

УДК 534.222

## ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В СРЕДАХ С НЕУПРУГИМ ГИСТЕРЕЗИСОМ С НАСЫЩЕНИЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ПОТЕРЬ

*В. Е. Назаров\**, *С. Б. Кляшко*

Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород, Россия

Проведено теоретическое исследование нелинейных волновых процессов при возбуждении продольной гармонической волны в безграничной среде и в стержневом резонаторе с неупругим гистерезисом с насыщением амплитудно-зависимых потерь. Определены характеристики нелинейных волн в таких системах: зависящие от амплитуды потери, изменение скорости распространения волны, сдвиг резонансных частот и амплитуды высших гармоник. Проведено сравнение результатов теоретических и экспериментальных исследований нелинейных эффектов в стержневом резонаторе из отожжённой поликристаллической меди. Определены значения эффективных параметров гистерезисной нелинейности этого металла.

### ВВЕДЕНИЕ

Распространение интенсивных упругих волн в поликристаллических твердых телах, обладающих гистерезисной нелинейностью, сопровождается нелинейными эффектами амплитудно-зависимого внутреннего трения [1–7] и генерацией высших гармоник. При этом во многих металлах (медь [4, 7], алюминий [8], индий [9, 10], цинк [11, 12], свинец [13]) и в сплавах меди (с эффектом памяти формы [14]) наблюдалось насыщение гистерезисных потерь. Закономерности проявления этих эффектов определяются нелинейностью уравнения состояния среды, т. е. гистерезисной зависимостью  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ , где  $\sigma$  и  $\varepsilon$  — напряжение и деформация соответственно. В теории амплитудно-зависимого внутреннего трения различают два основных вида гистерезиса: упругий (или гистерезис отрыва) и неупругий (гистерезис трения) [15–17]. Оба гистерезиса одинаково хорошо объясняют эффекты амплитудно-зависимого внутреннего трения, — декремент затухания и дефект модуля упругости, однако они существенно отличаются друг от друга. Для упругого гистерезиса  $\sigma = \sigma(\varepsilon = 0) = 0$ , а для неупругого  $\sigma = \sigma(\varepsilon = 0) \neq 0$  и  $\varepsilon(\sigma = 0) \neq 0$ . Причины проявления гистерезисных зависимостей  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  для поликристаллов обычно связывают с движением дислокаций и их взаимодействием с примесными атомами, но, по-видимому, механизмы различных гистерезисов различны. Из-за их различий закономерности нелинейных волновых процессов в средах с упругим и неупругим гистерезисами несколько отличаются друг от друга [17]. Эти отличия выявляются при изучении эффектов генерации высших гармоник акустических волн и их нелинейных искажений. На основе анализа нелинейных эффектов, наблюдаемых в конкретном гистерезисном материале, можно, в принципе, определить, какого вида гистерезис имеет место для этого материала [17]. Такой вывод, однако, не будет универсальным и справедливым для всех гистерезисных материалов; в каждом конкретном случае ответ на вопрос, каким гистерезисом описывать тот или иной материал, можно получить только на основе анализа и сравнения результатов экспериментальных и теоретических исследований нелинейных эффектов в этом материале. Волновые процессы в средах с упругим гистерезисом с насыщением нелинейных потерь исследовались в работах [18, 19].

---

\* nazarov@hydro.appl.sci-nnov.ru

В данной работе проводится исследование нелинейных волновых процессов в безграничной среде и в стержневом резонаторе с неупругим квадратичным гистерезисом с насыщением нелинейных потерь. Определены характеристики нелинейных волн в таких системах: амплитудно-зависимые потери, изменение скорости распространения волны, сдвиг резонансных частот и амплитуды высших гармоник. Проведено сравнение результатов теоретических и экспериментальных исследований нелинейных эффектов в стержневом резонаторе из отожжённой поликристаллической меди и определены значения эффективных параметров гистерезисной нелинейности этого металла.

## 1. НЕУПРУГИЙ ГИСТЕРЕЗИС С НАСЫЩЕНИЕМ АМПЛИТУДНО-ЗАВИСИМЫХ ПОТЕРЬ

Уравнение состояния среды с неупругим квадратичным гистерезисом с насыщением нелинейных потерь можно представить в следующем виде:

$$\sigma(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon}) = E[\varepsilon - f(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon})] + \alpha \rho \dot{\varepsilon}, \quad (1)$$

$$f(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon}) = \frac{\beta \varepsilon_m \varepsilon}{1 + \gamma_0 \varepsilon_m} + \frac{1}{2(1 + \gamma_0 \varepsilon_m)} \begin{cases} \beta_1 \varepsilon^2 - \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \varepsilon_m^2, & \dot{\varepsilon} > 0; \\ -\beta_2 \varepsilon^2 + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \varepsilon_m^2, & \dot{\varepsilon} < 0. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь  $E$  — модуль упругости для безграничной среды (для стержня это модуль Юнга,  $E = K(1 - \nu)/[3(1 + \nu)]$ ,  $K$  — модуль всестороннего сжатия,  $\nu$  — коэффициент Пуассона);  $f(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon})$  — гистерезисная функция,  $|f(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon})| \ll |\varepsilon| \ll 1$ ,  $|f'_\varepsilon(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon})| \ll 1$ ;  $\varepsilon_m$  — амплитуда деформации;  $\beta$ ,  $\beta_i$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\gamma_0$  — параметры гистерезисной нелинейности,  $\beta_i > 0$ ,  $\gamma_0 \geq 0$ ,  $|\beta \varepsilon_m| \ll 1$ ,  $|\beta_i \varepsilon_m| \ll 1$ ;  $\rho$  — плотность,  $\alpha$  — коэффициент линейной диссипации. В уравнении (2) первое (негистерезисное) слагаемое определяет дефект модуля (или нелинейную поправку к скорости распространения волны), второе (гистерезисное) — зависящие от амплитуды потери, а множитель  $(1 + \gamma_0 \varepsilon_m)^{-1}$  отвечает за насыщение эффектов амплитудно-зависимого внутреннего трения. При  $\gamma_0 = 0$  и  $\beta = \beta_1 = \beta_2$  уравнение (2) описывает симметричный квадратичный гистерезис Давиденкова [1, 15, 16], который не объясняет насыщения нелинейных потерь. В этой модели гистерезисное поведение материала связывается с его микропластической деформацией, вызванной необратимым движением дислокаций в поле упругой волны. Из уравнения (2) получаем выражение для зависящего от амплитуды декремента поглощения:

$$\eta(\varepsilon_m) = \frac{1}{\varepsilon_m^2} \oint f(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon}) d\varepsilon = \frac{2(\beta_1 + \beta_2)}{3(1 + \gamma_0 \varepsilon_m)} \varepsilon_m > 0. \quad (3)$$

Из (3) следует, что при  $\gamma_0 \varepsilon_m \ll 1$  — для декремента справедливо выражение  $\eta(\varepsilon_m) = 2(\beta_1 + \beta_2) \varepsilon_m / 3 \propto \varepsilon_m$ , а при  $\gamma_0 \varepsilon_m \gg 1$  —  $\eta(\varepsilon_m) = 2(\beta_1 + \beta_2) \varepsilon_m / (3\gamma_0)$ , что соответствует насыщению нелинейных потерь.

## 2. ЭВОЛЮЦИЯ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ В БЕЗГРАНИЧНОЙ СРЕДЕ

Вначале мы рассмотрим нелинейное распространение первоначально гармонической продольной волны в безграничной среде. Здесь для того, чтобы наиболее чётко проявлялось влияние гистерезисных свойств среды на динамику нелинейных волновых процессов, мы не будем учитывать линейную диссипацию, определяемую слагаемым  $\alpha \rho \dot{\varepsilon}$ . Это справедливо для относительно низкочастотных волн с достаточно большой амплитудой, когда выполняется условие

$E|f(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon})| \gg \alpha\rho|\dot{\varepsilon}|$ . В этом случае удаётся получить точное решение задачи о распространении первоначально гармонической волны.

