

УДК 517.958+537.812

ТОЧНЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОТРАЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ОТ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЛОЁВ С НОВЫМИ ТИПАМИ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ

Н. А. Денисова *

Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия

Указан метод нахождения новых классов монотонных и немонотонных профилей показателя преломления неоднородных слоёв, допускающих точные аналитические решения прямой задачи отражения электромагнитного поля. Обсуждается возможность использования неоднородных слоёв для просветления оптики.

ВВЕДЕНИЕ

Прямые и обратные задачи отражения электромагнитных волн от неоднородного слоя с конечной толщиной остаются актуальными и находят многочисленные приложения в различных разделах физики и техники. Как правило, в прямых задачах определяют частотные зависимости коэффициентов отражения или пропускания для заданных неоднородных профилей показателя преломления. В обратных задачах по коэффициенту отражения или пропускания определяют параметры неоднородной среды. Точные аналитические решения прямой задачи приведены в работе [1], до сих пор появляются новые решения [2, 3], что позволяет более детально изучать основные закономерности отражения от неоднородной среды и возможности их практического использования.

В данной работе предложен новый, достаточно обширный класс как монотонных, так и немонотонных профилей вещественных показателей преломления неоднородных слоёв, допускающих точные аналитические решения прямой задачи отражения электромагнитного поля. Для их нахождения использовались результаты аналитического решения модельных обратных задач отражения электромагнитных волн от слоисто-неоднородного полупространства, изложенные в работе [4].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть неоднородный слой с показателем преломления $n(z)$, зависящим только от координаты z , заключён в области $0 \leq z \leq z_s$. Среда, занимающие полупространства $z < 0$ и $z > z_s$, однородны, изотропны и имеют показатели преломления n_a и n_s соответственно. Электромагнитная волна падает на слой из области $z < 0$. При нормальном падении величина поперечного электрического поля E удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\frac{d^2 E(z, k)}{dz^2} + k^2 \bar{n}^2(z) E(z, k) = 0, \quad (1)$$

где

$$\bar{n}(z) = \begin{cases} n_a, & z < 0; \\ n(z), & 0 \leq z \leq z_s; \\ n_s, & z > z_s, \end{cases}$$

* natasha.denisova@mail.ru

$k = \omega/c$ — волновое число, ω — круговая частота излучения, c — скорость света в вакууме. На границах раздела сред функция $\bar{n}(z)$ может иметь разрывы первого рода, т. е. в общем случае, $n(0) \neq n_a$, $n(z_s) \neq n_s$. В слое $0 \leq z \leq z_s$ функция $n(z)$ положительна и непрерывно дифференцируема. Коэффициенты отражения r и пропускания t по амплитуде определяются решением уравнения (1), удовлетворяющим условиям Коши

$$E(z_s, k) = \exp(ikn_s z_s), \quad E'(z_s, k) = ikn_s \exp(ikn_s z_s), \quad (2)$$

с помощью формул

$$r(k) = \frac{ikn_a E(0, k) - E'(0, k)}{ikn_a E(0, k) + E'(0, k)}, \quad (3)$$

$$t(k) = \frac{2ikn_a}{ikn_a E(0, k) + E'(0, k)}. \quad (4)$$

Введём в уравнении (1) новую независимую переменную

$$x = x(z) = \begin{cases} z, & z < 0; \\ \int_0^z \frac{n(\xi)}{n(0)} d\xi, & 0 \leq z \leq z_s; \\ \frac{n(z_s)}{n(0)}(z - z_s) + \int_0^{z_s} \frac{n(\xi)}{n(0)} d\xi, & z > z_s. \end{cases} \quad (5)$$

Для функции $\Psi(x, k) = E(z(x), k)$ уравнение (1) примет вид

$$\frac{d^2 \Psi}{dx^2} + k^2 \tilde{n}^2(x) \Psi + Q(x) \frac{d\Psi}{dx} = 0, \quad (6)$$

где

$$\tilde{n}(x) = \begin{cases} n_a, & x < 0; \\ n(0), & 0 \leq x \leq d; \\ n_1, & x > d; \end{cases} \quad n_1 = \frac{n_s n(0)}{n(z_s)}, \quad d = x(z_s), \quad (7)$$

$$Q(x) = \begin{cases} \frac{n(0)}{n^2(z)} \frac{dn(z)}{dz} \Big|_{z=z(x)}, & 0 \leq x \leq d; \\ 0, & x < 0, \quad x > d. \end{cases} \quad (8)$$

Коэффициенты отражения и пропускания для поля, задаваемого уравнением (6), определяются по формулам, аналогичным (3) и (4), на основе решения этого уравнения с условиями

$$\tilde{\Psi}(d, k) = \exp(ikn_1 d), \quad \tilde{\Psi}'(d, k) = ikn_1 \exp(ikn_1 d). \quad (9)$$

Условия (2) с помощью замены (5) преобразуются к виду

$$\Psi(d, k) = \exp(ikn_s z_s), \quad \Psi'(d, k) = ikn_s \exp(ikn_s z_s). \quad (10)$$

Из соотношений (9) и (10) следует, что функции $\tilde{\Psi}(x, k)$ и $\Psi(x, k)$, являясь решениями уравнения (6), отличаются только фазовым множителем. Поскольку

$$E(0, k) = \Psi(0, k), \quad E'(0, k) = \Psi'(0, k),$$

то коэффициенты отражения для полей, задаваемых уравнениями (1) и (6), совпадают при всех значениях k , а коэффициенты пропускания отличаются фазовым множителем.

Ниже будет показано, что уравнение (6) решается в элементарных функциях для модельных обратных задач, рассмотренных в работе [4], и это позволяет аналитически решить прямую задачу. Для исследования модельных обратных задач [4] использовался аппарат операторов преобразования для функций Йоста [5]. Ядро оператора преобразования, с одной стороны, находится из интегрального уравнения (11) (см. далее), правая часть которого определяется Фурье-образом коэффициента отражения, а с другой стороны оно связано простыми формулами с функциями $Q(x)$ и $n(z)$.

