

УДК 534.222

ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В МИКРОНЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ С РАЗНОМОДУЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ И РЕЛАКСАЦИЕЙ

В. Е. Назаров *, *С. Б. Кияшко*, *А. В. Радостин*

Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород, Россия

Приведены результаты аналитического и численного исследования распространения продольных акустических волн в микронеоднородных средах с разномодульной нелинейностью и релаксацией. Получены решения для эволюции профилей и спектральных характеристик первоначально гармонических волн.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время в акустике всё большее внимание уделяется изучению волновых процессов в микронеоднородных (или мезоскопических) твёрдотельных средах [1–3], нелинейность которых аномально высока по сравнению с однородными твёрдыми телами, описываемыми пятиконстантной теорией упругости [4]. Высокая нелинейность микронеоднородных сред определяется нелинейными дефектами их структуры: трещинами, дислокациями, границами зёрен и т. д., которые проявляют также релаксационные свойства. Релаксация дефектов приводит к «невязкого» типа поглощению и к дисперсии скорости звука, а также к инерционной, т. е. частотно-зависимой, нелинейности среды: при увеличении частоты акустической волны нелинейность микронеоднородных сред уменьшается [5]. «Аномальность» подобных сред проявляется ещё и в том, что часто их уравнения состояния (т. е. зависимости $\sigma = \sigma(\varepsilon)$, где σ — напряжение, ε — деформация) являются неаналитическими, в частности некоторые материалы являются разномодульными [6–8]. Распространение акустических волн в однородных разномодульных материалах исследовалось во многих работах [9–14], однако влияние релаксации на эволюцию акустических волн в микронеоднородных разномодульных средах не рассматривалось.

В данной работе проводится исследование распространения продольных упругих волн в микронеоднородных средах с разномодульной нелинейностью и релаксацией, в результате которого получены решения для эволюции профилей и спектральных характеристик первоначально гармонических волн.

1. РЕОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ, УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ И ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ МИКРОНЕОДНОРОДНОЙ РАЗНОМОДУЛЬНОЙ СРЕДЫ С РЕЛАКСАЦИЕЙ

Описание волновых процессов в микронеоднородных средах проводится в рамках гомогенного приближения. В этом приближении предполагается, что размеры дефектов много больше атомарных размеров, но много меньше длины волны Λ , на длине волны находится много дефектов, а их распределение в пространстве статистически однородно. Таким образом, вещество в среднем можно считать «акустически однородным» или «макрооднородным» на участках, больших по сравнению с размерами дефектов, но малых по сравнению с длиной волны [15, 16]. В длинноволновом приближении микронеоднородные среды можно рассматривать как сплошные однородные, при этом рассеяния волн на микродефектах не возникает.

* nazarov@hydro.appl.sci-nnov.ru

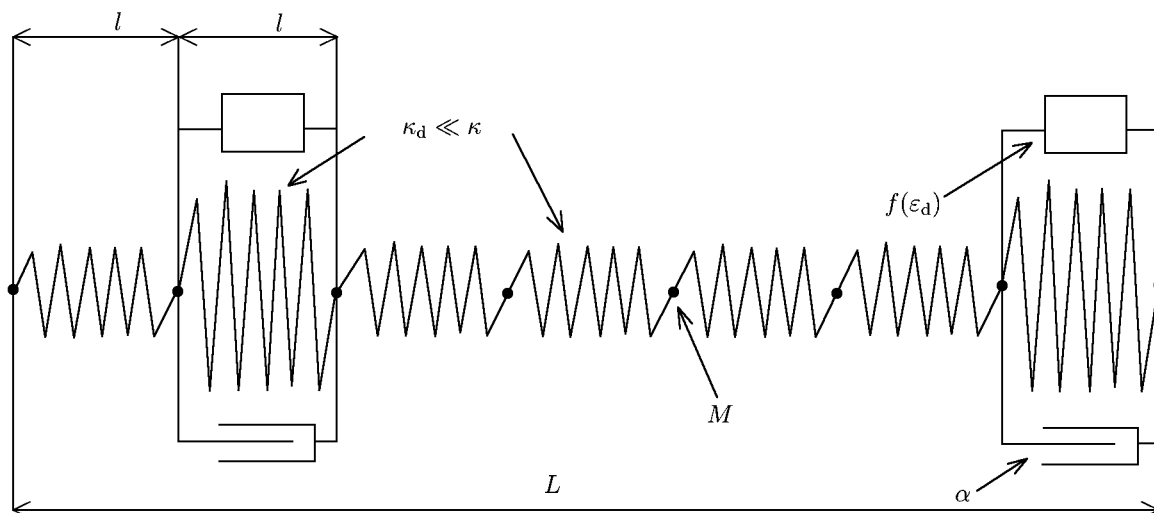


Рис. 1. Реологическая модель микронеоднородной нелинейной среды с релаксацией. Для разномодульной среды $f(\varepsilon_d) = -\xi E \gamma |\varepsilon_d|$

Реологическая модель микронеоднородной разномодульной среды с релаксацией [3] показана на рис. 1. Она состоит из одномерной неоднородной цепочки последовательно соединённых точечных масс M , линейных идеально упругих пружинок и относительно редких нелинейных (в данном случае, разномодульных) вязко-упругих элементов. В этой модели однородные участки цепочки, состоящие из масс и жёстких упругих пружинок (с коэффициентами упругости κ), соответствуют областям бездефектного идеально упругого твёрдого тела, а части цепочки, состоящие из нелинейных вязко-упругих элементов, соответствуют «мягким» нелинейным дефектам с линейной упругостью $\kappa_d = \xi \kappa \ll \kappa$, где ξ — относительная упругость дефектов, $\xi \ll 1$. Здесь предполагается, что жёсткие и мягкие элементы такой цепочки имеют одинаковую длину $l \ll L$, при этом число всех элементов на длине L равно N ($L = Nl \gg l$), а число дефектов $N_d = \nu N$, где безразмерный коэффициент ν есть относительная (линейная) концентрация дефектов ($\nu = N_d/N$). В соответствии с реологической моделью, уравнение состояния одного разномодульного дефекта даётся формулой

$$\sigma(\varepsilon_d) = \xi E (\varepsilon_d - \gamma |\varepsilon_d|) + \alpha \dot{\varepsilon}_d. \tag{1}$$

Здесь $E = \kappa l$ — модуль упругости бездефектной среды, ε_d — деформация дефекта, α и γ — коэффициент вязкости и параметр разномодульной нелинейности соответственно, $|\gamma| \ll 1$. Для определённости, будем полагать, что $\gamma > 0$.