Подставляя уравнение (1) в уравнение движения [20]  $\rho U_{tt} = \sigma_x(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon})$ , где  $U$  — смещение,  $\varepsilon(x, t) = \partial U(x, t)/\partial x$ , и пренебрегая линейной диссипацией, получим одномерное волновое уравнение для продольных смещений  $U(x, t)$

$$U_{tt} - C_0^2 U_{xx} = -C_0^2 f_x(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon}), \tag{4}$$

где  $C_0 = (E/\rho)^{1/2}$  — скорость продольной волны. Здесь и далее индексы  $t$  и  $x$  обозначают частные производные по времени  $t$  и координате  $x$  соответственно.

Переходя в уравнении (4) к переменной  $\tau = t - x/C_0$ , получим эволюционное уравнение для положительных ( $\partial\varepsilon/\partial\tau > 0$ ) и отрицательных ( $\partial\varepsilon/\partial\tau < 0$ ) фронтов волны деформации, бегущей в положительном направлении оси  $x$ :

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} = -\frac{1}{2C_0} \frac{\partial}{\partial\tau} [f(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon})]. \tag{5}$$

Граничное условие зададим в виде  $\varepsilon(x = 0, t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t)$ . При решении уравнения (5) мы будем пользоваться методом «сшивания» простых волн, отвечающих каждой ветви гистерезиса (2) [17]. Решение уравнения (5) имеет следующий вид (см. рис. 1):

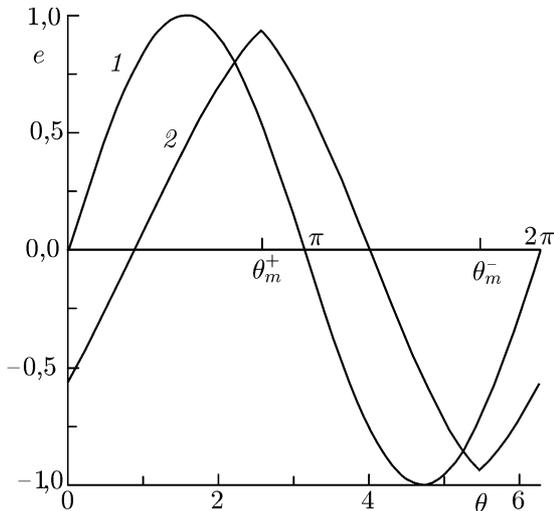


Рис. 1. Форма одного периода волны  $e = e(z, \theta)$  при  $\mu = 0,5$ ,  $\lambda = 1,5$ ,  $a = 1$ ,  $z = 0$  (кривая 1) и  $z = 1$  (кривая 2)

$$e(z, \theta) = \begin{cases} \sin\left[\theta - \lambda \int_0^z \frac{e_m(z') dz'}{1 + ae_m(z')} - e(z, \theta) \int_0^z \frac{dz'}{1 + ae_m(z')}\right], & e_\theta(z, \theta) > 0; \\ \sin\left[\theta - \lambda \int_0^z \frac{e_m(z') dz'}{1 + ae_m(z')} + \mu e(z, \theta) \int_0^z \frac{dz'}{1 + ae_m(z')}\right], & e_\theta(z, \theta) < 0, \end{cases} \tag{6}$$

где  $\theta = \omega\tau$ ,  $e(z, \theta) = \varepsilon(z, \theta)/\varepsilon_0$ ,  $e_m(z) = \varepsilon_m(z)/\varepsilon_0$ ,  $\mu = \beta_2/\beta_1 \geq 0$ ,  $\lambda = \beta/\beta_1$ ,  $z = y\varepsilon_0$ ,  $y = \beta_1 kx/2$ ,  $k = \omega/C_0$ ,  $a = \gamma_0\varepsilon_0$ . При этом амплитуда  $e_m(z)$  и значения фаз  $\theta_m^+(z)$ ,  $\theta_m^-(z)$ , в которых положительный ( $e_\theta(z, \theta) > 0$ ,  $\theta_m^-(z) \leq \theta \leq \theta_m^+(z)$ ) фронт волны переходит в отрицательный ( $e_\theta(z, \theta) < 0$ ,  $\theta_m^+(z) \leq \theta \leq \theta_m^-(z) + 2\pi$ ) определяются уравнениями

$$e[z, \theta_m^\pm(z)] = \pm e_m(z), \tag{7}$$

$$\theta_m^\pm(z) = \pm \arcsin e_m(z) + \lambda \int_0^z \frac{e_m(z') dz'}{1 + ae_m(z')} \pm e_m(z) \int_0^z \frac{dz'}{1 + ae_m(z')}. \tag{8}$$

Из выражения (6) и рис. 1 следует, что по мере распространения первоначально гармонической волны она затухает и, искажаясь, превращается в пилообразную; её амплитуда  $e_m(z)$  определяется уравнением

$$e_m(z) = \cos\left[\frac{1 + \mu}{2} e_m(z) \int_0^z \frac{dz'}{1 + ae_m(z')}\right]. \tag{9}$$

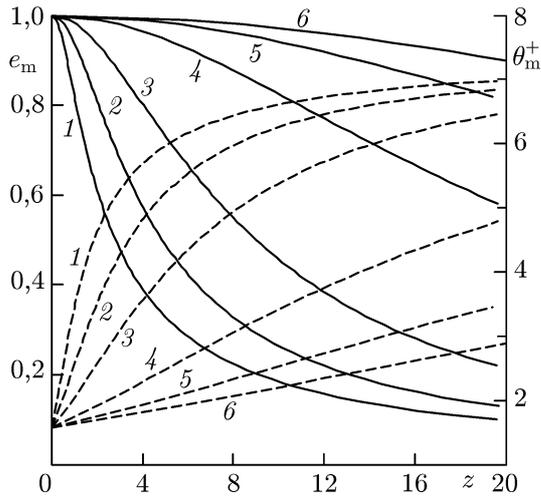


Рис. 2. Зависимость амплитуды  $e_m(z)$  (сплошные линии) и фазы  $\theta_m^+(z)$  (штриховые линии) от  $z$  при  $\mu = 0,5$ ,  $\lambda = 1,5$  и различных значениях  $a$ :  $a = 1$  (кривая 1),  $a = 1$  (2),  $a = 3$  (3),  $a = 10$  (4),  $a = 20$  (5),  $a = 30$  (6)

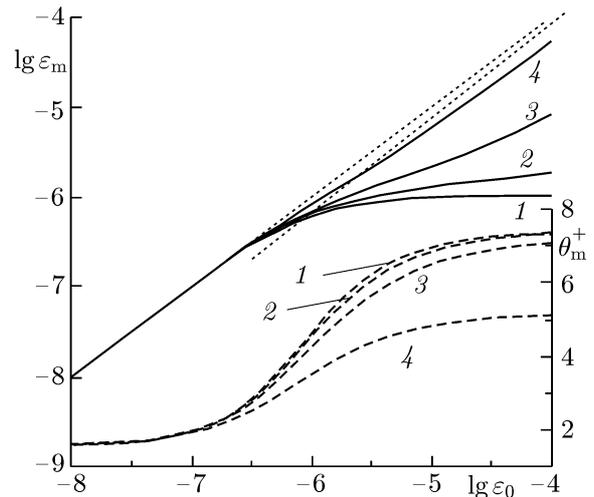


Рис. 3. Зависимости амплитуды  $\epsilon_m(z)$  (сплошные линии) и фазы  $\theta_m^+(z)$  (штриховые линии) от  $\epsilon_0$  при  $\mu = 0,5$ ,  $\lambda = 1,5$ ,  $y = 2 \cdot 10^6$  и различных значениях параметра  $\gamma_0$ :  $\gamma_0 = 0$  (кривая 1),  $\gamma_0 = 10^5$  (2),  $\gamma_0 = 3 \cdot 10^5$  (3),  $\gamma_0 = 10^6$  (4). Пунктирные линии соответствуют зависимостям  $\epsilon_m(z) \propto \epsilon_0$

