям продольных (звуковых) волн, величины C_t и C_T – скоростям волн сдвига в упругих слоях. Верхняя граница $z = 0$ предполагает-

ся свободной от напряжений, что соответствует граничным условиям: $\sigma_{zr} = \sigma_{zz} = 0$ (особенности, связанные с распространением волны Стоунли в воздушной среде, рассмотрены ранее в работе [8]). При наличии источника (т. е. вертикальной силы с комплексной амплитудой F) в начале координат компонента σ_{zz} тензора напряжений равна $F\delta(r)/(2\pi r)$, где $\delta(r)$ — дельта-функция. На границах раздела $z = h$ и $z = h + h_0$ выполняются условия непрерывности вертикальной проекции смещения u_z и компоненты σ_{zz} тензора напряжений. Жидкость считается идеальной, и на этих границах тангенциальные напряжения обращаются в нуль: $\sigma_{zr} = 0$.

Подробная запись системы уравнений относительно смещений или скалярного и векторного потенциалов смещений хорошо известна [7]. Используя преобразования Фурье—Ханкеля и граничные условия для связи потенциалов смещения и напряжения, получаем систему линейных уравнений относительно комплексных амплитуд этих потенциалов. Опуская промежуточные выкладки, запишем выражение для определителя этой системы уравнений:

$$\begin{aligned} \Delta = & -\rho C_T^2 \rho_1 C_t^2 \kappa_0^2 \left(R_0^2(k) \left\{ 1 + \exp[2i(\kappa_1 h + \kappa_t h)] \right\} \left[(k_t^2 - 2k^2)^2 - 4k^2 \kappa_1 \kappa_t \right]^2 \times \right. \\ & \times \left. \left[\exp(2i\kappa_1 h) + \exp(2i\kappa_t h) \right] 32k^2 \kappa_1 \kappa_t (k_t^2 - 2k^2)^2 \exp[i(\kappa_1 + \kappa_t) h] \right) \times \\ & \times \left\{ S_{LT}(k) - \left[R_{LT}(k) - \frac{\rho_0 \kappa_1}{\rho \kappa_0} k_T^4 \right] \exp(2i\kappa_0 h_0) \right\} - \rho C_T^2 \rho_0 C_t^2 k_t^4 \kappa_0 \kappa_1 \left(R_0(k) \left\{ 1 - \exp[2i(\kappa_1 h + \kappa_t h)] \right\} + \right. \\ & \left. + \left[(k_t^2 - 2k^2)^2 - 4k^2 \kappa_1 \kappa_t \right] \left[\exp(2i\kappa_1 h) - \exp(2i\kappa_t h) \right] \right) \times \\ & \times \left\{ S_{LT}(k) + \left[R_{LT}(k) - \frac{\rho_0 \kappa_L}{\rho \kappa_0} k_T^4 \right] \exp(2i\kappa_0 h_0) \right\}, \quad (1) \end{aligned}$$

где $\kappa_1 = \sqrt{k_1^2 - k^2}$, $\kappa_t = \sqrt{k_t^2 - k^2}$, $\kappa_L = \sqrt{k_L^2 - k^2}$, $\kappa_T = \sqrt{k_T^2 - k^2}$, $\kappa_0 = \sqrt{k_0^2 - k^2}$, $R_0(k) = (k_t^2 - 2k^2)^2 + 4k^2 \kappa_1 \kappa_t$, $R_{LT}(k) = (k_T^2 - 2k^2)^2 + 4k^2 \kappa_L \kappa_T$, $S_{LT} = R_{LT}(k) + \rho_0 \kappa_L k_T^4 / (\rho \kappa_0)$. Величина $k = \omega/C$, где C — фазовая скорость нормальной волны, отвечает модулю радиальной проекции волнового вектора в этой волне, $k_1 = \omega/C_1$, $k_t = \omega/C_t$ и $k_L = \omega/C_L$, $k_T = \omega/C_T$ — волновые числа продольной и сдвиговой волн в упругих слоях соответственно, $k_0 = \omega/C_0$ — волновое число звуковой волны в жидком слое, C_0 — фазовая скорость последней. Нули функций $R_0(k)$ и $R_{LT}(k)$ определяют радиальную проекцию волнового вектора для соответствующих волн Рэлея в слоях. Дисперсионное уравнение

$$\Delta = 0 \quad (2)$$

определяет нормальные волны, распространяющиеся в рассматриваемой модельной среде. Наибольший интерес с точки зрения методов дистанционной диагностики представляют незатухающие ($\text{Im } k = 0$) нормальные волны, являющиеся медленными по сравнению с объёмными волнами в соответствующих слоях. Поэтому $\text{Re } \kappa_1 = \text{Re } \kappa_t = \text{Re } \kappa_0 = 0$ и нормальные волны оказываются прижатыми к границам раздела сред. В определённых диапазонах частот возможно проявление нормальных волн на поверхности. Определив эти частотные диапазоны, можно построить схему дистанционной диагностики водоносного слоя, лежащего вблизи дневной поверхности.