При выполнении условия $\omega \ll (\xi \kappa / M)^{1/2}$, где ω — частота деформирования, и малой концентрации дефектов ($m = \nu / \xi \ll 1$) уравнение состояния микронеоднородной среды имеет вид [3, 5]

$$\sigma(\varepsilon) = E \{ \varepsilon - \nu R(\varepsilon) - \nu \gamma \xi R[|R(\varepsilon)|] \}, \tag{2}$$

$$R(\varepsilon) = \frac{\Omega}{\xi} \int_{-\infty}^t \varepsilon(t_1) \exp[-\Omega(t - t_1)] dt_1, \quad \varepsilon(R) = \frac{\xi}{\Omega} \frac{\partial R}{\partial t} + \xi R, \quad \gamma \xi R[|R(\varepsilon)|] \ll R(\varepsilon). \tag{3}$$

Здесь $\Omega = \xi E / \alpha$ — релаксационная частота дефекта, ν — концентрация дефектов ($\nu \ll 1$), $|\varepsilon| \ll \ll |\gamma| \ll 1$.

Уравнение состояния (2) содержит два релаксационных слагаемых: линейное $\nu R(\varepsilon)$ и нелинейное $\nu\gamma\xi R[|R(\varepsilon)|]$. При этом нелинейное слагаемое, в отличие от случая однородных сред [17, 18], не совсем независимо от линейного: нелинейность микро неоднородной среды зависит от её линейных релаксационных свойств. Нелинейное слагаемое становится независимым от линейного только при $\alpha \rightarrow 0$, когда $\Omega \rightarrow \infty$. В этом случае из уравнения (2) получаем

$$\sigma(\varepsilon) = E[(1 - m)\varepsilon - \gamma m |\varepsilon|]. \quad (4)$$

Таким образом, параметром нелинейности разномодульной микро неоднородной среды в квазистатике (т. е. при $\omega \ll \Omega$) является величина $\gamma m / (1 - m) \approx \gamma m \ll 1$. Линейная и нелинейная релаксация микро неоднородных сред обусловлены вязкостью дефектов, причём нелинейная релаксация проявляется дважды: первый раз за счёт линейной, поскольку нелинейная функция $|R(\varepsilon)|$ в уравнении (2) определяется линейным откликом дефектов (3), и второй раз за счёт релаксации самой нелинейной функции $|R(\varepsilon)|$. Именно вязкость дефектов и является причиной дисперсии, т. е. частотной зависимости, линейных и нелинейных акустических свойств микро неоднородных сред. С ростом частоты ω акустического воздействия «жесткость» вязко-упругих дефектов увеличивается, а их деформация уменьшается; это приводит к увеличению линейного модуля упругости и коэффициента затухания среды, а также к уменьшению её нелинейности на высоких частотах, т. е. к дисперсии нелинейности.

Подставим уравнение состояния (2) в уравнение движения $\rho \partial^2 U / \partial t^2 = \partial \sigma(\varepsilon) / \partial x$ [4], $\varepsilon(x, t) = \partial U(x, t) / \partial x$, где U — смещение, ρ — плотность. В результате получим следующее волновое уравнение для ε :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} - C^2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} = -\nu C^2 \left[\frac{\partial^2 R(\varepsilon)}{\partial x^2} + \gamma \xi \frac{\partial^2 R[|R(\varepsilon)|]}{\partial x^2} \right], \quad (5)$$

где $C = (E/\rho)^{1/2}$ — скорость волны в среде без дефектов.

Граничное условие зададим в виде $\varepsilon(x = 0, t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t)$. Подставляя в линеаризованное ($\gamma = 0$) уравнение (5) $\varepsilon(x, t) \propto \exp\{j[\omega t - k(\omega)x]\}$, получим выражения для фазовой скорости $C = C(\omega)$ и коэффициента затухания $\beta = \beta(\omega)$ волны с частотой ω :

$$C(\omega) = C_0 \left[1 + \frac{m}{2} \frac{(\omega/\Omega)^2}{1 + (\omega/\Omega)^2} \right], \quad \beta(\omega) = \frac{m\Omega}{2C_0} \frac{(\omega/\Omega)^2}{1 + (\omega/\Omega)^2}. \quad (6)$$

Здесь $C_0 = C/[1 + (m/2)]$ — низкочастотный предел скорости волны.