Обозначим через $\varphi_1(x, k)$ и $\varphi_2(x, k)$ решения уравнения (6), т. е. функции Йоста, имеющие заданный вид в области $x < 0$:

$$\varphi_1(x, k) = \exp(-ikn_a x), \quad \varphi_2(x, k) = \exp(ikn_a x).$$

Решения усечённого (при $Q(x) \equiv 0$) уравнения (6) обозначим $\varphi_1^{(0)}(x, k)$ и $\varphi_2^{(0)}(x, k)$. Эти функции Йоста легко находятся в явном виде. При $0 < x < d$ для функции $\varphi_1^{(0)}(x, k)$ имеем

$$\varphi_1^{(0)}(x, k) = a_{1,2} \exp(-ikn(0)x) - b_{1,2} \exp(ikn(0)x),$$

где

$$a_{1,2} = \frac{n_a + n(0)}{2n(0)}, \quad b_{1,2} = \frac{n_a - n(0)}{2n(0)}.$$

В интервале $0 < x < d$ при $\text{Im } k = 0$ решения Йоста полного уравнения (6) можно представить в виде [6–8]

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, k) &= \varphi_1^{(0)}(x, k) + \int_{-x}^x B(x, y) \frac{d}{dy} \{a_{1,2} \exp[-ikn(0)y] - b_{1,2} \exp[ikn(0)y]\} dy, \\ \varphi_2(x, k) &= \varphi_1^*(x, k), \end{aligned}$$

где звёздочка обозначает комплексное сопряжение, $B(x, y)$ — вещественное ядро оператора преобразования, переводящего функцию Йоста усечённого уравнения в функцию Йоста уравнения (6). Функция $B(x, y)$ является решением интегрального уравнения

$$(1 - r_{1,2}^2)B(x, y) - \int_{-x}^x B(x, \xi) [R(y + \xi) + r_{1,2}R(y - \xi)] d\xi - \int_0^{x+y} R(\xi) d\xi = 0. \tag{11}$$

Здесь переменные x и y изменяются в области $|y| < x < d$. Функция $R(x)$ есть фурье-преобразование разности коэффициента отражения (3) и его главного асимптотического члена $r_0(k)$ при $k \rightarrow \infty$:

$$R(x) = \frac{n(0)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [r(k) - r_0(k)] \exp[-ikn(0)x] dk, \tag{12}$$

где

$$r_0(k) = \frac{r_{1,2} + r_{2,3} \exp[2ikn(0)d]}{1 + r_{1,2}r_{2,3} \exp[2ikn(0)d]}, \quad r_{1,2} = \frac{b_{1,2}}{a_{1,2}}, \quad r_{2,3} = \frac{n(0) - n_1}{n(0) + n_1} = \frac{n(z_s) - n_s}{n(z_s) + n_s}.$$

Знание функции $B(x, x)$ позволяет найти коэффициент $Q(x)$ в уравнении (6):

$$Q(x) = -\frac{2B_x(x, x)}{1 + B(x, x)}, \quad (13)$$

где $0 < x < d$, индекс x означает производную по x , и показатель преломления $n(z)$ имеет следующее параметрическое представление при $0 < x < d$:

$$n = n(0)[1 + B(x, x)]^{-2}, \quad z = \int_0^x [1 + B(\xi, \xi)]^2 d\xi. \quad (14)$$

В работе [4] рассмотрены обратные задачи восстановления показателя преломления неоднородной слоистой среды, занимающей полупространство $z \geq 0$, по модельным коэффициентам отражения в виде дробно-рациональных функций с одним и двумя полюсами. Для решения этих задач использовалось интегральное уравнение (11) в случае, когда $d = \infty$ и $r_{2,3} = 0$. Найденные в работе [4] функции $B(x, y)$ определяют семейства профилей показателей преломления с помощью формулы (14) и коэффициенты уравнения (6) с помощью формулы (13). В данной работе рассматриваются неоднородные слои с конечной толщиной с найденными в статье [4] показателями преломления. Для уравнения (6) в этих случаях ниже будут найдены общие решения.

2. СЕМЕЙСТВО МОНОТОННО УБЫВАЮЩИХ ПРОФИЛЕЙ ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ

Для отыскания первого семейства монотонно убывающих профилей показателя преломления воспользуемся одной из функций работы [4]:

$$B_1(x, x) = -1 + \operatorname{cth} \nu \operatorname{th}[n(0) \delta x + \nu], \quad (15)$$

где δ и ν — произвольные положительные параметры. Соответствующий показатель преломления находится по формуле (14) и имеет вид

$$n^{(1)} = n(0) \operatorname{th}^2 \nu \operatorname{cth}^2 [n(0) \delta x + \nu], \quad z = \operatorname{cth}^2 \nu \left\{ x - \frac{\operatorname{th}[n(0) \delta x + \nu]}{n(0) \delta} + \frac{\operatorname{th} \nu}{n(0) \delta} \right\}, \quad (16)$$

где $0 \leq x \leq d$. Индекс y функций $B_1(x, x)$ и $n^{(1)}$ означает порядковый номер семейства. Учитывая формулу (13), найдём

$$Q_1(x) = -\frac{4n(0) \delta}{\operatorname{sh}^2 [n(0) \delta x + \nu]}. \quad (17)$$

Поскольку коэффициент отражения для полей, задаваемых уравнениями (1) и (6), один и тот же, для его отыскания используем более простое уравнение (6). Общее решение этого уравнения с коэффициентом $Q_1(x)$ в области $0 \leq x \leq d$ будем искать в виде

$$\Psi(x, k) = A[1 - ikf(x)] \exp[ikn(0)x] + D[1 + ikf(x)] \exp[-ikn(0)x]. \quad (18)$$

Подставляя (18) в уравнение (6) и учитывая, что A, D, k — произвольные числа, в общем случае получим переопределённую систему уравнений

$$2f'(x) + Q(x)f(x) = 0, \quad f'' + Q(x)f' = n(0)Q(x). \quad (19)$$

Однако для функции (17) эта система имеет единственное решение

$$f_1(x) = \frac{1}{\delta} \operatorname{th}[n(0) \delta x + \nu], \quad (20)$$

где $0 \leq x \leq d$.