Рассмотрим ряд предельных случаев, чтобы убедиться в корректности полученных выражений. Если волновая толщина жидкого слоя велика ($k_0 h_0 \gg 1$), то $\lim_{k_0 \rightarrow \infty} \exp(2i\kappa_0 h_0) = 0$ и правая часть выражения (1) содержит множитель $S_{LT}(k)$, равенство нулю которого определяет значения k для волны Стоунли (см., например, [8]) на границе раздела $z = h + h_0$ жидкого слоя и упругого полупространства. Дальнейшие преобразования показывают, что в случае толстого верхнего слоя в правой части выражения (1) выделяется также множитель, аналогичный $S_{LT}(k)$ с заменой во входящих в него величинах индексов L и T на индексы l и t соответственно. Этот

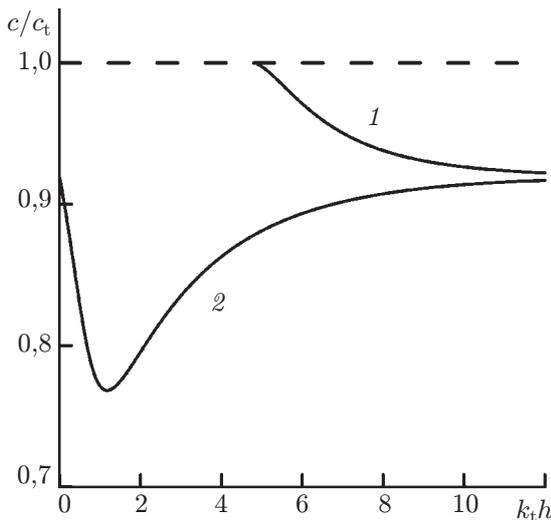


Рис. 2. Решение уравнения (2) для случая, рассмотренного в работе [21]

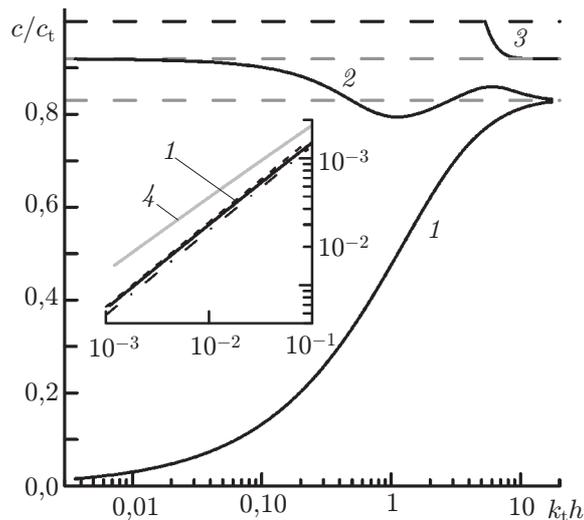


Рис. 3. Дисперсионные характеристики первых трёх мод при наличии слоя жидкости с конечной толщиной. Вставка показывает низкочастотную асимптотику моды 1

множитель отвечает волне Стоунли на границе $z = h$. Оставшийся множитель в предельном случае $\kappa_1 h \rightarrow \infty$ и $\kappa_t h \rightarrow \infty$ пропорционален величине $R_0(k)$, равенство нулю которой определяет волновое число k волны Рэлея на границе $z = 0$.

Результаты численного решения уравнения (2) при $C_T/C_L = 1/\sqrt{3}$ (соответствующий коэффициент Пуассона равен $\nu = 1/4$) и нулевой толщине водного слоя ($h_0 = 0$) представлены на рис. 2 (кривая 1 отвечает высшей моде волны Рэлея, 2 — основной). Они полностью соответствуют рис. 1 из работы [21]. Таким образом, в предельных случаях решение уравнения (2) приводит к известным результатам.

Перейдём к анализу решения уравнения (2) с выражением для определителя (1) в общем случае. Рассмотрим жидкий слой с конечной толщиной. Из общих соображений можно ожидать, что в области низких частот ($\kappa_0 h_0 \ll 1$) поведение основной моды волны Рэлея (кривая 2 на рис. 2) будет примерно таким же, как и для случая полупространства со скользящим контактом [21]. Результаты расчётов для слоя воды ($\rho_0 = 1 \text{ г/см}^3$, $C_0 = 1450 \text{ м/с}$) с толщиной $h_0 = 1 \text{ м}$, расположенного на глубине $h = 5 \text{ м}$ и окружённого упругими средами с параметрами $\rho = \rho_1 = 1,75 \text{ г/см}^3$ (плотный глинистый грунт), $C_1 = C_L = 450 \text{ м/с}$ и $C_t/C_1 = C_T/C_L = 1/\sqrt{3}$, приведены на рис. 3. Параметры упругих сред заданы близкими к таковым для сейсмоакустического полигона ИПФ РАН «Безводное» [20]. Горизонтальные серые штриховые линии на рис. 3 показывают значения скорости волны Рэлея в нижнем упругом полупространстве (верхняя линия) и скорости волны Стоунли на границе раздела жидкого и упругого полупространств (нижняя линия). Номера кривых 1, 2, 3 соответствуют номерам мод. Вставка показывает поведение моды 1 в области низких частот.

Мода 3 аналогична моде, показанной кривой 1 на рис. 2 (см. также [21]). Мода 2 аналогична фундаментальной моде волны Рэлея (кривая 2 на рис. 2) и имеет ту же низкочастотную асимптотику, а в области высоких частот фазовая скорость этой моды асимптотически стремится сверху к скорости волны Стоунли (см. рис. 3). Наконец, мода 1 отсутствовала в модельной задаче [21], и её появление в рассматриваемом случае связано с наличием жидкости между двумя упругими слоями. Моды 1 и 2 имеют фазовые скорости, меньшие скоростей объёмных волн, т. е. обе эти моды отвечают медленным неоднородным волнам. Эти моды не имеют критических частот, и по-

этому их анализ в широкой полосе частот позволяет определить наличие водного слоя и оценить его мощность и глубину залегания.