Решение уравнения (9) имеет вид

$$(a + 1/e_m) \arccos e_m - a[S(1) - S(e_m)] - (\pi a/2) \ln e_m = (1 + \mu) z/2, \tag{10}$$

где

$$S(e_m) = e_m + \frac{1}{2 \cdot 3^2} e_m^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5^2} e_m^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7^2} e_m^7 + \dots$$

На рис. 2 приведены зависимости амплитуды  $e_m(z)$  и фазы  $\theta_m^+(z)$  от переменной  $z$  при  $\lambda = 1,5$ ,  $\mu = 0,5$  и различных значениях параметра  $a = \gamma_0 \epsilon_0$ . Видно, что с ростом  $z$  амплитуда  $e_m(z)$  из-за гистерезисных потерь уменьшается, а фаза  $\theta_m^+(z)$  — растёт. При увеличении параметра  $\gamma_0$  скорости изменения амплитуды  $e_m(z)$  и фазы  $\theta_m^+(z)$  уменьшаются. На рис. 3 приведены зависимости амплитуды  $\epsilon_m(z)$  и фазы  $\theta_m^+(z)$  от начальной амплитуды  $\epsilon_0$  при  $\lambda = 1,5$ ,  $y = 2 \cdot 10^6$  и при различных значениях параметра  $\gamma_0$ . При  $\gamma_0 \epsilon_0 \ll 1$  имеем  $\epsilon_m = \epsilon_0$ , а затем при увеличении  $\gamma_0 \epsilon_0$  зависимость  $\epsilon_m$  от  $\epsilon_0$  становится нелинейной (линии 1, 2), что связано с ростом гистерезисных потерь. При  $\gamma_0 \epsilon_0 > 1$ , когда гистерезисные потери насыщаются, зависимость  $\epsilon_m$  от  $\epsilon_0$  стремится к линейной:  $\epsilon_m(z) \propto \epsilon_0$  (линии 3, 4). Зависимости  $\theta_m^+$  от  $\epsilon_0$  ведут себя так, что  $\theta_m^+(\gamma_0 \epsilon_0 \ll 1) = C_1$  и  $\theta_m^+(\gamma_0 \epsilon_0 \gg 1) = C_2 > C_1$ , при этом с ростом параметра  $\gamma_0$  константа  $C_2$  уменьшается.

Поскольку форма нелинейной волны (6) при распространении непрерывно изменяется, то изменяется и её спектральный состав. Разложим периодическую волну (6) в ряд Фурье

$$e(z, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n(z) \sin n[\theta - \psi(z)], \tag{11}$$

где

$$e_n(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\arcsin e_m(z)} \sin \xi \cdot \left\{ \sin \left[ n \left( \xi + \frac{2 \arccos[e_m(z)]}{(1 + \mu) e_m(z)} \sin \xi \right) \right] \left( 1 + \frac{2 \arccos[e_m(z)]}{(1 + \mu) e_m(z)} \cos \xi \right) + \right. \\ \left. + (-1)^{n+1} \sin \left[ n \left( \xi + \frac{2\mu \arccos[e_m(z)]}{(1 + \mu) e_m(z)} \sin \xi \right) \right] \left( 1 + \frac{2\mu \arccos[e_m(z)]}{(1 + \mu) e_m(z)} \cos \xi \right) \right\} d\xi, \\ \psi(z) = \lambda \int_0^z \frac{e_m(z') dz'}{1 + a e_m(z')}. \tag{12}$$

Из выражения (11) следует, что скорость распространения гармоник волны зависит от амплитуды  $e_m(z)$ , однако все гармоники распространяются с одной и той же скоростью

$$C(z) = \frac{C_0}{1 + \alpha e_m(z) / \{2[1 + \gamma_0 e_m(z)]\}},$$

и, следовательно, среда с неупругим гистерезисом (2) не обладает нелинейной дисперсией (в отличие от среды с упругим гистерезисом [18, 19]). При  $z \ll 1$  форма волны  $e(z, \theta)$  близка к исходной (гармонической) и из выражений (11) и (12) получаем

$$e(z, \theta) = \left[ 1 - \frac{2(1 + \mu)z}{3\pi\sqrt{1+a}} \right] \sin[\theta - \psi(z)] - \frac{(1 - \mu)z}{4\sqrt{1+a}} \sin \{2[\theta - \psi(z)]\} + \\ + \frac{2(1 + \mu)z}{\pi\sqrt{1+a}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n - 1)(2n + 3)} \sin \{(2n + 1)[\theta - \psi(z)]\}, \tag{13}$$

где  $\psi(z) = \lambda z / (1 + a)$ . На малых расстояниях спектр волны, кроме основной частоты, содержит чётную вторую гармонику и все нечётные гармоники, причём для амплитуд  $\varepsilon_n$  выполняются следующие соотношения:  $\{\varepsilon_2, \varepsilon_{2n+1}\} \propto \varepsilon_0^2 kx$  при  $a \ll 1$  и  $\{\varepsilon_2, \varepsilon_{2n+1}\} \propto \varepsilon_0 kx$  при  $a \gg 1$ .

При  $e_m(z) \ll 1/a, z \gg [\pi a / (1 + \mu)] |\ln e_m(z)|$  из выражения (6) получаем

$$e(z, \theta) = \frac{1}{z} \begin{cases} \theta - \psi(z), & e_\theta(z, \theta) > 0; \\ \mu^{-1} [\pi - \theta + \psi(z)], & e_\theta(z, \theta) < 0, \end{cases} \tag{14}$$

$$e(z, \theta) = \frac{2(1 + \mu)^2}{\pi^2 \mu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \left( \frac{n\pi}{1 + \mu} \right) \sin \{n[\theta - \psi(z)]\}, \quad e_m(z) = \frac{\pi}{(1 + \mu)z}, \tag{15}$$

где

$$\psi(z) = \frac{\lambda}{1 + \mu} \left[ \pi - 2S(1) + \pi \ln \frac{(1 + \mu)z}{\pi} \right], \quad \theta_m^\pm = \psi(z) \pm \frac{\pi}{1 + \mu}.$$

Здесь спектр волны содержит как чётные, так и нечётные гармоники, а для амплитуд  $\varepsilon_n$  выполняется соотношение  $\varepsilon_n \propto \varepsilon_0 / (kx)$ .