Переходя в уравнении (5) к переменным $\tau = t - x/C_0$, $x_{\text{new}} = x$, получим одноволновое эволюционное уравнение

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} - \frac{\nu}{2C_0\Omega} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} R(\varepsilon) + \frac{\nu\gamma\xi}{2C_0} \frac{\partial}{\partial \tau} R[|R(\varepsilon)|] = 0, \quad (7)$$

где

$$\varepsilon(R) = \frac{\xi}{\Omega} \frac{\partial R}{\partial \tau} + \xi R.$$

Прежде, чем приступить к решению этого уравнения, оценим отношения нелинейного слагаемого к линейным, как это принято в теории нелинейных волн [17]:

$$\frac{\nu\gamma\xi}{2C_0} \frac{\partial \{R[|R(\varepsilon)|]\} / \partial \tau}{\partial \varepsilon / \partial x} \approx \frac{\gamma m \Omega^2}{2(\omega^2 + \Omega^2)}, \quad (8)$$

$$\text{Re} = \gamma \xi \Omega \frac{\partial \{R[|R(\varepsilon)|]\} / \partial \tau}{\partial^2 R(\varepsilon) / \partial \tau^2} \approx \frac{\gamma \Omega^2}{\omega(\omega^2 + \Omega^2)^{1/2}}, \quad (9)$$

где Re — акустическое число Рейнольдса для микронеоднородной разномодульной среды с релаксацией. Из выражений (8) и (9) видно, что для разномодульной среды эти отношения не зависят от амплитуды волны. Из выражения (9) также следует, что для заметного развития нелинейных процессов в микронеоднородной разномодульной среде необходимо выполнение условия

$$Re = \frac{\gamma\Omega^2}{\omega(\omega^2 + \Omega^2)^{1/2}} > 1.$$

Таким образом, наиболее благоприятный с точки зрения максимального проявления нелинейных свойств среды режим будет иметь место для низкочастотных волн ($\omega \ll \Omega$), когда $Re = \gamma\Omega/\omega > 1$. В высокочастотном диапазоне, при $\omega \geq \Omega$, проявление нелинейных процессов будет мало заметно (поскольку $Re \ll 1$) даже на больших расстояниях x .

Из довольно сложного интегро-дифференциального уравнения (7), после некоторых преобразований [17], заключающихся в умножении на Ω^{-1} и дифференцировании по τ уравнения (7) и сложении полученного уравнения с исходным, получим более простые эволюционные уравнения для деформации $\varepsilon = \varepsilon(x, \tau)$ и «релаксатора» $R = R(\varepsilon)$:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{1}{\Omega} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \tau \partial x} - \frac{m}{2C_0\Omega} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \tau^2} + \frac{\gamma m \xi}{2C_0} \frac{\partial |R(\varepsilon)|}{\partial \tau} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\Omega^2} \frac{\partial^2 R}{\partial \tau^2} + \frac{2}{\Omega} \frac{\partial R}{\partial \tau} + R \right] - \frac{m}{2C_0} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{\Omega^2} \frac{\partial^2 R}{\partial \tau^2} + \frac{1}{\Omega} \frac{\partial R}{\partial \tau} - \gamma |R| \right] = 0. \quad (11)$$

В безразмерных переменных $Q(z, \theta) = R(x, \theta)/R_0$, $R_0 = \varepsilon_0\mu/(\xi\sqrt{1+\mu^2})$, $e(z, \theta) = \varepsilon(z, \theta)/\varepsilon_0$, $\theta = \omega\tau$, $\mu = \Omega/\omega$, $z = \gamma m \omega x/(2C_0)$ уравнения (10) и (11) имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[e + \frac{1}{\mu} \frac{\partial e}{\partial \theta} \right] - \frac{1}{\gamma\mu} \frac{\partial^2 e}{\partial \theta^2} = - \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} \frac{\partial |Q(e)|}{\partial \theta}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\mu^2} \frac{\partial^2 Q}{\partial \theta^2} + \frac{2}{\mu} \frac{\partial Q}{\partial \theta} + Q \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{\gamma\mu^2} \frac{\partial^2 Q}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\gamma\mu} \frac{\partial Q}{\partial \theta} - |Q| \right] = 0, \quad (13)$$

где

$$e(z, \theta) = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} \left[\frac{\partial Q(z, \theta)}{\partial \theta} + \mu Q(z, \theta) \right].$$

В линейном приближении ($\gamma = 0$) уравнения (5), (7) и (10)–(13) соответствуют волновым уравнениям для однородной среды с релаксацией [17, 18]. Однако, в отличие от аналогичных уравнений для однородной среды с безынерционной квадратичной нелинейностью и релаксацией [17, 18], уравнения (5), (7) и (10)–(13) характеризуются инерционной, т. е. частотно-зависимой разномодульной нелинейностью. Из-за этих отличий закономерности нелинейных волновых процессов в однородной и микронеоднородной средах будут различными. Покажем это на простом примере распространения гармонической волны и генерации её высших гармоник.

2. ГЕНЕРАЦИЯ ГАРМОНИК

Уравнение (13) будем решать методом возмущений, полагая, что

$$Q(z, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(z) \sin[n\theta + n\Psi_n(z)], \quad \sum_{n=2}^{\infty} q_n^2(z) \ll q_1^2(z),$$

$$|Q(z, \theta)| \approx q_1(z) |\sin[\theta + \Psi_1(z)]| = q_1(z) \left(\frac{2}{\pi} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(4n^2 - 1)} \cos\{2n[\theta + \Psi_1(z)]\} \right).$$

В этом приближении в разномодульной среде генерируются только чётные гармоники (поскольку нелинейность чётная), при этом все они определяются волной на основной частоте.

На малых расстояниях $z \ll \gamma/\mu$ и $z \ll \gamma/(2p)$ волна $e(z, \theta)$ содержит основную гармонику (её амплитуда экспоненциально уменьшается с увеличением z) и p высших чётных гармоник (их амплитуды растут пропорционально z):

$$e(z, \theta) = \exp\left[-\frac{\mu z}{\gamma(1 + \mu^2)}\right] \sin\left[\theta + \frac{z}{\gamma(1 + \mu^2)}\right] + \frac{8z}{\pi \sqrt{1 + \mu^{-2}}} \sum_{n=1}^p \frac{2n}{(4n^2 - 1) \sqrt{1 + 4n^2 \mu^{-2}}} \sin\left[2n\theta - 2n \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\mu}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{2n}{\mu}\right)\right]. \quad (14)$$

Из выражения (14) следует, что амплитуда $\varepsilon_{2n}(x)$ деформации для гармоники с номером $2n$ определяется выражением $\varepsilon_{2n}(x) \propto \gamma \varepsilon_0 n k x / [(4n^2 - 1) N_{2n}(\omega/\Omega)]$, где $k = \omega/C_0$, $N_{2n}(\omega/\Omega) = [1 + (\omega/\Omega)^2]^{1/2} [1 + (2n\omega/\Omega)^2]^{1/2} \geq 1$. Для сравнения, в однородной среде с безынерционной квадратичной нелинейностью амплитуда первой гармоники определяется тем же выражением (14) ($\varepsilon_1(x) = \varepsilon_0 \exp[-\beta(\omega)x]$), а амплитуда второй — выражением, отличным от (14): $\varepsilon_2(x) \propto \Gamma \varepsilon_0^2 k x$, где $\Gamma = \text{const}$ — параметр квадратичной нелинейности [17].