Уравнение (2) для моды 1 в области низких частот очень громоздко и неудобно для анализа. В этой области частотная зависимость фазовой скорости моды 1 имеет вид $C(\omega)/C_t \propto (\omega h/C_t)^{0,644}$. Эта формула близка к дисперсионной зависимости изгибных колебаний тонкой пластины, одна из поверхностей которой граничит с несжимаемой жидкостью, когда $C(\omega)/C_t \propto (\omega h/C_t)^{3/5}$. Дисперсионное уравнение для частот ниже частоты синхронизма изгибных волн в пластине и звуковых волн в жидкости имеет вид [22]

$$\omega^2 = \frac{Dk^5}{\rho_0 + \rho kh}, \quad (3)$$

где $D = Eh^3/[12(1 - \nu^2)]$ — цилиндрическая жёсткость пластины [22]. Сплошная серая линия 4 на вставке рис. 3 показывает дисперсионную зависимость фазовой скорости изгибной волны (3). Аналогичная дисперсионная зависимость получена в работе [19] при описании изгибных колебаний тонкого слоя льда, нагруженного на толстый слой воды.

Отметим отличие низкочастотной асимптотики для моды 1 от полученного в работе [23] решения для волны в слое жидкости между двумя упругими слоями с одинаковой толщиной. Для анализируемого случая малых волновых толщин ($kh \ll 1$ и $kh_0 \ll 1$) выражения из работы [23] в наших обозначениях имеют вид (в них имеется опечатка, исправленная ниже):

$$\frac{C(\omega)}{C_t} = (k_t h)^{2/3} \left[\frac{\rho h_0 (1 - \gamma^2)}{6\rho_0 h} \right]^{1/6}, \quad (4)$$

где $\gamma = C_t/C_1$. Зависимость (4) показана на вставке рис. 3 штрихпунктирной линией. Таким образом, при наличии упругого полупространства мода, связанная с наличием жидкого слоя, имеет бóльшую скорость по сравнению с рассмотренным в работе [23] случаем жидкого слоя между двумя пластинами. Кроме того, изменяется и её зависимость от частоты: показатель степени $2/3 \approx 0,667$ уменьшается до 0,644. Следует отметить, что дисперсионная зависимость для волны Крауклиса [24], или волны в водном слое между двумя тождественными упругими полупространствами, имеет вид

$$\frac{C(\omega)}{C_t} = (k_t h_0)^{1/3} \left[\frac{\rho (1 - \gamma^2)}{\rho_0} \right]^{1/3}. \quad (5)$$

Показатель степени равен $1/3$, и, как показывают расчёты, скорость этой волны больше, чем даваемая формулой (4). Рост скорости волны и изменение показателя степени в частотной зависимости (5) объясняются ниже.

Чтобы понять причины близости дисперсионной зависимости (2) для моды 1 к дисперсионной зависимости (3) для изгибных волн в пластине, нагруженной на безграничную несжимаемую жидкую среду, необходимо рассмотреть структуру этой моды. Расчёт этой структуры выполняется стандартно с использованием матричного пропагатора [7, 10], отвечающего определителю (1). На рис. 4 показаны нормированные глубинные распределения амплитуд проекций смещения и компонент тензора напряжений в модах 1 и 2 при одинаковых волновых толщинах верхнего слоя для каждой из мод ($kh = 2$). Нормировка проекций смещения проведена на максимальную величину u_z или u_r в рассматриваемом диапазоне изменения глубины, а нормировка компонент тензора напряжений — на максимальное значение одной из значимых его компонент в указанном диапазоне. Зависимости $u_z(z)$ на рис. 4 показывают, что обе моды отвечают движениям, близким к симметричным (мода 2 соответствует волне Рэлея) и антисимметричным (мода 1 соответствует