На рис. 4 приведены зависимости амплитуд первых пяти гармоник  $e_n(z)$  от расстояния  $z$  ( $\varepsilon_0 = = 10^{-4}$ ) при  $\mu = 0,5$ . С ростом  $z$  амплитуда  $e_1(z)$  первой гармоники монотонно уменьшается из-за гистерезисных потерь и генерации высших гармоник. Амплитуды  $e_{n \geq 2}(z)$  высших гармоник вначале растут от нуля, достигают максимумов, а затем затухают. При этом амплитуда  $e_5(z)$  пятой гармоники затухает немонотонно,  $e_5(z \approx 3,9) = 0$ . Соответственно ведут себя и зависимости

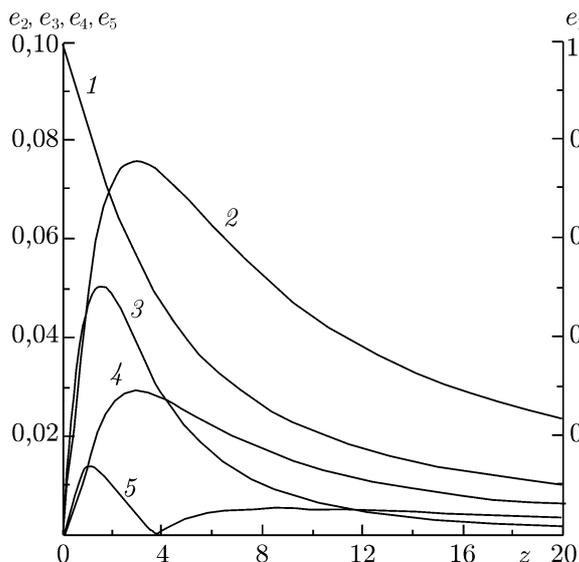


Рис. 4. Зависимости амплитуд  $e_n(z)$  первых пяти гармоник от  $z$  при  $\mu = 0,5$ ,  $\lambda = 1,5$  и  $a = 1$ , номер кривой соответствует номеру гармоники

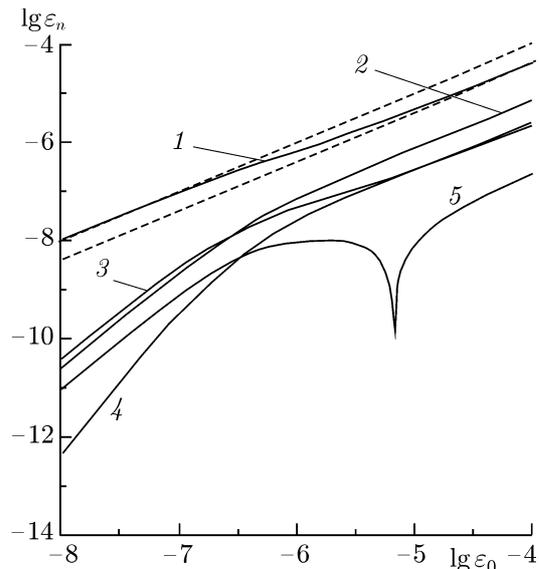


Рис. 5. Зависимости амплитуд  $\epsilon_n(z)$  первых пяти гармоник от  $\epsilon_0$  при  $\gamma_0 = 10^6$ ,  $y = 2 \cdot 10^6$ ,  $\mu = 0,5$ ,  $\lambda = 1,5$ . Номер кривой соответствует номеру гармоники, штриховые линии соответствуют зависимости  $\epsilon_1(z) \propto \epsilon_0$

амплитуд  $\epsilon_n(z) = \epsilon_0 e_n(z)$  от  $\epsilon_0$  при  $y = \text{const}$  (см. рис. 5). Видно, что при увеличении  $\epsilon_0$  амплитуды  $\epsilon_n(z)$  растут, причём при малых  $\epsilon_0$   $\epsilon_1 \propto \epsilon_0$ ,  $\{\epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_5\} \propto \epsilon_0^2$ ,  $\epsilon_4 \propto \epsilon_0^3$ , а при дальнейшем увеличении  $\epsilon_0$  из-за насыщения нелинейных потерь  $\epsilon_n \propto \epsilon_0$ , при этом амплитуда пятой гармоники испытывает биение и при  $\epsilon_0^* \approx 6,3 \cdot 10^{-6}$  фактически уменьшается до нуля. Последнее связано с резонансными взаимодействиями бесконечно большого числа кратных гармоник, составляющих непрерывно изменяющуюся периодическую волну (6): форма волны изменяется, поэтому соотношения между амплитудами её гармоник также изменяются.

Таким образом, на основе анализа точного решения задачи о распространении и эволюции первоначально гармонической волны в среде с неупругим гистерезисом и с насыщением нелинейных потерь определены основные закономерности для характеристик нелинейной волны в такой среде. Экспериментальное выявление подобных закономерностей для конкретной среды и их сравнение с теоретическими для сред с различными гистерезисами (упругим и неупругим) будет способствовать правильному выбору гистерезисного уравнения состояния этой среды.

### 3. ЭФФЕКТЫ АМПЛИТУДНО-ЗАВИСИМОГО ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ И ГЕНЕРАЦИЯ ВЫСШИХ ГАРМОНИК В РЕЗОНАТОРЕ

В резонаторе при его возбуждении на частоте, близкой к резонансной, нелинейные волновые процессы протекают более интенсивно, чем в безграничной среде (при заданной амплитуде  $\epsilon_0$ ). Из-за отражений от границ резонатора в нём устанавливается волна, имеющая стоячую структуру. В высокочастотных резонаторах амплитуда резонансных колебаний значительно превышает амплитуду колебаний излучателя и может достигать достаточно высоких значений, при которых гистерезисная нелинейность поликристаллических твёрдых тел проявляется весьма заметно. При рассмотрении нелинейных колебаний в стержневом резонаторе мы будем учитывать линейную дисперсию фазовой скорости продольных волн, связанную с конечным радиусом  $R$  стержня. Подставляя уравнение состояния (1) в уравнение движения и учитывая низкочастотную геометриче-

скую дисперсию фазовой скорости в стержне [21], получим волновое уравнение для продольных смещений  $U(x, t)$ :

$$U_{tt} - C_0^2 U_{xx} = -C_0^2 f_x(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon}) + \alpha U_{xxt} + \nu^2 r_0^2 U_{xxtt}, \quad (16)$$

где  $r_0 = R/\sqrt{2}$ .

Граничные условия для резонатора с жёсткой ( $x = 0$ ) и мягкой ( $x = L$ ) границами имеют вид

$$U(x = 0, t) = A_0 \sin(\Omega t), \quad U_x(x = L, t) = 0, \quad (17)$$

где  $L$  — длина резонатора,  $A_0$  и  $\Omega$  — амплитуда и частоты возбуждения резонатора.

При гармоническом возбуждении нелинейного резонатора в нём возникнут колебания на частотах высших гармоник, при этом, вообще говоря, все они будут взаимодействовать друг с другом. Геометрическая дисперсия фазовой скорости акустических волн в стержне не влияет на эффекты амплитудно-зависимого внутреннего трения (декремент затухания и дефект модуля упругости), но она уменьшает эффективность генерации высших гармоник. В стержневом резонаторе с жёсткой и мягкой границами имеют место два вида дисперсии: граничная и геометрическая. Подставляя в линеаризованное уравнение (16) смещение  $U(x, t) \propto \exp\{i[\Omega t - K(\Omega)x]\}$ , находим дисперсионное соотношение и, из граничных условий (17), собственные волновые числа  $K_p$  и резонансные частоты  $\Omega_p$  резонатора при  $\Omega/\Omega_d \ll 1$ :

$$K(\Omega) = \frac{\Omega}{C_0} \left[ 1 + \left( \frac{\Omega}{\Omega_d} \right)^2 \right], \quad K_p = \frac{(2p-1)\pi}{2L} = (2p-1)K_1, \quad \Omega_p = \frac{\pi C_0 (2p-1)}{2L} (1 - m_p), \quad (18)$$

где

$$\Omega_d = \frac{2C_0}{\nu r_0} \sqrt{\frac{1+\nu}{1+2\nu}}, \quad m_p = \left[ \frac{\pi \nu r_0 (2p-1)}{4L} \right]^2 \frac{1+2\nu}{1+\nu} \ll 1,$$