Чтобы найти амплитудный коэффициент «отражения налево» для поля, определяемого уравнением (6), следует использовать функцию Йоста, удовлетворяющую условиям (9). При $x > d$ эта функция имеет вид

$$\Psi(x, k) = \exp(ikn_1x). \quad (21)$$

Запишем решение уравнения (6) при $x < 0$:

$$\Psi(x, k) = C_1 \exp(ikn_a x) + C_2 \exp(-ikn_a x), \quad (22)$$

где C_1, C_2 — постоянные. Поскольку решение уравнения (6) непрерывно дифференцируемо по переменной x при всех x , то из условий непрерывности самой функции и её производной в точках $x = 0$ и $x = d$, используя равенства (18)–(22), найдём коэффициенты A, D, C_1, C_2 . Отношение

$$r(k) = C_2/C_1$$

будет искомым коэффициентом отражения. После несложных вычислений найдём

$$r(k) = \frac{R_{1,2}(k) + R_{2,3}(k)\alpha_1(k)}{1 + R_{1,2}(k)R_{2,3}(k)\alpha_2(k)}. \quad (23)$$

Чтобы определить все входящие в формулу (23) функции, введём

$$\tilde{R}(x, k) = \frac{f'(x)}{2n(0) - f'(x) - 2ikn(0)f(x)}, \quad (24)$$

$$\alpha_3(x, k) = \frac{2n(0) - f'(x) - 2ikn(0)f(x)}{2n(0) - f'(x) + 2ikn(0)f(x)}. \quad (25)$$

Значение функции $\tilde{R}(x, k)$ в точке $x = 0$ при всех k совпадает с коэффициентом отражения от неоднородного полупространства с показателем преломления

$$\bar{n}(z) = \begin{cases} n(0), & z < 0; \\ n(z), & z \geq 0. \end{cases}$$

Здесь для случая (15) $n(z) = n^{(1)}(z)$ (см. формулы (16), где $d \rightarrow \infty$), $f(x) = f_1(x)$. Обозначим

$$\tilde{R}_{1,2}(k) = \tilde{R}(0, k). \quad (26)$$

Тогда величина

$$R_{1,2}(k) = \frac{r_{1,2} + \tilde{R}_{1,2}(k)}{1 + r_{1,2}\tilde{R}_{1,2}(k)} \quad (27)$$

является коэффициентом отражения от неоднородного полупространства показателем преломления

$$\bar{n}(z) = \begin{cases} n_a, & z < 0; \\ n(z), & z \geq 0. \end{cases} \quad (28)$$

Для показателя преломления (28) с функцией $n(z) = n^{(1)}(z)$, $z \geq 0$, коэффициент отражения (27) является дробно-рациональной функцией с одним полюсом.

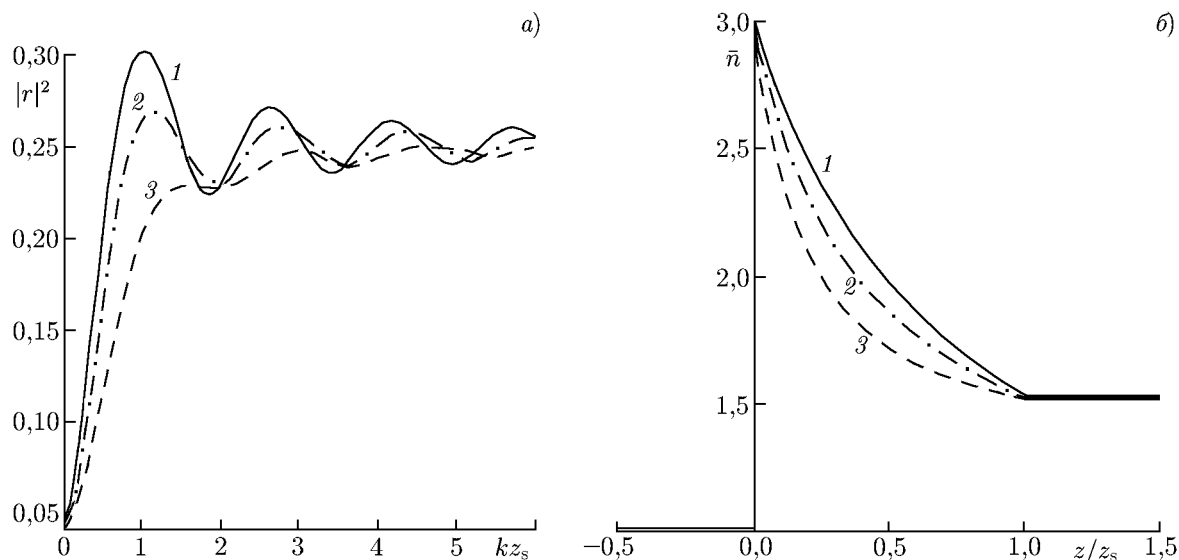


Рис. 1. Профили коэффициентов отражения по мощности (а) при $n(0) = 3$, $n(z_s) = 1,52$, $n_s = 1,52$, $n_a = 1$, $\nu = 0,05$ (кривая 1), $\nu = 0,7$ (2), $\nu = 0,85$ (3) и профили соответствующих показателей преломления (б)

Введём остальные функции:

$$\tilde{R}_{2,3}(k) = -\tilde{R}(d, k), \quad R_{2,3}(k) = \frac{r_{2,3} + \tilde{R}_{2,3}(k)}{1 + r_{2,3}\tilde{R}_{2,3}^*(k)} \alpha_3(d, k) \exp[2ikn(0)d], \quad (29)$$

$$\alpha_1(k) = \frac{1 + r_{1,2}\tilde{R}_{1,2}^*(k)}{1 + r_{1,2}\tilde{R}_{1,2}(k)} \frac{1}{\alpha_3(0, k)}, \quad \alpha_2(k) = \frac{r_{1,2} + \tilde{R}_{1,2}^*(k)}{r_{1,2} + \tilde{R}_{1,2}(k)} \frac{1}{\alpha_3(0, k)}. \quad (30)$$

Здесь функции $\alpha_1(k)$, $\alpha_2(k)$, $\alpha_3(0, k)$, $\alpha_3(d, k)$ определяют фазовые сдвиги.