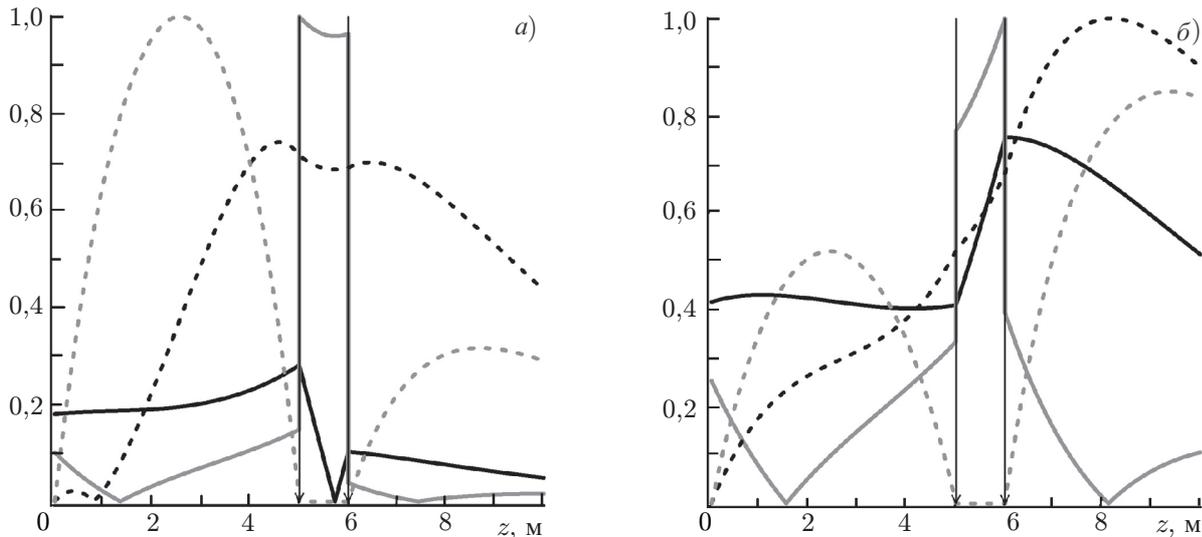


Рис. 4. Структура мод 1 (а) и 2 (б) для одинаковых волновых толщин верхнего слоя $kh = 2$. Вертикальные линии со стрелками показывают положение жидкого слоя по глубине. Чёрные сплошные линии соответствуют величине u_z , серые сплошные u_r , чёрные штриховые σ_{zz} , серые штриховые σ_{rz} (все величины нормированные)

водной волне, связанной с изгибными колебаниями верхнего слоя) относительно вертикальной проекции смещения u_z в жидком слое. Мода 1 характеризуется максимальными радиальными смещениями в жидкости из-за несжимаемости последней и малой волновой толщины слоя. Мода 2 отвечает волне Рэлея, и в этом случае имеет место близкое к синхронному перемещение верхнего и нижнего слоев (нули функции $|u_z(z)|$, как и в случае моды 1, отсутствуют). При этом имеет место более медленное вертикальное перемещение в верхнем слое по сравнению со смещением полупространства за счёт передачи энергии жидкости (т.е. локальное возрастание радиальной компоненты смещения в жидком слое).

Нетрудно видеть, что вертикальные и горизонтальные компоненты смещения на дневной поверхности в обеих модах существенно отличаются от нуля. Значимое отличие вертикальной компоненты смещения от нуля означает эффективное возбуждение соответствующей нормальной моды при использовании наиболее просто реализуемого вертикального источника силы. Характер распределения смещений в моде 1 объясняет причину относительной близости её дисперсионной зависимости в области низких частот к дисперсионной зависимости для тонкой пластины, граничащей с жидкостью. Действительно, из-за несжимаемости жидкости и экспоненциального затухания возмущений при удалении от пластины присоединённая масса жидкости для единицы площади пластины оказывается равной ρ_0/k . В области низких частот, когда $kh \ll 1$, силы инерции из-за движения жидкости больше сил инерции из-за движения самой пластины, и это приводит к появлению пятой степени волнового числа в дисперсионном уравнении (3).

При наличии тонкого слоя несжимаемой жидкости и неподвижного упругого полупространства небольшие вертикальные смещения верхней границы жидкости приводят к существенным радиальным смещениям в жидкости, необходимым для обеспечения выполнения условия несжимаемости. Предполагая нижнее полупространство неподвижным, нетрудно связать радиальную проекцию смещения с вертикальным перемещением u_{z0} границы $z = h$:

$$\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{u_{z0}}{h_0}, \tag{6}$$

где при оценке эффектов ближнего поля производной по радиальной координате можно прене-

бречь.

Кинетическая энергия движения жидкости определяется интегралом от квадрата производной по времени радиального смещения по объёму цилиндра с радиусом порядка $\lambda/4$ [25] и высотой h_0 , где $\lambda = 2\pi/k$ — длина волны. Присоединённая масса, приведённая к единице площади пластины, составит $\rho_0\pi^2/(16k^2h_0)$. Соответствующее дисперсионное уравнение примет аналогичный (3) вид с небольшими изменениями (замена знака равенства на знак порядка связана с приближённым характером выполненных оценок):

$$\omega^2 \sim \frac{Dk^6h_0}{\pi^2\rho_0/16 + \rho k^2hh_0}. \quad (7)$$

В области низких частот ($kh \ll 1, kh_0 \ll 1$) уравнение (7) отвечает дисперсионной характеристике $\omega^2 \sim 16Dh_0k^6/(\pi^2\rho_0)$, или частотной зависимости фазовой скорости нормальной моды

$$\frac{C(\omega)}{C_t} \sim (k_t h)^{2/3} \left(\frac{8\rho h_0}{3\pi^2\rho_0 h} \right)^{1/6}. \quad (8)$$

График функции (8) показан на вставке рис. 3 штриховой линией. Отметим, что, несмотря на грубый характер приведённой выше оценки, зависимости (8) и (4) оказались очень близкими. Таким образом, физическая природа нормальной моды 1 понятна. Напомним, что при выводе выражения (8) граница $z = h + h_0$ предполагалась неподвижной, что не выполняется для решения (2) при заданных параметрах сред (рис. 4). Водная волна является медленной, и поэтому реакция упругого полупространства на вертикальное смещение границы эквивалентно сжатию пружины. Большая скорость волны Крауклиса (5) по сравнению со скоростью волны (4) в водном слое между двумя упругими слоями с конечной толщиной и резкое изменение показателя степени в частотной зависимости связаны с существенным изменением реакции среды на перемещения жидкости и ростом жёсткости в соответствующем дисперсионном уравнении. Поэтому отмеченное выше уменьшение показателя степени с $2/3$ до $0,644$ можно обоснованно связать с вертикальным перемещением упругого полупространства, лежащего ниже жидкого слоя, и возникновением соответствующих сил реакции.