$p = 1, 2, 3, \dots$  — номер моды. Из выражений (18) видно, что при  $m_p \ll 1$  собственные числа  $K_p$  и резонансные частоты  $\Omega_p$  такого резонатора пропорциональны нечётным числам  $(2p-1)$ , поэтому  $2\Omega_p \neq \Omega_{2p}$ , а  $3\Omega_p \approx \Omega_{3p-1}$ . Таким образом, при возбуждении в нелинейном резонаторе с жёсткой и мягкой границами колебаний на частоте  $\Omega \approx \Omega_p$  возникающие в нём колебания на частоте  $2\Omega \approx 2\Omega_p$  будут нерезонансными (из-за граничной дисперсии), а на частоте  $3\Omega \approx 3\Omega_p$  — близкими к резонансным (из-за слабой геометрической дисперсии). Для решения системы уравнений (16), (17) используем замену:

$$V(x, t) = U(x, t) - A_0 \cos(\Omega t), \quad (19)$$

при которой граничные условия для функции  $V(x, t)$  становятся нулевыми:  $V(x = 0, t) = 0$ ,  $V_x(x = L, t) = 0$ . Будем рассматривать вынужденные колебания резонатора вблизи резонанса моды с номером  $p$ , когда  $\{|U(x, t)|, |V(x, t)|\} \gg A_0$ . Подставляя (19) в уравнение (16), получим волновое уравнение для  $V(x, t)$ , в правой части которого находятся слагаемые, учитывающие нелинейность, линейную диссипацию и внешнюю силу:

$$V_{tt} - C_0^2 V_{xx} - \nu^2 r_0^2 V_{xxtt} = -C_0^2 [f(V_x, \text{sign } V_{xt})]_x + \alpha V_{xxt} + A_0 \Omega^2 \cos(\Omega t). \quad (20)$$

Считая эти слагаемые малыми, будем искать решение уравнения (20) в виде, близком к решению однородного уравнения:

$$V(x, t) = V_1(x, t) + W(x, t). \quad (21)$$

Здесь  $V_1(x, t) = V_0 \sin(K_p x) \cos \vartheta$ ,  $W(x, t) = \sum_{n=2}^{\infty} V^{(n)}(x, t) = \sum_{n=2}^{\infty} V^{(n)}(x) \sin(n\vartheta + \varphi_n)$  — малая поправка,  $|W(x, t)| \ll |V_1(x, t)|$ ,  $|W_x(x, t)| \ll |V_{1x}(x, t)|$ ,  $\vartheta = (\Omega_p + \delta)t + \varphi_1$ ,  $V_0$  и  $\varphi_1$  — амплитуда и фаза колебаний на частоте  $\Omega$  соответственно,  $V_n(x)$  и  $\varphi_n$  — амплитуда и фаза колебаний на

частоте  $n\Omega$ ,  $\delta = \Omega - \Omega_p$ ,  $|\delta| \ll \Omega_p/p$ . В этом приближении гармоники нелинейной волны  $V(x, t)$  не взаимодействуют друг с другом, а их амплитуды и фазы определяются только волной  $V_1(x, t)$  на основной частоте, т. е. первой её гармоникой.

Из выражения (21) следует:

$$\varepsilon(x, t) = \varepsilon_1(x, t) + W_x(x, t) = \varepsilon_m \cos(K_p x) \cos \vartheta + \sum_{n=2}^{\infty} V_{nx} \sin(n\vartheta + \varphi_n), \quad (22)$$

где  $\varepsilon_1(x, t) = V_{1x}(x, t) = \varepsilon_m \cos(K_p x) \cos \vartheta$ ,  $\varepsilon_m \approx V_0 K_p$  — амплитуда деформации в резонаторе на частоте  $\Omega = \Omega_p + \delta$ , при этом амплитуда деформации  $\varepsilon_m(x)$  в уравнении (2) определяется выражением  $\varepsilon_m(x) = \varepsilon_m |\cos(K_p x)|$ .

Подставляя выражения (21) и (22) в уравнение (20), получим неоднородное уравнение для  $W(x, t)$ , удовлетворяющее нулевым граничным условиям  $W(x=0, t) = W_x(x=L, t) = 0$ ,

$$W_{tt} - C_0^2 W_{xx} - \nu^2 r_0^2 W_{xxt} - \alpha W_{xxt} = -C_0^2 [f(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon})]_x + \alpha \Omega_p K_p^2 V_0 \sin(K_p x) \sin \vartheta + 2\delta \Omega_p V_0 \sin(K_p x) \cos \vartheta + A_0 \Omega_p^2 \cos(\vartheta - \varphi_1). \quad (23)$$

Для того, чтобы решение этого уравнения не нарастало во времени, должно выполняться условие ортогональности его правой части собственным функциям  $\sin(K_p x)$  оператора, стоящего в левой части. Это эквивалентно отсутствию в правой части уравнения (23) фурье-компонент с волновым числом  $K_p$  и частотой  $\Omega$ . Опуская промежуточные вычисления, приведём конечные выражения для основных характеристик нелинейных колебаний резонатора: резонансной кривой, зависящих от амплитуды потерь  $\mu_{nl}(\varepsilon_m)$  и сдвига резонансной частоты  $\delta_{nl}(\varepsilon_m)$ , а также для амплитуд  $V_2(L)$  и  $\varepsilon_3$  второй и третьей гармоник при  $\delta = \delta_{nl}(\varepsilon_m)$ :

$$\varepsilon_m = \frac{A_0 \Omega_p / L}{\{[\delta - \delta_{nl}(\varepsilon_m)]^2 + \Omega_p^2 [\mu_p + \mu_{nl}(\varepsilon_m)]^2 / 4\}^{1/2}}, \quad (24)$$

$$\delta_{nl}(\varepsilon_m) = -a_1 \Omega_p \varepsilon_m R_1(a), \quad \mu_{nl}(\varepsilon_m) = b_1 \varepsilon_m R_1(a), \quad (25)$$

$$V_2(L) = a_2 \varepsilon_m^2 L R_2(a), \quad (26)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{4a_3 \Omega_p \varepsilon_m^2 R_3(a)}{15\pi \left( (\Omega_p / \Omega_{3p-1})^2 + 4 \{ (\Delta \Omega_{3p-1} / 3) + [1 - q(a)] \delta_{nl}(\varepsilon_m) \}^2 \right)^{1/2}}, \quad (27)$$

где  $\mu_p = \Omega_p^{-1} = \alpha \Omega_p / C_0^2$ ,  $\Delta \Omega_{3p-1} = 3\Omega_p - \Omega_{3p-1}$  — дисперсионная расстройка частоты  $3\Omega_p$  от резонансной частоты моды с номером  $(3p-1)$ ,  $a = \gamma_0 \varepsilon_m$ ,  $a_1 = 4\beta / (3\pi)$ ,  $b_1 = 16(\beta_1 + \beta_2) / (9\pi^2)$ ,  $a_2 = (\beta_1 - \beta_2) / 32$ ,  $a_3 = 4(\beta_1 + \beta_2) / (15\pi)$ ,  $q(a) = 27R_4(a) / [35R_1(a)]$ ,

$$\begin{aligned} R_1(a) &= \frac{3}{2a} \left[ \frac{\pi}{4} - \frac{1}{a} + \frac{\pi}{2a^2} - \frac{\ln(a + \sqrt{a^2 - 1})}{a^2 \sqrt{a^2 - 1}} \right], \\ R_2(a) &= \frac{16}{\pi a} \left[ \frac{1}{6} + \frac{1}{a^2} - \frac{\pi}{2a^3} + \frac{(2 - a^2) \ln(a + \sqrt{a^2 - 1})}{2a^3 \sqrt{a^2 - 1}} \right], \\ R_3(a) &= \frac{15}{2a^2} \left[ \frac{1}{3} - \frac{\pi}{2a} - \frac{4}{a^2} + \frac{2\pi}{a^3} + \frac{(3a^2 - 4) \ln(a + \sqrt{a^2 - 1})}{a^3 \sqrt{a^2 - 1}} \right], \\ R_4(a) &= \frac{35\pi}{72a} \left[ 1 - \frac{32}{15\pi a} - \frac{8(3a^2 - 4)}{15\pi a} R_3(a) \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