Первое семейство функций (16) содержит монотонно убывающие профили показателя преломления внутри слоя. Будем предполагать, что известны показатели преломления на границах слоя $n(0)$ и $n(z_s)$ ($n(0) > n(z_s)$) и толщина слоя z_s . Для решения прямой задачи остальные параметры (δ , d , ν) определяются из условий $n^{(1)}(d) = n(z_s)$ и $z(d) = z_s$. Нетрудно показать, что параметр ν принимает любое значение из интервала $0 < \nu < \operatorname{arctg}[\sqrt{n(z_s)/n(0)}]$, оптическая толщина слоя находится из формулы

$$n(0)d = \frac{y_0 - \nu}{\delta}, \quad (31)$$

где

$$y_0 = \operatorname{arccth} \left[\sqrt{\frac{n(z_s)}{n(0)}} \operatorname{cth} \nu \right], \quad \delta = \frac{\operatorname{cth}^2 \nu (y_0 - \nu - \operatorname{th} y_0 + \operatorname{th} \nu)}{n(0)z_s}. \quad (32)$$

Показатель преломления подложки n_s может принимать любые положительные значения.

На рис. 1 изображены монотонно убывающие профили показателей преломления первого семейства и соответствующие профили коэффициентов отражения по мощности при различных значениях ν . При увеличении ν уменьшаются величина разрыва первой производной показателя преломления на границе $z = z_s$ и амплитуда колебаний коэффициента отражения.

3. СЕМЕЙСТВО МОНОТОННО ВОЗРАСТАЮЩИХ ПРОФИЛЕЙ ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ

Ядро оператора преобразования второго семейства при $x = y$ связано с функцией (15) формулой

$$B_2(x, x) = \frac{1}{B_1(x, x) + 1} - 1. \quad (33)$$

Согласно (17), внутри слоя $0 \leq x \leq d$ для коэффициента уравнения (6) справедливо выражение

$$Q_2(x) = -Q_1(x). \quad (34)$$

После подстановки (33) в формулу (14) найдём соответствующий коэффициент преломления

$$n^{(2)} = n(0) \operatorname{cth}^2 \nu \operatorname{th}^2 [n(0) \delta x + \nu]; \quad z = \operatorname{th}^2 \nu \left\{ x - \frac{\operatorname{cth} [n(0) \delta x + \nu]}{n(0) \delta} + \frac{\operatorname{cth} \nu}{n(0) \delta} \right\}, \quad (35)$$

где $0 \leq x \leq d$.

При заданной толщине слоя и значениях показателя преломления на границах слоя семейство (35) состоит из монотонно возрастающих профилей, зависящих от одного параметра ν , $0 < \nu < \operatorname{arccth}[\sqrt{n(z_s)/n(0)}]$. Параметр δ и оптическая толщина слоя определяются по формулам, аналогичным (31) и (32):

$$n(0)d = \frac{y_0 - \nu}{\delta}, \quad (36)$$

где

$$y_0 = \operatorname{arcth} \left[\sqrt{\frac{n(z_s)}{n(0)}} \operatorname{th} \nu \right], \quad \delta = \frac{\operatorname{th}^2 \nu (y_0 - \nu - \operatorname{cth} y_0 + \operatorname{cth} \nu)}{n(0)z_s}. \quad (37)$$

Общее решение уравнения (6) с коэффициентом (34) внутри слоя также можно искать в виде (18). В этом случае система (19) имеет решение

$$f_2(x) = \frac{1}{\delta} \operatorname{cth} [n(0) \delta x + \nu], \quad (38)$$

где $0 \leq x \leq d$. Коэффициент отражения с показателем преломления (35) вычисляется по формулам (23)–(30), в которых функция $f(x)$ имеет вид (38). Профили коэффициентов отражения по мощности и соответствующих показателей преломления представлены на рис. 2 при различных значениях ν .

4. НЕМОНОТОННЫЕ ПРОФИЛИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ПРЕЛОМЛЕНИЯ

При решении уравнения (6) с коэффициентом отражения в виде дробно-рациональной функции, имеющей два полюса, в работе [4] была найдена функция

$$B_3(x, x) = \beta_3 \left(\frac{\delta_2 \operatorname{th} y_2 - \delta_1 \operatorname{th} y_1}{\delta_2 \operatorname{th} y_1 - \delta_1 \operatorname{th} y_2} \right) - 1, \quad (39)$$

где $x > 0$,

$$y_1 = \delta_1 n(0)x + \nu_1, \quad y_2 = \delta_2 n(0)x + \nu_2, \quad \beta_3 = \frac{\delta_2 \operatorname{th} \nu_1 - \delta_1 \operatorname{th} \nu_2}{\delta_2 \operatorname{th} \nu_2 - \delta_1 \operatorname{th} \nu_1},$$