Важно отметить, что амплитудный множитель в имеющем простой физический смысл выражении (8) пропорционален отношению $\rho h_0/(\rho_0 h)^{1/6}$. Следовательно, если известна глубина залегания водоносного слоя h , то его мощность h_0 можно оценить по дисперсионной зависимости $C(\omega)$. Плотности грунта и жидкости в большинстве случаев, представляющих практический интерес, либо известны, либо могут быть определены независимо. Как правило, нахождение положения границ раздела слоёв в методах SASW и MASW является стандартно решаемой задачей [15]. Поэтому оценка мощности слоя жидкости может быть выполнена на основе анализа дисперсии моды 1 с использованием соотношения (8).

2. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПОЛУЧЕННОГО РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ДИАГНОСТИКИ

Возможность эффективно возбудить нормальные волны, с характеристиками которых связаны параметры среды, является принципиально важной для экспериментальной реализации. Необходимо вычислить комплексную амплитуду вертикальной компоненты смещения как функции частоты при использовании вибрационного вертикального источника силы (экспериментальные данные и описание источника приведены в работе [20]). Вычисление комплексных амплитуд

компонент вектора смещений не представляет труда, если известны соответствующие комплексные амплитуды скалярного $\Phi(r, z)$ и векторного $\Psi(r, z)$ потенциалов в каждом из слоёв:

$$u_r = \frac{\partial\Phi(r, z)}{\partial r} - \frac{\partial\Psi(r, z)}{\partial z}, \quad u_z = \frac{\partial\Phi(r, z)}{\partial z} + \frac{\partial\Psi(r, z)}{\partial r} + \frac{\Psi(r, z)}{r}. \tag{9}$$

Сами потенциалы равны интегралам Фурье—Ханкеля [7], подынтегральные выражения в которых для потенциалов в каждом слое из нетрудно представить в виде дробно-рациональных функций:

$$\begin{aligned} \Phi_n(r, z) &= \frac{F}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A_n^+ \exp(i\xi_n z) + A_n^- \exp(-i\xi_n z)}{\Delta(k)} k H_0^{(1)}(kr) dk, \\ \Psi_n(r, z) &= \frac{F}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B_n^+ \exp(i\zeta_n z) + B_n^- \exp(-i\zeta_n z)}{\Delta(k)} k H_1^{(1)}(kr) dk, \end{aligned} \tag{10}$$

где предполагается зависимость от времени вида $\exp(-i\omega t)$, $n = 1, 2, 3$ — номер слоя, A_n^+ , A_n^- , B_n^+ и B_n^- — алгебраические дополнения (определители 7-го порядка) матрицы, определяющей систему уравнений относительно комплексных амплитуд потенциалов нисходящих и восходящих волн ($B_2^+ = B_2^- = 0$, т. к. векторный потенциал в жидком слое тождественно равен нулю), $\xi_1 = \kappa_1$, $\xi_2 = \kappa_0$, $\xi_3 = \kappa_L$, $\zeta_1 = \kappa_t$, $\zeta_3 = \kappa_T$, зависимость $\Delta(k)$ определена выражением (1), $H_0^{(1)}(kr)$ и $H_1^{(1)}(kr)$ — функции Ханкеля 1-го рода нулевого и первого порядка соответственно.

Вычисление интегралов (10) осуществляется методом контурного интегрирования [7]. Вклад нормальных волн в общее волновое поле смещений в произвольной точке пространства определяется суммой вычетов подынтегральных функций в (10). Рассматриваемым нормальным волнам отвечают простые нули определителя Δ , что позволяет записать вклад нормальных волн в потенциалы (10) в простом виде и затем воспользоваться выражениями (9) для определения проекций вектора смещения.

На рис. 5 представлены частотные зависимости амплитуды вертикальной проекции вектора смещения \bar{u}_z для каждой из трёх нормальных волн, дисперсионные зависимости для которых приведены на рис. 3. Величина \bar{u}_z для каждой из нормальных мод равна амплитуде вертикальной компоненты вектора смещения u_z , нормированной на амплитуду вертикальной компоненты вектора смещения в волне Рэля. Последняя возбуждается вертикальной силой, приложенной к

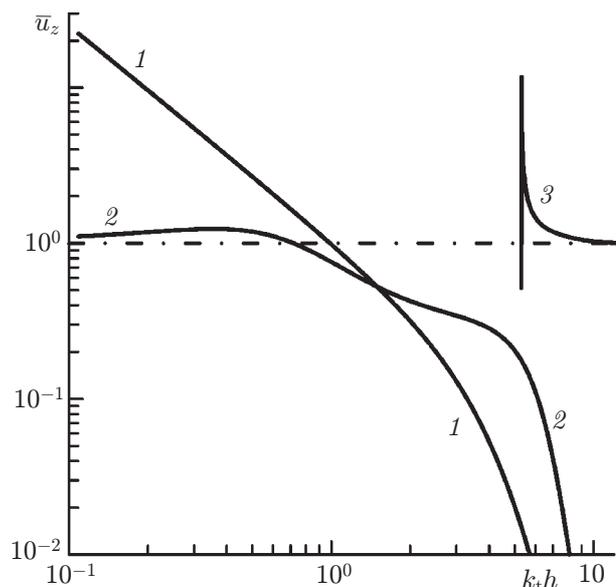


Рис. 5. Частотные зависимости нормированной амплитуды вертикальной компоненты смещения на дневной поверхности для трёх нормальных мод (нумерация совпадает с рис. 3)

однородному полупространству с параметрами ρ_1 , C_1 и C_t . Хорошо известно, что вертикальная сила эффективно возбуждает волну Рэля в однородном упругом полупространстве [13], и поэтому анализ величин \bar{u}_z позволяет получить представление об эффективности возбуждения нормальных мод в рассматриваемой нами модельной среде.