Из-за нелинейности резонатора зависимость  $\epsilon_m = \epsilon_m(A_0)$  является также нелинейной, при этом максимальная амплитуда  $\epsilon_m$  имеет место при резонансе, когда  $\delta = \delta_{nl}(\epsilon_m)$ :

$$\epsilon_m = \frac{2A_0\Omega_p/L}{1 + \mu_{nl}(\epsilon_m)/\mu_p}. \tag{29}$$

Из выражений (25) следует, что для резонатора с неупругим гистерезисом (2) имеет место соотношение [3–5,7]

$$r = \frac{\mu_{nl}(\epsilon_m)}{|\delta_{nl}(\epsilon_m)/\Omega_p|} = \frac{b_1}{a_1} = \text{const}. \tag{30}$$

Независимость (или зависимость) параметра  $r$  от амплитуды  $\epsilon_m$  является одним из признаков пригодности (или непригодности) модели неупругого гистерезиса (2) для описания эффектов амплитудно-зависимого внутреннего трения, в среде с гистерезисной нелинейностью.

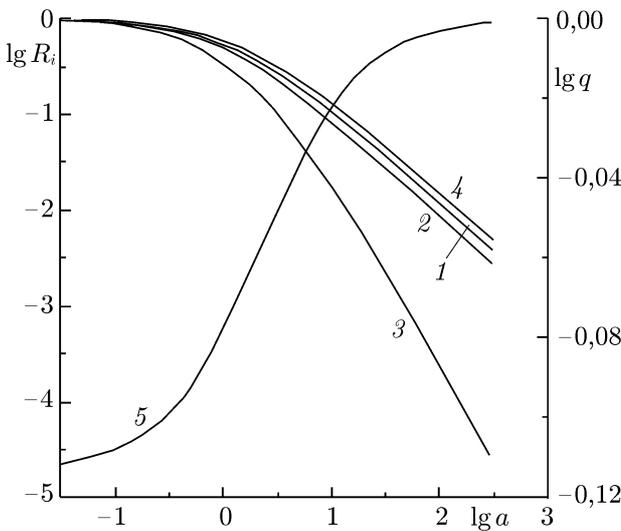


Рис. 6. Зависимости функций  $R_i(a)$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , (кривые 1-4 соответственно) и  $q(a)$  (кривая 5) от параметра  $a$

На рис. 6 приведены зависимости функций  $R_i(a)$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , и  $q(a)$  от параметра  $a = \gamma_0\epsilon_m$ . Эти функции определяют отличия закономерностей нелинейных эффектов в резонаторе с насыщением гистерезисных потерь и без насыщения (при  $\gamma_0 = 0$ ). Из выражений (28) и рис. 6 следует, что при  $a \ll 1$  имеем  $R_i(a) = 1$ ,  $i = 1, \dots, 4$ ,  $q(a) = 27/35$ , а при  $a \gg 1$  соответственно  $R_1(a) = 3\pi/(8a)$ ,  $R_2(a) = 8/(3\pi a)$ ,  $R_3(a) = 5/(2a^2)$ ,  $R_4(a) = 35\pi/(72a)$ ,  $q(a) = 1$ . Из выражений (25) следует, что при  $a \ll 1$  будем иметь  $\delta_{nl}(\epsilon_m) \propto \epsilon_m$ ,  $\mu_{nl}(\epsilon_m) \propto \epsilon_m$ ,  $V_2(\epsilon_m) \propto \epsilon_m^2$ , а при  $a \gg 1$  соответственно  $\delta_{nl}(\epsilon_m) \propto \text{const}$ ,  $\mu_{nl}(\epsilon_m) \propto \text{const}$ ,  $V_2(\epsilon_m) \propto \epsilon_m$ . Здесь зависимости  $\delta = \delta_{nl}(\epsilon_m)$ ,  $\mu = \mu_{nl}(\epsilon_m)$  и  $V_2 = V_2(\epsilon_m)$  такие же, как аналогичные зависимости для нелинейной волны в безграничной среде. Интересно, однако, сравнить амплитудные зависимости для третьей гармоники.

При  $a \ll 1$  (и в безграничной среде, и в резонаторе)  $\epsilon_3(\epsilon_m) \propto \epsilon_m^2$ ,  $\epsilon_3(\epsilon_m) \propto \epsilon_m^2$ . При  $a \gg 1$  в безграничной среде  $\epsilon_3(\epsilon_m) \propto \epsilon_m$ , а в резонаторе  $\epsilon_3(\epsilon_m) \propto \text{const}$ . Последнее связано с тем, что при  $a \gg 1$  вынуждающая сила для колебаний в резонаторе на частоте третьей гармоники почти пропорциональна  $\cos(3K_p x)$  (имеется малая амплитудно-независимая поправка, пропорциональная  $\gamma_0^{-2}$ ), а собственной функцией резонатора является  $\sin(K_{3p-1}x) = \sin(3K_p x)$ , т. е. для колебаний на частоте третьей гармоники правая часть уравнения (23) почти (с точностью до малой поправки) ортогональна собственной функции этого уравнения. Поэтому

$$\epsilon_3 = \frac{2a_3\Omega_p}{3\pi\gamma_0^2 [(\Omega_p/Q_{3p-1})^2 + 4(\Delta\Omega_{3p-1}/3)^2]^{1/2}} = \text{const}.$$

#### 4. ГИСТЕРЕЗИСНЫЕ ЭФФЕКТЫ В РЕЗОНАТОРЕ ИЗ ОТОЖЖЁННОЙ МЕДИ

Далее приведены результаты экспериментальных исследований нелинейных акустических эффектов амплитудно-зависимого внутреннего трения в резонаторе из отождённой поликристаллической меди, в которой наблюдалось насыщение гистерезисных потерь [7, 19]. Эксперимент

проводился со стержневым резонатором с жёсткой ( $x = 0$ ) и мягкой ( $x = L$ ) границами. Длина стержня  $L$  составляла 30 см, его диаметр 9 мм. Температура отжига стержня  $800^\circ\text{C}$ , время отжига около 4 часов. Резонансные частоты  $F_p = \Omega_p/(2\pi)$  и добротности  $Q_p$  первой и второй продольных мод резонатора составляли  $F_1 \approx 3210$  Гц,  $Q_1 \approx 210$  и  $F_2 \approx 9435$  Гц,  $Q_2 \approx 165$  соответственно. Резонансная частота  $F_1 \approx 3210$  Гц соответствует тому, что скорость  $C_0$  низкочастотной продольной волны в стержне равна  $3,8 \cdot 10^5$  см/с. Измерения нелинейных эффектов проводились при возбуждении резонатора на его первой моде ( $p = 1$ ).