Таким образом, эффективный параметр нелинейности микро неоднородной разномодульной среды с релаксацией для процесса генерации гармоники с номером $2n$ определяется выражением $\gamma_{\text{eff}}(\omega/\Omega) = \gamma N_{2n}^{-1}(\omega/\Omega)$, т. е. с ростом частоты ω первичной волны из-за релаксации параметр нелинейности уменьшается в $N_{2n}(\omega/\Omega)$ раз. Это свойство — дисперсия нелинейности — характерно и для других микро неоднородных сред с релаксацией. Вместе с линейными релаксационными поглощением и дисперсией фазовой скорости дисперсия нелинейности ограничивает крутизну фронта волны и предотвращает образования в ней неоднозначностей. Далее, в разделе 4, мы покажем это на примере стационарной волны.

На больших расстояниях, при

$$z \gg \frac{\gamma(4 + \mu^2)(1 + \mu^2)}{3\mu^3} \quad \text{и} \quad \frac{16\gamma \sqrt{1 + \mu^2}}{\pi} \ll 1,$$

волна $e(z, \theta)$ определяется выражением

$$e(z, \theta) = \exp\left[-\frac{\mu z}{\gamma(1 + \mu^2)}\right] \left(\sin\left[\theta + \frac{z}{\gamma(1 + \mu^2)}\right] + \frac{16\gamma \sqrt{1 + \mu^2}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n^2 - 1)^2} \sin\left\{2n\left[\theta + \frac{z}{\gamma(1 + \mu^2)} - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\mu}\right)\right]\right\} \right). \quad (15)$$

В этом случае соотношения между амплитудами и фазами гармонических составляющих волны не зависят от расстояния. Это означает, что на больших расстояниях (при $16\gamma \times \sqrt{1 + \mu^2}/\pi \ll 1$) первоначально гармоническая волна стремится к самоподобной, т. е. не меняющей своей формы при распространении. При этом коэффициент затухания и скорость распространения гармоник (и волны в целом) определяются выражениями

$$\beta(\mu) = \frac{m\Omega}{2C_0(1 + \mu^2)} \quad \text{и} \quad C(\mu) = \frac{C_0}{1 - m/2(1 + \mu^2)}. \quad (16)$$

3. СТАЦИОНАРНАЯ ВОЛНА

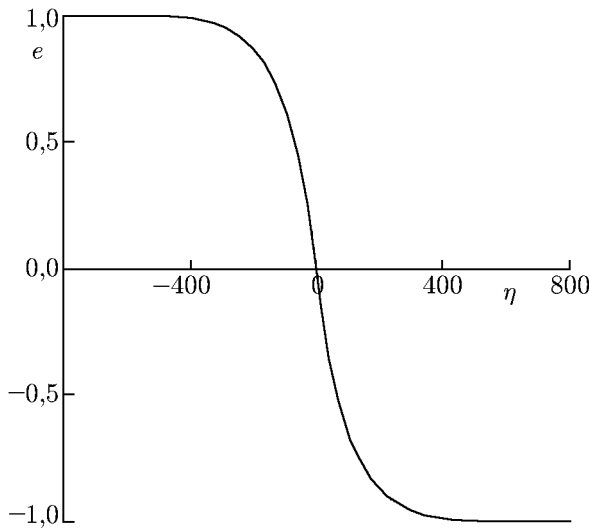


Рис. 2. Форма стационарной волны $e = e(\eta)$ при $\gamma = 10^{-2}$

Рассмотрим стационарную волну типа симметричного скачка, когда $\varepsilon(z, \eta = \infty) = -\varepsilon_0$, $\varepsilon(z, \eta = -\infty) = \varepsilon_0$, $R(z, \eta = \infty) = -R_0 = -\varepsilon_0/\xi$, $R(z, \eta = -\infty) = R_0 = \varepsilon_0/\xi$, $\eta = \Omega\tau$. Стационарная волна является самоподобной, т. к. её форма не меняется при распространении. Полагая в уравнении (11) $R(z, \eta) = R(\eta)$, $Q(\eta) = R(\eta)/R_0$, получим уравнение для $Q(\eta)$:

$$\frac{dQ}{d\eta^2} + \frac{dQ}{d\eta} + \gamma(1 - |Q|) = 0, \tag{17}$$

где

$$\begin{aligned} Q(\eta = \infty) &= -1, & Q(\eta = -\infty) &= 1, \\ \frac{dQ(\eta = \infty)}{d\eta} &= \frac{dQ(\eta = -\infty)}{d\eta} = 0, \\ e(\eta) &= \frac{\varepsilon(\eta)}{\varepsilon_0} = \frac{\partial Q(\eta)}{\partial \eta} + Q(\eta). \end{aligned}$$

Решение уравнения (17), с точностью до малых слагаемых, пропорциональных γ , имеет вид

$$Q(\eta) = \begin{cases} 1 - \exp(\gamma\eta), & \eta \leq 0, \\ -1 + \exp(-\gamma\eta), & \eta \geq 0, \end{cases} \quad e(\eta) = \begin{cases} 1 - (1 + \gamma) \exp(\gamma\eta), & \eta \leq 0, \\ -1 + (1 - \gamma) \exp(-\gamma\eta), & \eta \geq 0. \end{cases} \tag{18}$$