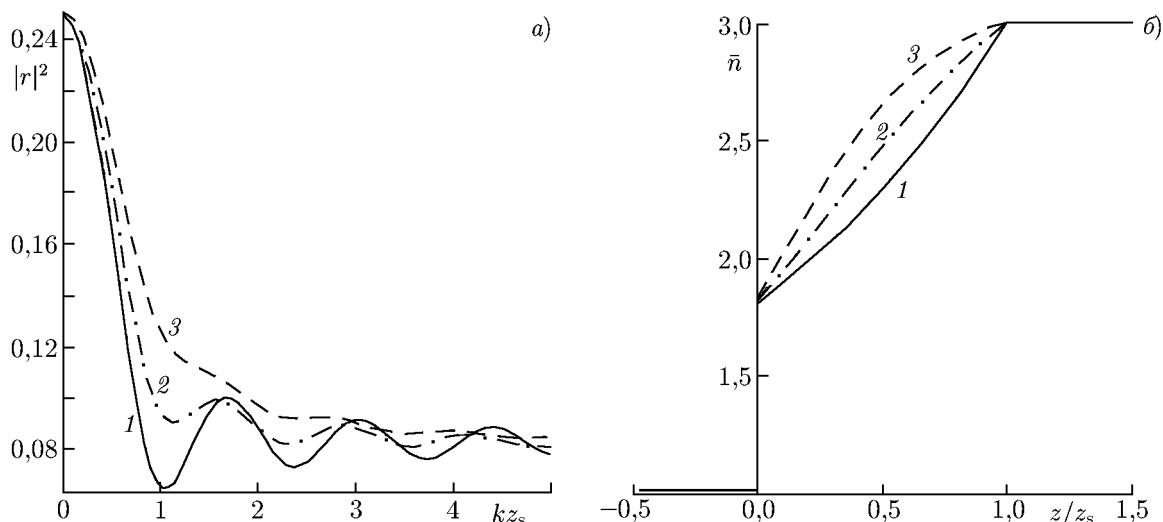


Рис. 2. Профили коэффициентов отражения по мощности (а) при $n(0) = 1,8$, $n(z_s) = 3$, $n_s = 3$, $n_a = 1$, $\nu = 0,05$ (кривая 1), $\nu = 0,9$ (2), $\nu = 1,0$ (3) и профили соответствующих показателей преломления (б)

$\delta_1, \nu_1, \delta_2, \nu_2$ — произвольные положительные параметры, удовлетворяющие условиям $\delta_2 > \delta_1$,

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} < \frac{\text{th } \nu_2}{\text{th } \nu_1} < \frac{\delta_2}{\delta_1}.$$

Функции (39) соответствуют зависимости

$$Q_3(x) = -2n(0) (\delta_2^2 - \delta_1^2) \left(\frac{1}{\delta_2 \text{th } y_2 - \delta_1 \text{th } y_1} - \frac{\text{th } y_1 \text{th } y_2}{\delta_2 \text{th } y_1 - \delta_1 \text{th } y_2} \right) \tag{40}$$

и показатель преломления

$$n^{(3)} = \frac{n(0)}{\beta_3^2} \left(\frac{\delta_2 \text{th } y_1 - \delta_1 \text{th } y_2}{\delta_2 \text{th } y_2 - \delta_1 \text{th } y_1} \right)^2$$

$$z = \beta_3^2 \left[x - \frac{\delta_2^2 - \delta_1^2}{n(0) \delta_2 \delta_1} \left(\frac{1}{\delta_2 \text{th } y_1 - \delta_1 \text{th } y_2} - \frac{1}{\delta_2 \text{th } \nu_1 - \delta_1 \text{th } \nu_2} \right) \right]. \tag{41}$$

Пусть при $0 \leq x \leq d$ функция $Q(x)$ имеет вид (40). Общее решение уравнения (6) с коэффициентом (40) будем искать в виде

$$\Psi(x, k) = A[1 - ikg(x) + (-ik)^2 f(x)] \exp[ikn(0)x] + D[1 + ikg(x) + (ik)^2 f(x)] \exp[-ikn(0)x], \tag{42}$$

где $0 \leq x \leq d$. После подстановки (42) в уравнение (6) получим систему уравнений для нахождения функций $f(x)$ и $g(x)$:

$$g'' + Q(x)g' = n(0)Q(x), \quad f'' + Q(x)f' - 2n(0)g' - n(0)gQ(x) = 0, \quad 2f' + Q(x)f = 0. \tag{43}$$

Переопределённая система уравнений (43) также оказывается разрешимой. Первое и последнее уравнения системы интегрируются. Константы интегрирования однозначно определяются из второго уравнения системы. В результате получим

$$g_3(x) = \frac{\delta_2^2 - \delta_1^2}{\delta_1 \delta_2 (\delta_2 \text{th } y_1 - \delta_1 \text{th } y_2)}, \tag{44}$$

$$f_3(x) = \frac{1}{\delta_1 \delta_2} \frac{\delta_2 \operatorname{th} y_2 - \delta_1 \operatorname{th} y_1}{\delta_2 \operatorname{th} y_1 - \delta_1 \operatorname{th} y_2}, \tag{45}$$

где $0 \leq x \leq d$. Коэффициент отражения от неоднородного слоя с показателем преломления (41) вычисляется по формулам (23)–(30), в которых следует изменить функции (24) и (25). В случае представления общего решения уравнения (6) в виде (42) они имеют вид

$$\tilde{R}(x, k) = \frac{g'(x) - ikf'(x)}{2n(0) - g'(x) - ik[2n(0)g(x) - f'(x)] - 2k^2n(0)f(x)}, \tag{46}$$

$$\alpha_3(x, k) = \frac{2n(0) - g'(x) - ik[2n(0)g(x) - f'(x)] - 2k^2n(0)f(x)}{2n(0) - g'(x) + ik[2n(0)g(x) - f'(x)] - 2k^2n(0)f(x)}. \tag{47}$$

Для вычисления коэффициента отражения при заданных параметрах $n(0)$, $n(z_s)$, n_s , z_s на остальные параметры δ_1 , δ_2 , ν_1 , ν_2 , d налагаются условия $n^{(3)}(d) = n(z_s)$, $z(d) = z_s$, что сокращает число свободных параметров. Удобно оставлять произвольными следующие параметры: $\gamma = \delta_2/\delta_1 > 1$, $\beta_3 > 0$, ν_1 . Введём обозначение $A_3 = (\beta_3 + \gamma)/(\beta_3\gamma + 1)$. Параметр ν_1 может принимать любые положительные значения, если $A_3 \leq 1$, $\nu_1 < \operatorname{arcsch} A_3$, если $A_3 > 1$. В любом случае $\nu_2 = \operatorname{arcth}(A_3 \operatorname{th} \nu_1)$. Обозначим через y_{02} решение уравнения

$$\operatorname{th} y_{0,2} = D_3 \operatorname{th} \frac{y_{0,2} + \gamma\nu_1 - \nu_2}{\gamma}, \tag{48}$$