На рис. 7 приведена зависимость амплитуды деформации  $\epsilon_m$  стержня (в резонансе) от амплитуды  $u_0$  электрического напряжения на пьезокерамическом излучателе ( $u_0$  в дБ относительно 1 мкВ,  $u_0 \propto A_0$ ). Из рис. 7 следует, что при малых деформациях ( $\epsilon_m \leq 2 \cdot 10^{-7}$ ) имеет место линейная зависимость  $\epsilon_m$  от  $u_0$  (т. е.  $\epsilon_m \propto u_0 \propto A_0$ ), затем, при  $2 \cdot 10^{-7} \leq \epsilon_m \leq 2 \cdot 10^{-6}$ , зависимость  $\epsilon_m = \epsilon_m(u_0)$  становится нелинейной, а при  $\epsilon_m \geq 2 \cdot 10^{-6}$  опять наблюдается линейная зависимость  $\epsilon_m \propto u_0 \propto A_0$ . Такая зависимость от  $u_0$  свидетельствует о наличии нелинейных потерь в резонаторе и их насыщении.

Из выражения (29) и экспериментальной зависимости  $\epsilon_m = \epsilon_m(A_0)$  (рис. 7) определим соответствующую ей зависимость  $\mu = \mu_{nl}(\epsilon_m)$ . Учитывая, что  $A_0$  изменяется пропорционально амплитуде  $u_0$  электрического напряжения на пьезокерамическом излучателе, из выражения (29) получаем формулу для определения нелинейных потерь

$$\frac{\mu_{nl}(\epsilon_m)}{\mu_p} = \frac{\epsilon_{m,1}}{\epsilon_m} \frac{u_0}{u_{0,1}} - 1, \quad (31)$$

где  $\epsilon_{m,1}$  и  $u_{0,1}$  — начальные экспериментальные значения амплитуды деформации стержня и амплитуды напряжения на излучателе, когда эффекты амплитудно-зависимого внутреннего трения пренебрежимо малы и  $\epsilon_m \propto A_0 \propto u_0$ , а  $\epsilon_m$  и  $u_0$  — текущие значения амплитуды деформации стержня и амплитуды напряжения на излучателе, когда эти эффекты проявляются вполне заметно,  $\epsilon_m > \epsilon_{m,1}$ ,  $u_0 > u_{0,1}$ . Зависимость  $\mu_{nl}(\epsilon_m)/\mu_1$  приведена на рис. 8. На этом же рисунке показаны зависимости  $|F_{nl}(\epsilon_m)|/F_1$  и параметра  $r$  от  $\epsilon_m$ , где  $\Delta F_{nl}(\epsilon_m) = \delta_{nl}(\epsilon_m)/(2\pi)$ . Из рис. 8 видно, что сначала (при  $\epsilon_m \leq 4 \cdot 10^{-6}$ )  $\mu_{nl}(\epsilon_m) \propto \epsilon_m$ ,  $\Delta F_{nl}(\epsilon_m) \propto \epsilon_m$ , а затем (при  $\epsilon_m > 4 \cdot 10^{-6}$ )  $\mu_{nl}(\epsilon_m)$  и  $\Delta F_{nl}(\epsilon_m)$  стремятся к насыщению. Это соответствует теоретическим зависимостям (25), однако при  $\epsilon_m > 3 \cdot 10^{-6}$  параметр  $r \neq \text{const}$ , что не согласуется с выражением (30). По-видимому, это свидетельствует о том, что уравнение состояния отожжённой меди не описывается неупругим гистерезисом (2).

При достаточно большой амплитуде  $\epsilon_m > 3 \cdot 10^{-7}$  в резонаторе наблюдалась генерация третьей гармоники (уровень второй гармоники, из-за её «нерезонантности», был мал и недостаточен для надёжного измерения). На рис. 8 приведена также зависимость амплитуды третьей гармоники  $\epsilon_3$  от резонансной амплитуды  $\epsilon_m$ . Из рис. 8 видно, что зависимость  $\epsilon_3$  от  $\epsilon_m$  немонотонна, при этом можно выделить три характерных диапазона по амплитуде  $\epsilon_m$ . В этих диапазонах имеют место следующие зависимости: в первом диапазоне  $3 \cdot 10^{-7} \leq \epsilon_m \leq 4 \cdot 10^{-6}$  имеем  $\epsilon_3 \propto \epsilon_m^2$ , во втором  $4 \cdot 10^{-6} \leq \epsilon_m \leq 8 \cdot 10^{-6}$  имеем  $\epsilon_3 \approx \text{const}$  и в третьем  $8 \cdot 10^{-6} \leq \epsilon_m \leq 10^{-5}$  амплитуда  $\epsilon_3$  сильно уменьшается. Такое поведение амплитуды  $\epsilon_3$  качественно соответствует зависимости (27).

Из сравнения теоретических и экспериментальных результатов можно определить значения параметров нелинейности гистерезиса (2). По нелинейным сдвигу резонансной частоты и потерям в мало-амплитудном режиме (до насыщения) находим:  $a_1 \approx 3 \cdot 10^3$ ,  $b_1 \approx 2,4 \cdot 10^3$ ,  $b \approx 7,1 \cdot 10^3$ ,  $\beta_1 + \beta_2 \approx 1,3 \cdot 10^4$ , при этом  $r \approx 0,8$ . Значение коэффициента  $\beta_1 + \beta_2$  можно независимо определить по амплитуде третьей гармоники из выражения (28), при этом он оказывается равным  $\beta_1 + \beta_2 \approx 8,7 \cdot 10^4$ , что в 6,7 раз больше значения  $\beta_1 + \beta_2 \approx 1,3 \cdot 10^4$ , определённого по нелинейным потерям. Такое несоответствие также свидетельствует о том, что уравнение состояния отожжённой

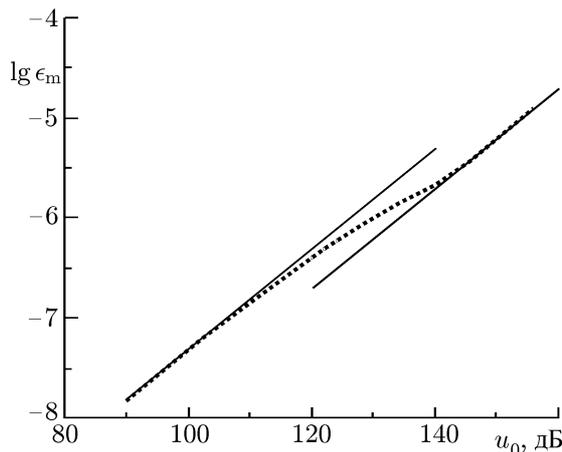


Рис. 7. Зависимость амплитуды  $\epsilon_m$  (в резонансе) от амплитуды электрического напряжения  $u_0$  на излучателе (относительно 1 мкВ). Прямые линии соответствуют зависимостям  $\epsilon_m \propto u_0$

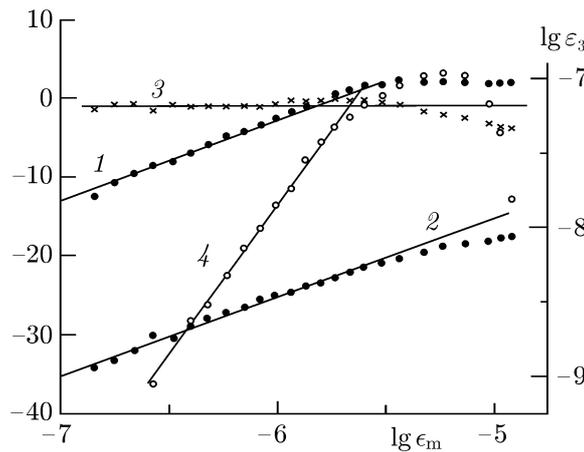


Рис. 8. Зависимости  $\lg[\mu_{nl}(\epsilon_m)/\mu_1]$  (кривая 1),  $\lg[\Delta F_{nl}(\epsilon_m)/F_1]$  (2),  $\lg r$  (3) и  $\epsilon_3$  (кривая 4, ось справа) от  $\epsilon_m$ . Прямые линии соответствуют зависимостям  $\mu_{nl}(\epsilon_m) \propto \epsilon_m$  (1),  $\Delta F_{nl}(\epsilon_m) \propto \epsilon_m$  (2),  $r = 0,8$  (3),  $\epsilon_3 \propto \epsilon_m^2$  (4)

ной меди не описывается неупругим гистерезисом (2) (результаты эксперимента с отождѐнной медью получили непротиворечивое объяснение в рамках упругого гистерезиса в работе [20]). Отмеченные несоответствия, однако, не означают, что уравнение состояния (2) не соответствует и другим гистерезисным средам, многие из которых могут описываться и неупругим гистерезисом. Если же не принимать во внимание параметр  $r$  и третью гармонику, то эффекты амплитудно-зависимого внутреннего трения и генерацию второй гармоники можно описывать как упругим, так и неупругим гистерезисами.