Форма стационарной волны $e = e(\eta)$ (см. рис. 2) обуславливается балансом эффектов нелинейности и релаксации: нелинейность увеличивает крутизну фронта, а релаксационные диссипация и дисперсия стремятся её уменьшить. При увеличении релаксационной частоты Ω крутизна фронта волны $e = e(\tau)$ растёт и при $\Omega \rightarrow \infty$ стремится к бесконечно крутому перепаду: $e(\tau) = -\text{sign } \tau$. Отметим, что здесь форма стационарной волны не содержит неоднозначности, в отличие от стационарной волны в однородной среде с безынерционной (частотно-независимой) нелинейностью и линейной релаксацией [13, 17]. Это связано с нелинейной релаксацией микронеоднородной среды, приводящей к уменьшению эффектов нелинейности при увеличении крутизны фронта волны $de(\tau)/d\tau$.

4. САМОПОДОВНЫЕ НИЗКОЧАСТОТНЫЕ И ВЫСОКОЧАСТОТНЫЕ ВОЛНЫ

Кроме стационарной волны, в микронеоднородных средах с разномодульной нелинейностью и релаксацией возможны и другие виды самоподобных волн. Однако определение их формы в общем виде — довольно сложная задача. Здесь мы приведём самоподобные решения для низкочастотных и высокочастотных волн.

В низкочастотном приближении (при $\mu \gg 1$ и $\gamma\mu^2 \gg 1$) имеем $Q(z, \theta) \approx e(z, \theta)$, а уравнение (13) упрощается и принимает вид [12]

$$\frac{\partial e}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{\gamma\mu} \frac{\partial e}{\partial \theta} - |e| \right] = 0. \tag{19}$$

Решение уравнения (19) найдём методом разделения переменных, полагая

$$e(z, \theta) = \Psi(\theta)Z(z), \quad (20)$$

где $Z(z) > 0$, $Z(z=0) = 1$. Подставляя выражение (20) в уравнение (19), получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения для $Z = Z(z)$ и $\Psi = \Psi(\theta)$ [12]:

$$\frac{Z'_z}{Z} = \frac{(\gamma\mu)^{-1}\Psi''_{\theta\theta} - |\Psi'|_{\theta}}{\Psi} = -p \leq 0, \quad (21)$$

где $p = \text{const} \geq 0$, $\Psi'_{\theta} = d\Psi/d\theta$, $Z'_z = dZ/dz$. При таком выборе знака параметра p ($p \geq 0$) решение пространственного уравнения $Z(z) = \exp(-pz)$ не нарастает по координате $z \geq 0$. Значение параметра p задаётся граничным условием, определяющим форму излучаемой самоподобной волны: $e(z=0, \theta) = \Psi(\theta)$. Очевидно, что при $p = 0$ получается незатухающая стационарная волна (18).

Для временной функции $\Psi(\theta)$ из уравнения (21) имеем

$$(\gamma\mu)^{-1}\Psi''_{\theta\theta} - |\Psi'|_{\theta} + p\Psi = 0. \quad (22)$$

Из уравнения (22) следуют два линейных уравнения для положительной $\Psi_1(\theta \leq 0) \geq 0$ и отрицательной $\Psi_2(\theta \geq 0) \leq 0$ частей временной функции $\Psi = \Psi(\theta)$:

$$(\gamma\mu)^{-1}\Psi''_{1\theta\theta} - \Psi'_{1\theta} + p\Psi_1 = 0, \quad (\gamma\mu)^{-1}\Psi''_{2\theta\theta} + \Psi'_{2\theta} + p\Psi_2 = 0, \quad (23)$$

непрерывно переходящих друг в друга в точках $\theta = \theta_0$, где $\Psi_1(\theta = \theta_0) = \Psi_2(\theta = \theta_0) = 0$. Характеристическое уравнение для уравнений (23) имеет вид

$$(\lambda\mu)^{-1}\lambda^2 \mp \lambda + p = 0, \quad (24)$$

а его корни λ_1^+ , λ_2^+ , λ_1^- , λ_2^- определяются выражениями

$$\lambda_1^+ = \frac{\gamma\mu[1 + \sqrt{1 - 4p/(\gamma\mu)}]}{2}, \quad \lambda_2^+ = \frac{\gamma\mu[1 - \sqrt{1 - 4p/(\gamma\mu)}]}{2},$$

$$\lambda_1^- = \frac{\gamma\mu[-1 + \sqrt{1 - 4p/(\gamma\mu)}]}{2}, \quad \lambda_2^- = \frac{\gamma\mu[-1 - \sqrt{1 - 4p/(\gamma\mu)}]}{2}.$$

При $p \leq \gamma\mu/4$ решения уравнения (22) определяют одиночные разнополярные импульсы. При $p < \gamma\mu/4$ и при $p = \gamma\mu/4$ такие импульсы описываются выражениями

$$\Psi(\theta) = -\exp[-(\gamma\mu/2)|\theta|] \text{sh}[\sqrt{1 - 4p/(\gamma\mu)} (\gamma\mu/2)\theta], \quad (25)$$

$$\Psi(\theta) = -(\gamma\mu\theta/2) \exp[-(\gamma\mu/2)|\theta|]. \quad (26)$$

При $\gamma\mu \rightarrow \infty$ импульс (25) содержит разрыв: $e(z, \theta) = -\exp[-p|\theta|] \exp(-pz) \text{sign } \theta$. При $p > \gamma\mu/4$ решения уравнения (22) определяют периодическую волну с периодом $\theta^* = 4\pi/(\gamma\mu) \times \sqrt{1 - 4p/(\gamma\mu)}$:

$$\Psi(\theta) = -\exp[-(\gamma\mu/2)|\theta|] \sin[\sqrt{4p/(\gamma\mu) - 1} (\gamma\mu/2)\theta], \quad (27)$$