где

$$D_3 = \frac{\gamma + \sqrt{n(z_s)/n(0)} \beta_3}{\sqrt{n(z_s)/n(0)} \gamma \beta_3 + 1}.$$

Тогда

$$\delta_2 = \frac{\beta_3^2}{z_s n(0)} \left\{ y_{0,2} - \nu_2 - \left[\frac{\beta_3 \gamma + \sqrt{n(z_s)/n(0)}}{\sqrt{n(z_s)/n(0)} \operatorname{th} y_{0,2}} - \frac{\beta_3 \gamma + 1}{\operatorname{th} \nu_2} \right] \right\}, \quad \delta_1 = \frac{\delta_2}{\gamma}, \tag{49}$$

оптическая толщина равна

$$n(0)d = \frac{y_{0,2} - \nu_2}{\delta_2}. \tag{50}$$

Нелинейное уравнение (48) может не иметь положительных корней, иметь один корень или иметь два корня. Если $D_3 > 1$ и $\gamma\nu_1 - \nu_2 < 0$, то существует единственное положительное решение уравнения (48), при этом параметры δ_1 , δ_2 согласно формулам (49) положительны. В случае $D_3 > 1$ и $\gamma\nu_1 - \nu_2 > 0$ уравнение (48) либо не имеет положительных решений, либо имеет два положительных решения. Используя параметры, при которых это уравнение имеет два корня, следует выбрать больший из них, т. к. для меньшего получаются отрицательные значения δ_1 , δ_2 . Если $D_3 \leq 1$, уравнение (48) либо не имеет решений, либо имеет одно решение, также приводящее к отрицательным значениям δ_1 и δ_2 . Семейство (41) включает как монотонные, так и немонотонные вогнутые профили показателя преломления (см. рис. 3). Представленные на рис. 3 слои имеют различные оптические толщины $d/z_s = 0,542; 0,812; 1,061$, остальные параметры принимают следующие значения: $\delta_1 z_s = 1,108; 0,522; 0,039$, $\delta_2 z_s = 1,33; 0,626; 0,047$ и $\nu_2 = 0,32; 0,537; 1,402$ соответственно. Вид профилей коэффициента отражения по мощности меняется, если показатель преломления внутри слоя принимает значения, меньшие единицы.

Для четвёртого семейства профилей показателей преломления функции $B_4(x, x)$ и $Q_4(x)$ связаны с функциями третьего семейства формулами (33) и (34). Система уравнений (43) имеет решение

$$g_4(x) = \frac{\delta_2^2 - \delta_1^2}{\delta_1 \delta_2 (\delta_2 \operatorname{cth} y_1 - \delta_1 \operatorname{cth} y_2)}, \tag{51}$$

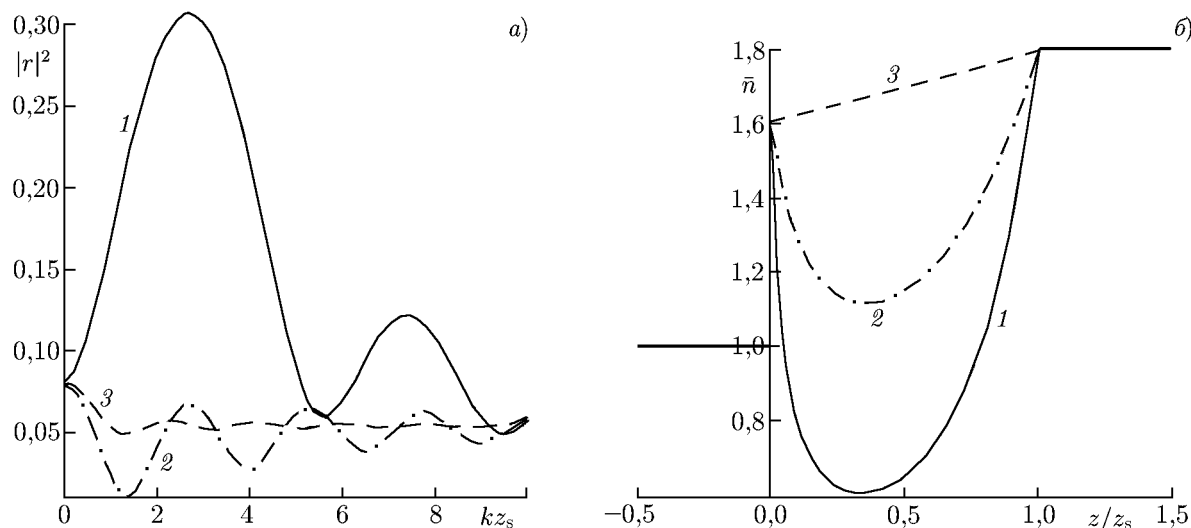


Рис. 3. Профили коэффициентов отражения по мощности (а) при $n(0) = 1,6$, $n(z_s) = 1,8$, $n_s = 1,8$, $n_a = 1$, $\nu_1 = 0,3$ кривая (1), $\nu_1 = 0,5$ (2), $\nu_1 = 1,2$ (3) и $\gamma = 1,2$, $\beta_3 = 0,5$, а также профили соответствующих показателей преломления (б)