Во-первых, рис. 5 показывает высокую эффективность возбуждения мод 1 и 2 в широкой полосе частот, где в наибольшей степени проявляются связанные со строением среды особенности

дисперсионных характеристик волн. Во-вторых, следует обратить внимание на поведение функции $\bar{u}_z(k_t h)$ в области высоких ($k_t h \gg 1$) и низких ($k_t h \ll 1$) частот. Нетрудно видеть, что амплитуда моды 2, которая в области низких частот отвечает волне Рэлея, асимптотически стремится к амплитуде волны Рэлея в однородном упругом полупространстве. В области высоких частот, где, как отмечено выше, моды 1 и 2 отвечают волнам Стоунли на соответствующих границах водного слоя, амплитуды этих мод стремятся к нулю из-за локализации возмущений вблизи указанных границ. Изменение величины u_z для мод 1 и 2 имеет место в области частот $k_t h \sim 1$, что позволяет оценить глубину залегания водоносного слоя. Мода 3 аналогична нормальным модам в волноводах [3]: для неё величина u_z равна нулю ниже граничной частоты и асимптотически приближается к соответствующей величине для волны Рэлея в однородном упругом полупространстве в области высоких частот. Рост величины u_z для моды 1 в области низких частот связан со значительным влиянием присоединённой массы, обусловленной движением жидкости (см. обсуждение соотношения (7) выше).

Таким образом, все нормальные моды в рассматриваемой модельной среде возбуждаются эффективно, что обеспечивает возможность анализа их дисперсионных зависимостей для определения структуры среды. Глубину залегания водоносного слоя можно оценить по частоте ($k_t h \sim 1$, см. рис. 5), начиная с которой величины u_z для нормальных волн начинают существенно уменьшаться. Этой же частоте отвечают изменения в дисперсионных зависимостях на рис. 3, что также позволяет оценить глубину водоносного слоя. Его мощность, как следует из выражения (8), можно приблизительно найти по коэффициенту пропорциональности в дисперсионной зависимости для моды 1 в области низких частот $k_t h \ll 1$. Эти соображения могут быть положены в основу численного решения задачи оптимизации параметров аналогично алгоритмам, используемым в методах SASW и MASW [15].

Как отмечалось выше, в работе [17] для устранения неоднозначности в решении задач реконструкции приповерхностного строения грунта, возникающей из-за неопределённости коэффициента Пуассона, было предложено использовать частотную зависимость величины $|u_r/u_z|$. Покажем, что использование при частотном анализе поверхностных волн (в методах SASW и MASW) этой зависимости действительно имеет смысл и позволяет расширить возможности реконструкции параметров слоистых сред. Рассмотрим частотную зависимость величины u_r/u_z для приведённого выше численного примера, который далее отвечает модели 1, и для случая, когда при сохранении равенства $C_t = C_T$ скорость продольной волны в верхней среде становится больше (модель 2): $C_t/C_1 = 1/2$ и $C_T/C_L = 1/\sqrt{3}$, т. е. коэффициент Пуассона ν верхнего слоя равен $1/3$, а для нижнего полупространства $\nu = 1/4$. Тем самым моделируется увеличение коэффициента Пуассона, вызванное для реальных грунтов, например, просачиванием жидкости из жидкого слоя в поры окружающих его пространств. Модели насыщения пористых сред жидкостью представлены, например, в работе [26], и позволяют оценить содержание жидкости в таких средах.

На рис. 6а изображены дисперсионные зависимости c/c_t для моделей 1 и 2. На рис. 6б представлены соответствующие им частотные зависимости величины $|u_r/u_z|$ на дневной поверхности. Дополнительное пояснение приведено в подписи рис. 6. Также для сравнения приведены результаты расчёта для среды, составленной из двух упругих слоев с указанными выше параметрами при отсутствии проскальзывания между ними (условие «склейки»). Для построения этих зависимостей была использована численная схема с использованием стандартного матричного описания [7], верифицированная путём сравнения результатов вычислений с рассмотренным выше аналитическим решением. Граница раздела сред задавалась на глубине $z = h + h_0/2$. Соответствующие зависимости показаны на рис. 6 серыми штриховыми линиями с длинными штрихами. Поскольку отношение скорости волны Рэлея к скорости сдвиговой волны является монотонно