где

$$|\theta| \leq \frac{2\pi}{\gamma\mu \sqrt{4p/(\gamma\mu) - 1}}.$$

Для линейной среды ($\gamma = 0$) самоподобное решение (27) есть линейно-затухающая гармоническая волна с частотой ω ; из выражения (27) при $p = 1/(\gamma\mu)$ получаем

$$e(z, \theta) = \exp(-pz) \sin \theta = \exp\left(-\frac{\alpha\omega^2 x}{2C_0^3}\right) \sin(\omega\tau).$$

Для определения формы самоподобных высокочастотных волн, получим из волнового уравнения (5) эволюционные уравнения в системе координат $\zeta = t - x/C$, $x_{\text{new}} = x$, движущейся с высокочастотной скоростью C . Они записываются как

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{\nu}{2C} \frac{\partial}{\partial \zeta} R(\varepsilon) + \frac{\nu\gamma\xi}{2C} \frac{\partial}{\partial \zeta} R[|R(\varepsilon)|] = 0, \tag{28}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(R + \frac{2}{\Omega} \frac{\partial R}{\partial \zeta} + \frac{1}{\Omega^2} \frac{\partial^2 R}{\partial \zeta^2} \right) + \frac{\nu}{2\xi C} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{\Omega} \frac{\partial}{\partial \zeta} R + R + \gamma |R| \right) = 0. \tag{29}$$

В безразмерных переменных $Q(z, \theta) = R(x, \theta)/R_0$, $R_0 = \varepsilon_0\mu/\xi \sqrt{1 + \mu^2}$, $e(z, \theta) = \varepsilon(z, \theta)/\varepsilon_0$, $\theta = \omega\zeta$, $z = \gamma t\omega x/(2C)$ и $\mu = \Omega/\omega$ уравнение (29) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(Q + \frac{2}{\mu} \frac{\partial Q}{\partial \theta} + \frac{1}{\mu^2} \frac{\partial^2 Q}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\gamma\mu} \frac{\partial Q}{\partial \theta} + \frac{Q}{\gamma} + |Q| \right) = 0, \tag{30}$$

где

$$e(z, \theta) = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}} \left[\frac{\partial Q(z, \theta)}{\partial \theta} + \mu Q(z, \theta) \right].$$

Здесь, при $\mu \ll 1$, имеем $e(z, \theta) \approx \partial Q(z, \theta)/\partial \theta$ и из формулы (30) получаем линейное уравнение

$$\frac{\partial e}{\partial z} = -\frac{\mu}{\gamma} e. \tag{31}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$e(z, \theta) = \exp[-(\mu/\gamma)z]\Psi(\theta), \tag{32}$$

где $\Psi(\theta)$ — произвольная функция, зависящая от θ . Таким образом, в высокочастотном диапазоне ($\omega \gg \Omega$), где дисперсия фазовой скорости и нелинейность среды пренебрежимо малы, а коэффициент затухания не зависит от частоты волны ω ($\mu z/\gamma = t\Omega x/(2C)$), волна любой формы будет самоподобной.

5. ЭВОЛЮЦИЯ НИЗКОЧАСТОТНЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЛН: ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ

Получить точное аналитическое решение нелинейного волнового уравнения (12) для первоначально гармонической волны $e(z = 0, \theta) = \sin \theta$ не представляется возможным. Численное решение уравнения (12) будем искать спектральным методом, полагая, что:

$$e(z, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(z) \cos n\theta + b_n(z) \sin n\theta] = \sum_{n=1}^{\infty} e_n(z) \sin[n\theta + \Psi_n(z)], \tag{33}$$

где

$$a_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e(z, \theta) \cos(n\theta) d\theta, \quad b_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e(z, \theta) \sin(n\theta) d\theta, \quad a_0(z) = 0,$$

$$e_n(z) = [a_n^2(z) + b_n^2(z)]^{1/2}, \quad \text{tg } \Psi_n(z) = a_n(z)/b_n(z).$$

Схема численного решения эволюционного уравнения с разномодульной нелинейностью подробно изложена в работе [14].

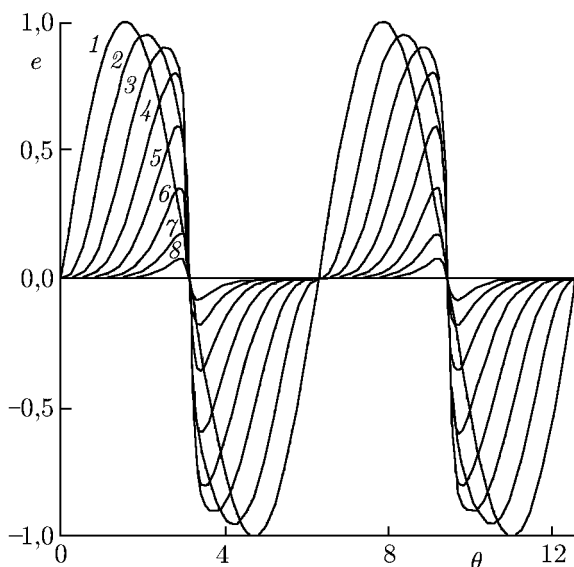


Рис. 3. Эволюция первоначально гармонической низкочастотной волны при $\mu = 10^3$ и $\gamma = 10^{-2}$ на различных расстояниях z . На кривых 1–8 $z = 0; 0,5; 1,0; 1,5; 2,0; 2,5; 3,0; 3,5$ соответственно