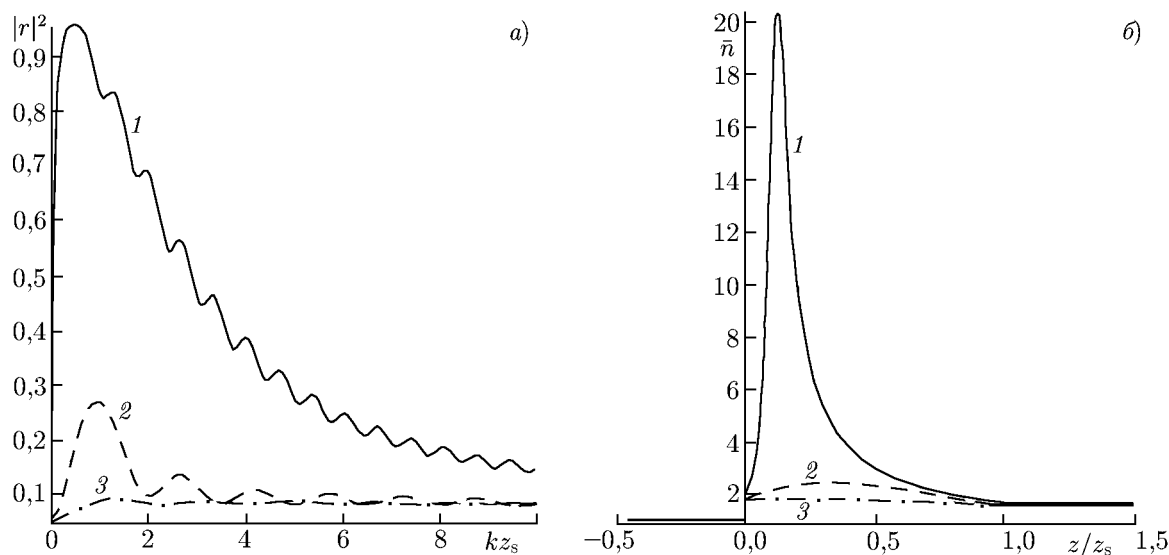


Рис. 4. Профили коэффициентов отражения по мощности (а) при $n(0) = 1,8$, $n(z_s) = 1,68$, $n_s = 1,68$, $n_a = 1$, $\nu_1 = 0,1$ кривая (1), $\nu_1 = 0,5$ кривая (2), $\nu_1 = 1,0$ кривая (3) и $\gamma = 2$, $\beta_4 = 2$, а также профили соответствующих показателей преломления(б)

$$f_4(x) = \frac{1}{\delta_1 \delta_2} \frac{\delta_2 \operatorname{cth} y_2 - \delta_1 \operatorname{cth} y_1}{\delta_2 \operatorname{cth} y_1 - \delta_1 \operatorname{cth} y_2}, \tag{52}$$

где $0 \leq x \leq d$. Показатель преломления записывается с помощью функций (51) и (52):

$$n^{(4)} = \frac{n(0)}{\beta_4^2 \delta_1^2 \delta_2^2 f_4^2(x)}, \quad z = \beta_4 \left\{ x - \frac{1}{n(0)} [g_4(x) - g_4(0)] \right\}, \tag{53}$$

где

$$\beta_4 = \frac{\delta_2 \operatorname{cth} \nu_1 - \delta_1 \operatorname{cth} \nu_2}{\delta_2 \operatorname{cth} \nu_2 - \delta_1 \operatorname{cth} \nu_1} = \frac{1}{\beta_3}.$$

Вид профилей показателя преломления наиболее сильно изменяется при вариации параметра ν_1 . На рис. 4 представлены профили этого семейства при различных ν_1 и фиксированных γ и β_4 . Оптическая толщина слоёв разная: $d/z_s = 2,567; 1,147; 0,942$. Остальные параметры принимают следующие значения: $\delta_1 z_s = 0,209; 0,232; 0,030$ и $\nu_2 = 0,125; 0,659; 1,853$ соответственно. Здесь при заданных значениях $n(0)$, $n(z_s)$, n_s , z_s и параметрах $\gamma = \delta_2/\delta_1 > 1$, $\beta_4 > 0$, ν_1 остальные параметры определялись по формулам $\nu_2 = \text{arcth}(A_3 \text{th } \nu_1)$,

$$\text{th } y_{02} = \frac{1}{D_4} \text{th } \frac{y_{02} + \gamma \nu_1 - \nu_2}{\gamma}, \quad (54)$$

где

$$D_4 = \frac{\gamma + \sqrt{n(z_s)/n(0)} \beta_4}{\sqrt{n(z_s)/n(0)} \gamma \beta_4 + 1},$$

$$\delta_2 = \frac{\beta_4^2}{z_s n(0)} \left\{ y_{02} - \nu_2 - \left[\frac{\beta_4 \gamma + \sqrt{n(z_s)/n(0)}}{\sqrt{n(z_s)/n(0)} \text{cth } y_{02}} - \frac{\beta_4 \gamma + 1}{\text{cth } \nu_2} \right] \right\}, \quad \delta_1 = \frac{\delta_2}{\gamma}. \quad (55)$$

Оптическая толщина вычисляется по той же формуле (50).

5. ПРИМЕР ПРИМЕНЕНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ПРОФИЛЕЙ ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ ДЛЯ ПРОСВЕТЛЕНИЯ ОПТИКИ

Рассмотрим возможное применение предложенных моделей для просветления оптики. Известно [1], что использование однослойного однородного покрытия для просветления стекла ($n_s = 1,52$) имеет недостаток: оптимальная величина показателя преломления покрытия $n = 1,23$ практически трудно достижима. Поэтому прибегают к двух- или трёхслойным покрытиям из однородных слоёв. Просветление с применением однослойного плавно неоднородного покрытия может оказаться практически более рациональным и легче выполнимым.

Для оценки параметров неоднородного покрытия следует воспользоваться главным асимптотическим членом коэффициента отражения при $k \rightarrow \infty$, определяемым функцией $r_0(k)$ (см. формулу (12)):

$$r_0(k) = \frac{r_{1,2} + r_{2,3} \exp[2ikn(0)d]}{1 + r_{1,2}r_{2,3} \exp[2ikn(0)d]}, \quad r_{1,2} = \frac{b_{1,2}}{a_{1,2}}, \quad r_{2,3} = \frac{n(z_s) - n_s}{n(z_s) + n_s}.$$