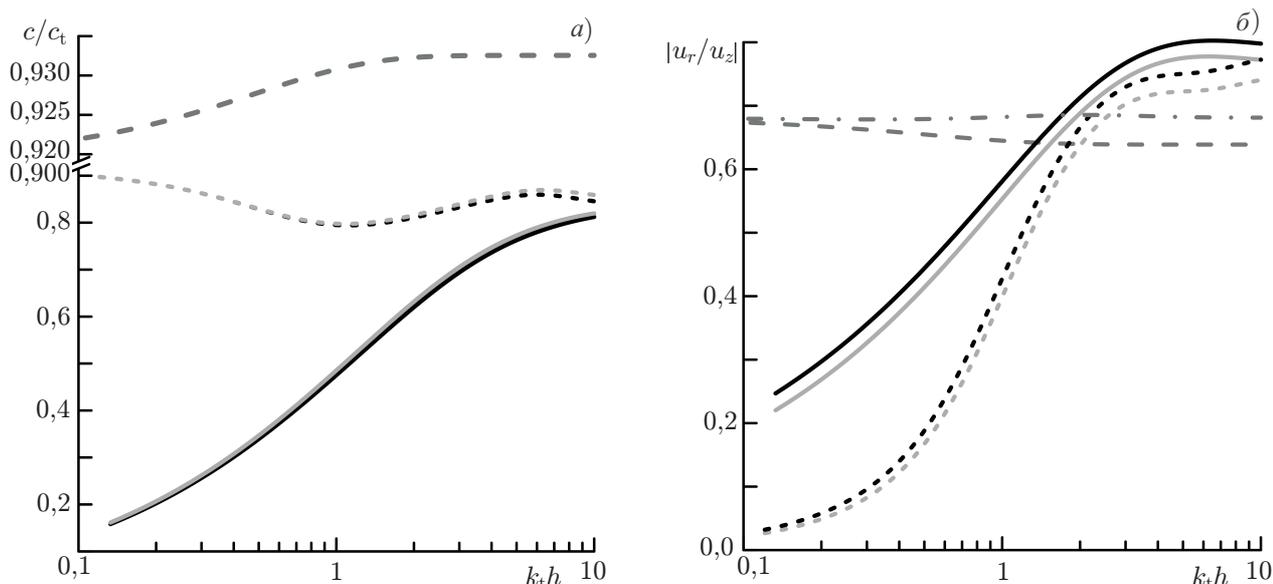


Рис. 6. (а) Дисперсионные зависимости c/c_t для рассматриваемого набора модельных сред. (б) Частотные зависимости величины $|u_r/u_z|$ для рассматриваемого набора модельных сред. Сплошные линии (чёрные и серые) отвечают моде 1, штриховые с коротким штрихом (чёрные и серые) — моде 2, при этом чёрные сплошные и штриховые с коротким штрихом соответствуют случаю одинаковых упругих слоёв, серые сплошные и штриховые с коротким штрихом — случаю упругих слоёв с разными коэффициентами Пуассона

возрастающей функцией коэффициента Пуассона, наблюдается небольшое увеличение скорости волны Рэля с ростом частоты.

Для модели двухслойной среды диапазон изменений скорости составляет около 1 %. Если коэффициент Пуассона неизвестен или задаётся априори, как это делается в стандартных приложениях SASW и MASW, то эти изменения можно ошибочно связать с изменением скорости сдвиговой волны. Напомним, что в рассматриваемых моделях скорость волны сдвига неизменна по глубине. На рис. 6б штрихпунктирной линией показана зависимость отношения $|u_r/u_z|$ от частоты в случае упругих сред с равными коэффициентами Пуассона. При этом относительные изменения скорости волны Рэля составляли также около 1%, но были обусловлены отношениями $C_t/C_T = 1,01$ и $C_1/C_L = 1,01$ для граничащих слоя и полупространства. Нетрудно видеть, что штрихпунктирная линия отвечает практически постоянному значению $|u_r/u_z|$ во всём диапазоне изменения волновой толщины слоя. Соответствующая зависимость при наличии указанного выше отличия коэффициентов Пуассона характеризуется изменением величины $|u_r/u_z|$ в пределах приблизительно 3 %, что позволяет диагностировать вариацию этого коэффициента. Отметим, что по опыту экспериментальных исследований отношение сигнал/шум при работе с когерентным вибрационным источником составляет 40 дБ и более [20], что достаточно для регистрации изменений величины $|u_r/u_z|$ в указанных пределах.

Как видно из рис. 6а, отличия значений c/c_t для моделей 1 и 2 также невелики и составляют около 1 %. При этом изменение модуля отношений комплексных амплитуд проекций смещения для моделей 1 и 2 составляет около 4 % для первой моды и достигает 20 % в области низких частот для второй моды (см. рис. 6б). Как видно из рис. 5, в этой области частот обе моды характеризуются высокой эффективностью возбуждения вертикальным силовым источником. При наличии высокого отношения сигнал/шум (порядка 40 дБ) и возможности когерентного накопления сигналов [20] измерение величины $|u_r/u_z| \sim 5 \div 30$ % технически реализуемо. Таким образом,

совместный анализ дисперсионных и частотных зависимостей отношения амплитуд компонент вектора смещения дневной поверхности позволяет судить об особенностях строения среды. Появление моды 1, которая сильно возбуждается в области низких ($k_t h \ll 1$) частот (см. рис. 5), указывает на наличие жидкого слоя и, следовательно, является существенным диагностическим признаком.

Эффективность метода PASW для анализа изменений коэффициента Пуассона, вызванных насыщением пористой среды жидкостью, была продемонстрирована ранее экспериментально [27]. Проведённый выше анализ нормальных волн подтверждает качественные соображения, высказанные в работе [17], и является основой для построения схем диагностики водного слоя, расположенного вблизи поверхности.

ВЫВОДЫ

Подведём итог и выделим основные результаты выполненного исследования.

1) Решена задача о распространении волн в среде, моделирующей геологический разрез, в котором верхний слой грунта отделён от глубинных пород водоносным слоем.

2) Выполнен анализ дисперсионных зависимостей для нормальных волн, распространяющихся в рассматриваемой модельной среде. Выделены важные для практического использования особенности этих зависимостей.