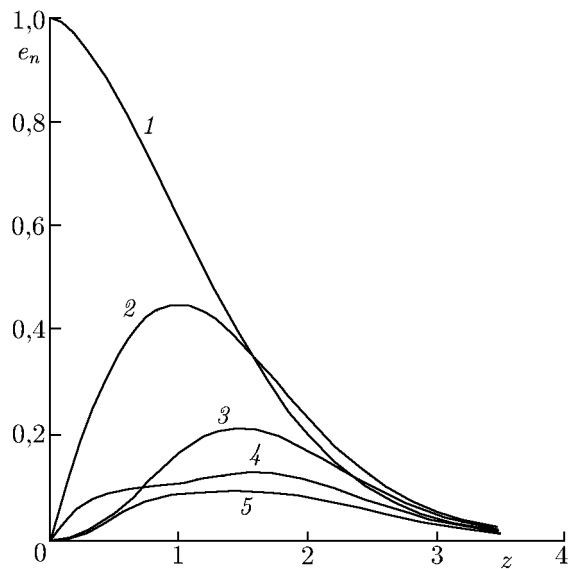


Рис. 4. Зависимости амплитуд первых пяти гармоник первоначально гармонической низкочастотной волны от расстояния z при $\mu = 10^3$ и $\gamma = 10^{-2}$. Номер кривой соответствует номеру гармоники

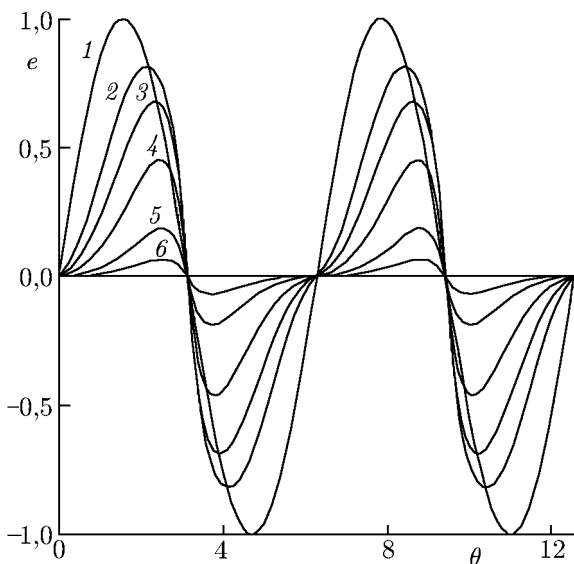


Рис. 5. Эволюция первоначально гармонической низкочастотной волны при $\mu = 3 \cdot 10^2$ и $\gamma = 10^{-2}$ на различных расстояниях z . На кривых 1–6 $z = 0; 0,6; 1,0; 1,6; 2,6; 3,6$ соответственно

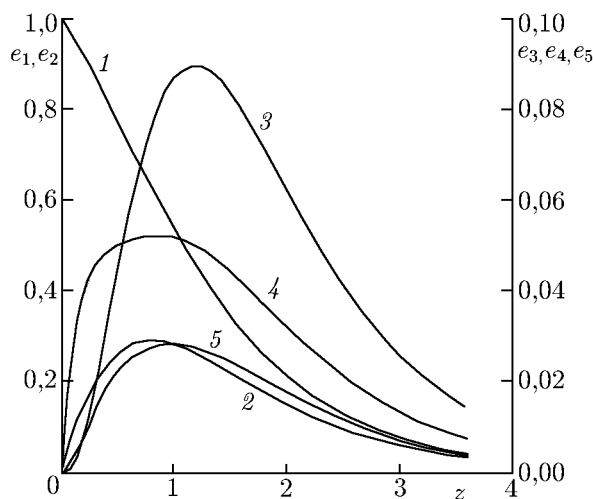


Рис. 6. Зависимости амплитуд первых пяти гармоник первоначально гармонической низкочастотной волны от расстояния z при $\mu = 3 \cdot 10^2$ и $\gamma = 10^{-2}$. Номер кривой соответствует номеру гармоники

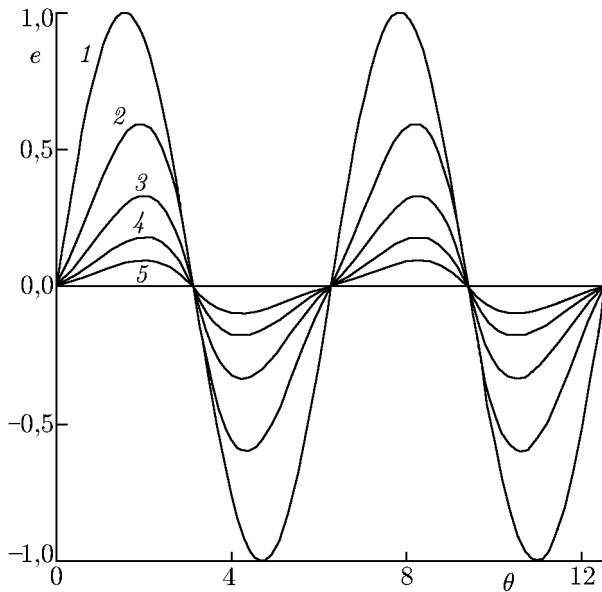


Рис. 7. Эволюция первоначально гармонической низкочастотной волны при $\mu = 10^2$ и $\gamma = 10^{-2}$ на различных расстояниях z . На кривых 1–5 $z = 0; 0,5; 1,0; 1,5; 2,0$ соответственно