Функция $r_0(k)$ обращается в нуль, если

$$r_{1,2} + r_{2,3} = 0, \quad n(0)kd = \pi m, \quad (56)$$

либо

$$r_{1,2} - r_{2,3} = 0, \quad n(0)kd = \pi(2m + 1)/2,$$

где $m = 1, 2, 3 \dots$. Наиболее интересным оказывается первый случай, соответствующий монотонно возрастающему профилю показателя преломления. Из соотношений (56) найдём показатель преломления на задней границе неоднородного слоя:

$$n(z_s) = \frac{n(0)n_s}{n_a}, \quad (57)$$

и оптическую толщину слоя для заданной длины волны λ_0 :

$$n(0)d = \frac{\lambda_0 m}{2}. \quad (58)$$

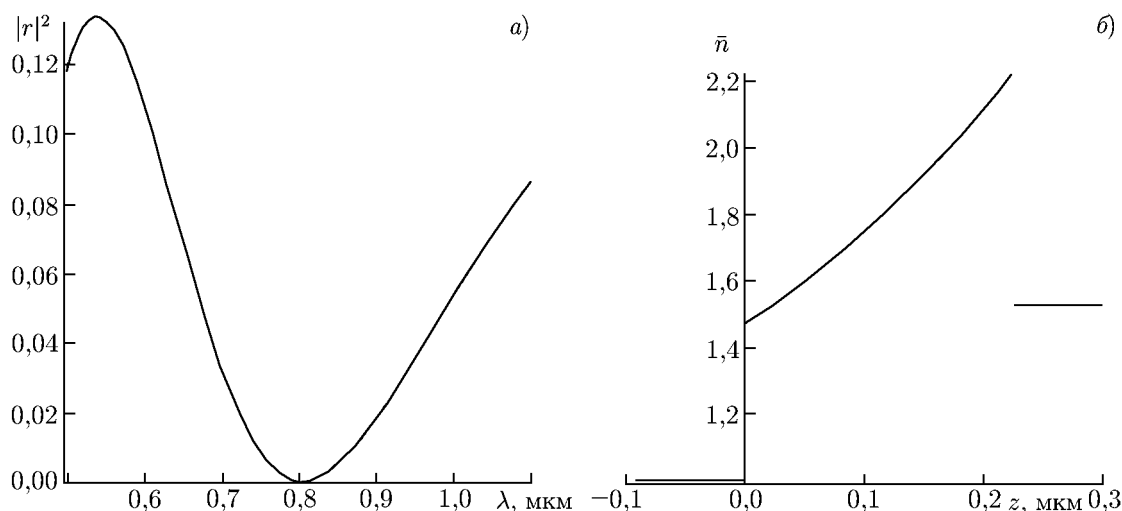


Рис. 5. Профили коэффициентов отражения по мощности в зависимости от длины волны (а) при $n(0) = 1,46$, $n(z_s) = 2,22$, $n_a = 1$, $z_s = 0,225$ мкм, $\nu = 0,1$, $d = 0,278$ мкм, $\delta = 0,058$ мкм⁻¹ и профиль коэффициента преломления (б)

Вообще говоря, показатель преломления на передней границе можно выбирать произвольным, но чем больше $n(0)$, тем меньше параметр d , определяемый из формулы (58). При выборе параметров, удовлетворяющих условиям (57) и (58), значение функции $r_0(k)$ равно нулю, сам же коэффициент отражения от неоднородного слоя с показателем преломления (35) ни при каких λ не обращается в нуль. Однако при выполнении равенства (57) существует последовательность длин волн, в окрестностях которых коэффициент отражения по мощности близок к нулю. Поэтому при решении задачи о просветлении стекла с помощью неоднородных слоёв можно использовать формулу (57) для определения величин $n(0)$ и $n(z_s)$, а формулу (58) — только для нахождения первого приближения для d . Для просветления стекла на длине волны $\lambda_0 = 0,8$ мкм при выборе $n(0) = 1,46$ получим $n(z_s) = 2,2192$, $d = 0,3285$ мкм. Пусть $\nu = 0,1$, тогда из (36) найдём $y_0 = 0,1235$, $\delta = 0,049$ мкм⁻¹, а из (37) — толщину слоя $z_s = 0,266$ мкм. При выбранных параметрах минимальный коэффициент отражения по мощности достигается при $\lambda \approx 1,17$ мкм. При уменьшении величины d положение минимума смещается в сторону меньших длин волн. Нетрудно получить, что при $d = 0,278$ мкм, $\lambda \approx 0,8$ мкм, $z_s = 0,225$ мкм.

На рис. 5 изображён фрагмент графика зависимости коэффициента отражения по мощности от длины волны. На интервале длин волн $0,75 \div 0,85$ мкм коэффициент отражения по мощности не превышает 1%. При отклонении от длины волны, для которой подобрано просветление, коэффициент отражения быстро повышается. Понижение коэффициента по мощности в более широкой полосе частот возможно при использовании нескольких неоднородных слоёв.

Работа выполнена при поддержке МОН РФ (соглашение 02.В.49.21.0003 от 27 августа 2013 года между МОН РФ и ННГУ им. Н. И. Лобачевского).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.
2. Шварцбург А. Б. // УФН. 2000. Т. 170. С.835.
3. Балханов В. К., Ангархаева Л. Х., Башкуев Ю. Б., Гантимуров А. Г. // Радиотехника и электроника. 2012. Т. 57, № 11. С. 1170.

4. Денисова Н. А., Резвов А. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 2012. Т. 55, № 5. С. 369.
5. Марченко В. А. Операторы Штурма—Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977. 329 с.
6. Денисова Н. А., Степанова С. А. // Журн. вычислит. математ. и математ. физики. 1999. Т. 39, № 7. С. 1180.
7. Денисова Н. А., Маркова К. А. // Вестник ННГУ. 2014. Т. 1, № 1. С. 192.
8. Денисова Н. А. // Вестник ННГУ. 2014. Т. 3, № 1. С. 99.

Поступила в редакцию 19 марта 2015 г.; принята в печать 16 августа 2015 г.

**EXACT ANALYTICAL SOLUTIONS OF THE PROBLEM OF
ELECTROMAGNETIC-WAVE REFLECTION FROM DIELECTRIC LAYERS WITH
NEW TYPES OF INHOMOGENEITIES**

N. A. Denisova

We describe a method of finding new classes of monotonic and nonmonotonic profiles of the refractive index in inhomogeneous layers, which allow one to obtain analytical solutions of the direct problem of electromagnetic-field reflection. The possibility to use inhomogeneous layers for optical brightening is discussed.