3) Проведён анализ пространственной структуры нормальных волн, который указывает на возможность их эффективного возбуждения источником, размещённым на поверхности. Показана возможность дистанционной диагностики водоносного слоя и даны рекомендации по организации соответствующей схемы наблюдений.

Показано, что анализ частотной зависимости модуля отношения амплитуд вертикальной и горизонтальной компонент смещения на дневной поверхности, выполняемый совместно со стандартным анализом дисперсии поверхностных волн, существенно расширяет возможности реконструкции параметров слоистых сред методами, аналогичными SASW и MASW.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проекты 14-02-00695, 15-05-08196 и 15-45-02450), а также программы Президиума РАН IV.2.9. «Фундаментальные проблемы акустики искусственных и природных сред».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Методология обеспечения защиты урбанизированных территорий от природных и техногенных воздействий / Под ред. Е. В. Копосовой. Нижний Новгород: ННГАСУ, 2013. 596 с.
2. Ewing W. M., Jardetzky W. S., Press F. Elastic waves in layered media. New York.: McGraw-Hill, 1957. 380 p.
3. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.
4. Kennett B. L. N. Seismic wave propagation in stratified media. Cambridge: Cambridge Univ. Press., 1983. 342 p.
5. Уайт Дж. Э. Возбуждение и распространение сейсмических волн. М.: Недра, 1986. 263 с.
6. Молотков Л. А. Матричный метод в теории распространения волн в слоистых упругих и жидких средах. М.: Наука, 1984. 201 с.
7. Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология. Т. 1. М.: Мир, 1983. 519 с.
8. Разин А. В., Собисевич А. Л. Геоакустика слоистых сред. М.: Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта РАН, 2012. 210 с.

9. Петухов Ю. В., Разин А. В., Собисевич А. Л., Куликов В. И. Сейсмоакустические и акустико-гравитационные волны в слоистых средах. М.: Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта РАН. 2013. 280 с.
10. Jensen F. B., Kuperman W. A., Porter M. B., Schmidt H. Computational ocean acoustics. New York: Springer, 2011. 794 p.
11. Stokoe K. H., Rix G. R., Nazarian S. // Proc. 12th Int. Conf. Soil Mech. Found. Engng. 1989. V. 1. P. 331. Rio de Janeiro, Brasil, August 13–18.
12. Park C. B., Miller R. D., Xia J. // Geophysics. 1999. V. 64, No 3. P. 800.
13. Miller G. F., Pursey H. // Proc. Royal Society. London. 1954. V. A223. P. 521.
14. Коган С. Я. // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1963. Т. 7. С. 1000.
15. Xia J., Park C. B., Miller R. D. // Geophysics. 1999. V. 64, No 3. P. 691.
16. Maraschini M. A new approach for the inversion of Rayleigh and Scholte waves in site characterization. Ph.D. thesis. Torino: Torino Politechnic University, 2008. 276 p.
17. Konkov A. I., Lebedev A. V., Manakov S. A. // Handbook of Geomathematics. Heidelberg: Springer, 2014. P. 1.
18. Грудский С. М., Михалкович С. С., Хилько А. И. // Акуст. журн. 1997. Т. 43, № 5. С. 630.
19. Преснов Д. А., Жостков Р. А., Гусев В. А., Шуруп А. С. // Акуст. журн. 2014. Т. 60, № 4. С. 426.
20. Авербах В. С., Лебедев А. В., Марышев А. П., Таланов В. И. // Акуст. журн. 2008. Т. 54, № 4. С. 607.
21. Заславский Ю. М., Митякова О. И. // Акуст. журн. 1992. Т. 38, № 2. С. 296.
22. Junger M. C., Feit D. Sound, structures and their interaction. Boston: Massachusetts Inst. of Technology, 1986. 448 p.
23. Korneev V., Danilovskaya L., Nakagawa S., Moridis G. // Geophysics. 2014. V. 79, No 4. P. L33.
24. Крауклис П. В. // Прикладная математика и механика. 1962. Т. 6. С. 1111.
25. Скучик Е. Простые и сложные колебательные системы. М.: Мир, 1971. 557 с.
26. Mavko G., Mukeyi T., Dvorkin J. The rock physics handbook. Tools for seismic analysis in porous media. Cambridge: Cambridge University Press, 2009. 524 p.
27. Konkov A. I., Lebedev A. V., Manakov S. A. // J. Acoust. Soc. Amer. 2015. V. 138, No 3. Pt. 2. P. 1938.

Поступила в редакцию 29 февраля 2016 г.; принята в печать 1 апреля 2016 г.

ANALYSIS OF SURFACE WAVES IN AN ELASTIC MEDIUM WITH AQUIFER

A. I. Kon'kov, A. V. Lebedev, and A. V. Razin

We study propagation of seismoacoustic waves in a three-layer medium consisting of a homogeneous isotropic solid deformable layer loaded on a uniform liquid layer above a homogeneous isotropic solid half-space. This medium models a geological section in which the top layer of the soil is separated from the deep rock by an aquifer. The dispersion relation is obtained and analyzed, and its solutions for cases that are important from the practical point of view are presented. Features of the dispersion curves and spatial distribution of the mode fields made it possible not only to reveal the existence of an aquifer under the top soil layer, but also determine its thickness and depth. It is shown that the ratio of vertical and horizontal components of the displacement vector measured on the Earth's surface is a significant parameter for solving the geological medium reconstruction problem.