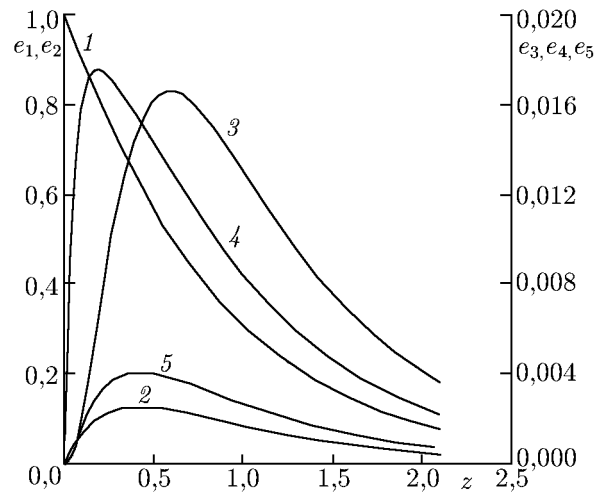


Рис. 8. Зависимости амплитуд первых пяти гармоник первоначально гармонической низкочастотной волны от расстояния z при $\mu = 10^2$ и $\gamma = 10^{-2}$. Номер кривой соответствует номеру гармоники

Далее приведены результаты численного расчёта профилей первоначально гармонических низкочастотных волн (при $Re \geq 1$) на различных расстояниях z , а также показаны закономерности генерации их высших гармоник. На рис. 3 показана эволюция низкочастотной волны при $\mu = 10^3$, $\gamma = 10^{-2}$ и $Re = 10$. Видно, что с ростом расстояния z волна искажается и затухает, при этом её нулевые точки не смещаются. Последнее связано со слабой дисперсией низкочастотных волн в релаксирующей среде. При $z > 2$ форма волны практически не изменяется, что свидетельствует о формировании самоподобной волны, описываемой выражением (27). На рис. 4 приведены зависимости амплитуд $e_n(z)$ первых пяти гармоник низкочастотной волны от расстояния z . Видно, что амплитуда первой гармоники уменьшается, а амплитуды высших гармоник вначале растут, достигают максимумов и затем также уменьшаются, при этом вначале генерируются чётные гармоники, а затем — нечётные. При повышении частоты ($\mu = 3 \cdot 10^2$, $Re = 3$ и $\mu = 10^2$, $Re = 1$) затухание волны увеличивается (см. рис. 5–8), а её искажение и эффективность генерации высших гармоник уменьшаются. При $z > 1$ форма волны также стремится к самоподобной. Здесь амплитуды высших гармоник качественно ведут себя также, как и при $\mu = 10^3$, но их амплитуды заметно меньше (см. рис. 6, 8).

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведено теоретическое и численное исследование распространения продольных акустических волн в микронеоднородных средах с разномодульной упругой нелинейностью и релаксацией. Методом возмущений рассмотрены процессы генерации высших гармоник и получены выражения для эффективных параметров разномодульной нелинейности такой среды. Установлено, что с ростом частоты волны эффективный параметр нелинейности уменьшается из-за релаксации нелинейности микронеоднородной среды. Определена форма стационарной волны, а также формы низкочастотных и высокочастотных самоподобных волн. Показано, что в микронеоднородной среде стационарная волна не содержит неоднозначности (в отличие от стационарной

волны в однородной среде с безынерционной нелинейностью и релаксацией [13]), что также связано с релаксацией нелинейности микронеоднородной среды. Приведены результаты численного решения эволюционного уравнения для первоначально гармонических низкочастотных волн при $Re \geq 1$. Показано, что профили нелинейных волн стремятся к самоподобным. Полученные результаты могут найти применение при создании нелинейных методов акустической диагностики разномодульных сред, в частности конструкционных материалов, содержащих трещины.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-05-05143а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nazarov V. E., Ostrovsky L. A., Soustova I. A., Sutin A. M. // Phys. Earth Planetary Interiors. 1988. V. 50, No. 1. P. 65.
2. Guyer R. A., Johnson P. A. Nonlinear mesoscopic elasticity: the complex behaviour of granular media including rocks and soil. Weinheim: Wiley-VCH Verlag GmbH and Co. KGaA, 2009. 395 p.
3. Nazarov V. E., Radostin A. V. Nonlinear acoustic waves in micro-inhomogeneous solids. Wiley Jons, Chichester, United Kingdom, 2015. 251 p.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с.
5. Nazarov V. E., Zaitsev V. Yu., Beliaeva I. Yu. // Acta Acustica. Acustica. 2002. V. 88, No. 1. P. 40.
6. Амбарцумян С. А. Разномодульная теория упругости. М.: Наука, 1982. 359 с.
7. Николаев А. В. // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1967. № 1. С. 72.
8. Алёшин А. С., Кузнецов В. В. Нелинейная сейсмология. М.: Наука, 1986. С. 4.
9. Маслов В. П., Мосолов П. П. // ПМТФ. 1985. Т. 49, № 3. С. 419.
10. Назаров В. Е., Островский Л. А. // Акуст. журн. 1990. Т. 36, № 1. С. 106.
11. Gavrilov S. N., Herman G. C. // J. Sound Vibration. 2012. V. 331, No. 20. P. 4464.
12. Radostin A. V., Nazarov V. E., Kiyashko S. B. // Wave Motion. 2013. V. 50, No. 2. P. 191.
13. Назаров В. Е., Кияшко С. В., Радостин А. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 2015. Т. 58, № 2. С. 134.
14. Назаров В. Е., Кияшко С. В., Радостин А. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 2015. Т. 58, № 10. С. 811.
15. Исакович М. А. // УФН. 1979. Т. 129, № 3. С. 531.
16. Исакович М. А. Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.
17. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 288 с.
18. Руденко О. В. // Акуст. журн. 2014. Т. 60, № 4. С. 368.

Поступила в редакцию 23 марта 2015 г.; принята в печать 30 сентября 2015 г.

THE WAVE PROCESSES IN MICRO-INHOMOGENEOUS MEDIA WITH DIFFERENT-MODULUS NONLINEARITY AND RELAXATION

V. E. Nazarov, S. B. Kiyashko, and A. V. Radostin

We present the results of analytical and numerical studies of propagation of longitudinal acoustic waves in micro-inhomogeneous media with heteromodular nonlinearity and relaxation. The solutions for evolution of the profiles and spectral characteristics of the initially harmonic waves are obtained.