Определим теперь параметр  $\gamma_0$ , отвечающий за насыщение нелинейных потерь. Из выражения (29) следует, что в режиме с малой амплитудой ( $\epsilon_{m,1}$ ) и в режиме насыщения ( $\epsilon_{m,2}$ ) имеем следующие линейные зависимости  $\epsilon_m$  от  $A_0$ :

$$\epsilon_{m,1} = 2A_0Q_p/L, \quad \epsilon_{m,2} = \frac{2A_0Q_p/L}{1 + 3\pi b_1Q_p/(8\gamma_0)}. \tag{32}$$

Из этих выражений находим

$$\frac{b_1Q_p}{\gamma_0} = \frac{8}{3\pi} \left( \frac{\epsilon_{m,1}}{\epsilon_{m,2}} - 1 \right).$$

Из рис. 7 видно, что  $\epsilon_{m,1}/\epsilon_{m,2} = 2,75$  и, следовательно,

$$\gamma_0 = \frac{2(\beta_1 + \beta_2)Q_1}{3\pi(\epsilon_{m,1}/\epsilon_{m,2} - 1)} \approx 3,3 \cdot 10^5.$$

### 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведены теоретические исследования нелинейных эффектов, возникающих при возбуждении продольной гармонической акустической волны в безграничной среде и в стержневом резонаторе с неупругим гистерезисом с насыщением амплитудно-зависимых потерь. Определены характеристики нелинейных волн в таких системах: нелинейные декремент затухания, изменение скорости распространения волны и амплитуды высших гармоник первичной волны. Амплитудные зависимости этих эффектов свидетельствуют о сложной и разнообразной динамике

нелинейных волновых процессов в средах и резонаторах с гистерезисной нелинейностью. Показано, что среды с неупругим гистерезисом (2) не обладают нелинейной дисперсией (в отличие от сред с упругим гистерезисом [18, 19]).

Проведено сравнение результатов экспериментальных и теоретических исследований гистерезисных эффектов в резонаторе из отожжённой поликристаллической меди, и определены эффективные параметры гистерезисной нелинейности отожжённой меди. Их значения оказались достаточно высокими, что позволяет надеяться на возможность наблюдения нелинейных эффектов в резонаторах и из других гистерезисных материалов даже при не очень больших амплитудах акустических волн. Обнаружено, что при  $\epsilon_m > 10^{-6}$  параметр  $r \neq \text{const}$ , кроме того имеет место сильное (в 6,7 раз) количественное несоответствие эффективного параметра нелинейности, определённого по нелинейным потерям и по амплитуде третьей гармоники. Все это свидетельствует о том, что уравнение состояния отожжённой меди не описывается неупругим гистерезисом (2), при этом результаты эксперимента с отожжённой медью были непротиворечиво объяснены в рамках упругого гистерезиса [19]. Эти несоответствия, однако, не означают, что неупругий гистерезис вообще не пригоден для описания гистерезисных сред; некоторые из них могут описываться и неупругим гистерезисом (2). Если же не принимать во внимание параметр  $r$  и третью гармонику, то эффекты внутреннего трения, зависящего от амплитуды, и генерацию второй гармоники можно описывать как упругим гистерезисом, так и неупругим (с другими эффективными параметрами нелинейности).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 16-32-00546 мол\_а).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Давиденков Н. Н. // Журн. техн. физики. 1938. Т. 8, № 6. С. 483.
2. Read T. A. // Phys. Rev. 1940. V. 58. P. 371.
3. Granato A., Lucke K. // J. Appl. Phys. 1956. V. 27, No. 5. P. 583.
4. Ультразвуковые методы исследования дислокаций / Сб. статей под ред. Л. Г. Меркулова. М.: Изд. иностр. лит., 1963. 376 с.
5. Физическая акустика / Под ред. У. Мезона. Т. 4, Ч. А. Применения физической акустики в квантовой физике и физике твёрдого тела. М.: Мир, 1969. 375 с.
6. Ниблетт Д., Уилкс Дж. // Успехи физ. наук. 1963. Т. 80, № 1. С. 125.
7. Назаров В. Е. // Физика металлов и металловедение. 1991. V. 71, № 3. С. 172.
8. Голяндин С. Н., Кустов С. Б., Сапожников К. В. и др. // Физика твёрдого тела. 1998. Т. 40, № 10. С. 1 839.
9. Сапожников К. В., Голяндин С. Н., Кустов С. Б. // Физика твёрдого тела. 2010. Т. 52, № 1. С. 43.
10. Сапожников К. В., Голяндин С. Н., Кустов С. Б. // Физика твёрдого тела. 2010. Т. 52, № 12. С. 2 341.
11. Назаров В. Е. // Акуст. журн. 2000. Т. 46, № 2. С. 228.
12. Nazarov V. E., Kolpakov A. B. // J. Acoust. Soc. Am. 2000. V. 107, No. 4. P. 1915.
13. Назаров В. Е. // Физика металлов и металловедение. 1999. V. 88, № 4. С. 82.
14. Голяндин С. Н., Сапожников К. В., Кустов С. Б. // Физика твёрдого тела. 2005. Т. 47, № 4. С. 614.
15. Asano S. // J. Phys. Soc. Jap. 1970. V. 29, No. 4. P. 952.
16. Лебедев А. Б. // Физика твёрдого тела. 1999. Т. 41, № 7. С. 1 214.

17. Назаров В. Е., Радостин А. В., Островский Л. А., Соустова И. А. // Акуст. журн. 2003. Т. 49, № 3. С. 405.
18. Назаров В. Е., Кияшко С. Б. // Изв. вузов. Радиофизика. 2013. Т. 56, № 10. С. 762.
19. Назаров В. Е., Кияшко С. Б. // Журн. техн. физики. 2014. Т. 84, № 10, С. 100.
20. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. М.: Наука, 1965. 204 с.
21. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твёрдого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.

Поступила в редакцию 13 января 2015 г.; принята в печать 27 мая 2015 г.

## THE WAVE PROCESSES IN THE MEDIA WITH INELASTIC HYSTERESIS AND SATURATION OF NONLINEAR LOSS

*V. E. Nazarov and S. B. Kiyashko*

The nonlinear wave processes during excitation of a longitudinal harmonic wave in an unbounded medium and the rod resonator with inelastic hysteresis and saturation of the amplitude-dependent loss are theoretically studied. The nonlinear-wave characteristics in such systems, i.e., the amplitude-dependent loss, the wave-propagation velocity variation, the resonance-frequency shift, and the higher-harmonic amplitudes are determined. The results of the theoretical and experimental studies of nonlinear effects in the rod resonator of annealed polycrystalline copper are compared. The effective parameters of the hysteretic nonlinearity of this metal are evaluated.