

УДК 534.1+537.86+621.396

ДИНАМИКА МАЛЫХ АНСАМБЛЕЙ СИСТЕМ ФАЗОВОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ С ОДНОНАПРАВЛЕННЫМИ СВЯЗЯМИ

К. Н. Алешин, В. В. Матросов, В. Д. Шалфеев*

Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия

Изучается коллективная динамика малоразмерной цепочки однонаправленно связанных систем фазовой автоподстройки частоты. Найдены условия существования синхронных режимов, исследованы асинхронные автоколебательные режимы и переходы между ними, установлено свойство наследования структуры пространства параметров цепочки при добавлении в неё нового элемента.

ВВЕДЕНИЕ

Математические модели ансамбля связанных систем фазовой синхронизации представляют существенный интерес при изучении динамики различных многоэлементных осцилляторных систем, таких как фазированные антенные решётки, каскады эталонов частоты, сети связи, энергосети [1, 2] и др. В последнее время интерес к этой тематике заметно возрос в связи с появлением новых задач когерентного сложения мощностей [3–5], исследования нейронных сетей [6], ансамблей фазовых осцилляторов Курамото [7], моделей социоэкономической динамики [8]. Активный интерес исследователей к анализу ансамблей систем фазовой синхронизации вызван, с одной стороны, сравнительно простой динамикой индивидуального элемента ансамбля, а с другой — возможностью объединения таких элементов в сети с различной конфигурацией для изучения особенностей их коллективной динамики (возникновение сложной, в том числе хаотической, динамики, образование и законы эволюции структур и т. д.).

Исследованию коллективной динамики связанных фазовых систем (т. е. систем фазовой синхронизации) посвящён ряд работ [1–3, 7, 8]. В основном эти исследования касаются существования устойчивых режимов синхронизации в элементах цепочечных и решёточных ансамблей, а также условий возникновения и развития регулярных и хаотических асинхронных режимов при нарушении синхронизации. Следует отметить, что в этих работах, в силу существенных трудностей исследования многомерных нелинейных моделей осцилляторных ансамблей с произвольной конфигурацией, изучаются упрощённые модели, предполагающие цепочечную и решёточную конфигурации ансамбля и, как правило, однородность элементов ансамбля. Переходя к моделям малых ансамблей осцилляторов, т. е. к ансамблям с малым числом элементов, задачу можно упростить ещё больше. Такие модели представляют интерес как сами по себе, так и как предельный случай больших ансамблей. Исследования малых ансамблей методами нелинейной динамики в сочетании с компьютерным моделированием позволяют получить достаточно полное описание коллективной динамики таких ансамблей. Анализ имеющихся публикаций показывает, что, несмотря на привлекательность моделей малых ансамблей для исследования, динамика таких систем изучена сравнительно слабо. В этой связи в данной работе исследуется динамика малого ансамбля связанных систем фазовой синхронизации.

Целью настоящей работы являются изучение синхронных и асинхронных автоколебательных режимов в элементах малоразмерной цепочки однонаправленно связанных систем фазовой синхронизации и выделение областей пространства параметров, отвечающих качественно различным

* kirill_al@bk.ru

динамическим режимам. Исследование проводится методами нелинейной динамики [9–11] в сочетании с компьютерным моделированием с использованием программного комплекса [12].

1. БАЗОВАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

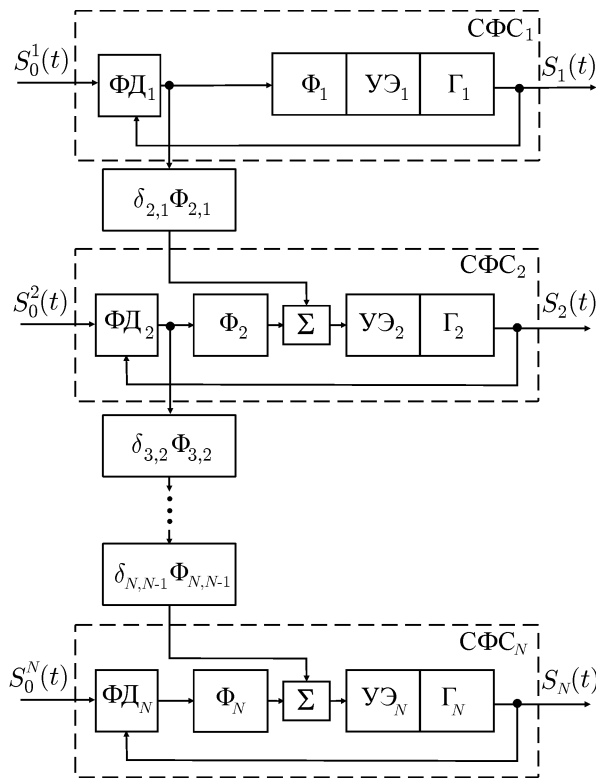


Рис. 1. Параллельное соединение систем фазовой синхронизации

передачи фильтров Φ_n и $\Phi_{n,n-1}$ в операторной форме соответственно, $F_n(\varphi)$ — нормированная характеристика фазового дискриминатора Φ_{Dn} , $\gamma_n = \Omega_j^n / \Omega_n$, Ω_j^n — начальная частотная расстройка колебаний системы СФС_n , $\delta_{n,n-1}$ — параметр дополнительной связи по цепям управления между системами СФС_n и СФС_{n-1} . Заметим, что положительные значения параметра δ соответствуют кооперативным связям элементов цепочки, а отрицательные — антагонистическим.

Для упрощения анализа будем считать цепочку однородной, т. е. что для любого n выполняются условия $\theta_0^n(t) = \theta_0(t)$, $\delta_{n,n-1} = \delta$, $F_n(\varphi) = F(\varphi)$, $K_{n,n-1}(p) = K_n(p) = K(p)$, $\gamma = \gamma_n$, $\Omega_n = \Omega$. Тогда система (1) принимает вид [2]

$$\frac{p\varphi_n}{\Omega} + K(p)F(\varphi_n) = \gamma - \delta K(p)F_{n-1}(\varphi_{n-1}), \quad n = 1, \dots, N. \quad (2)$$

Рассмотрим наиболее простую ситуацию, когда фильтры в цепях управления и каналах связи являются идеальными, т. е. $K(p) = 1$. Для определённости пусть $F(\varphi) = \sin \varphi$. Переходя в уравнении (2) к безразмерному времени $\tau = \Omega t$, имеем

$$\frac{d\varphi_1}{d\tau} = \gamma - \sin \varphi_1, \quad \frac{d\varphi_n}{d\tau} = \gamma - \sin \varphi_n - \delta \sin \varphi_{n-1}, \quad (3)$$

Рассмотрим многоканальную систему, содержащую цепочку парциальных систем фазовой синхронизации (СФС), соединённых параллельно (см. рис. 1) так, что для управления генератором Γ_n в n -й парциальной системе СФС_n используется не только сигнал с выхода дискриминатора Φ_{Dn} , но и сигнал с выхода дискриминатора Φ_{Dn-1} , т. е. связи парциальных систем являются независимыми и однонаправленными, и цепочка обладает свойствами цепочки потокового типа [2, 11, 13, 14].

Математической моделью такой потоковой цепочки систем фазовой синхронизации является система операторных уравнений

$$\frac{p\varphi_n}{\Omega_n} + K_n(p)F_n(\varphi_n) + \delta_{n,n-1}K_{n,n-1}(p) \times \\ \times F_{n-1}(\varphi_{n-1}) = \gamma_n, \quad n = 1, \dots, N. \quad (1)$$

Здесь $p \equiv d/dt$ — оператор дифференцирования, $\varphi_n(t) = \theta_n(t) - \theta_0^n(t)$ — текущее фазовое рассогласование между сигналом $S_n(t)$ управляемого генератора Γ_n и опорным сигналом $S_0^n(t)$, Ω_n — максимальная расстройка по частоте, которую может компенсировать цепь управления системы СФС_n , $K_n(p)$ и $K_{n,n-1}(p)$ — коэффициенты

где $n = 2, \dots, N$. Система (3) инвариантна относительно замены $(\gamma, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) \Leftrightarrow (-\gamma, -\varphi_1, -\varphi_2, \dots, -\varphi_n)$, поэтому её динамику достаточно рассмотреть при $\gamma \geq 0$.

2. ДИНАМИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ

В теории колебаний конечной целью исследования любой динамической системы является разбиение пространства её параметров на области, соответствующие различным режимам [9]. Для ансамблей, состоящих из большого числа элементов, построение полного такого разбиения сводится к изучению фазовых траекторий в многомерном фазовом пространстве и является практически неразрешимой задачей в силу большого разнообразия этих траекторий. Рассмотрение цепочки с позиций поведения парциальных систем фазовой синхронизации позволяет сформировать качественное представление о её поведении.

Парциальный элемент рассматриваемой цепочки может функционировать в нескольких режимах [8, 15, 16]. Режим синхронизма генератора Γ опорным сигналом, при котором частоты опорного и подстраиваемого генераторов равны, а медленные изменения параметров, определяющих эти частоты, практически полностью компенсируются действием системы автоподстройки. Режим квазисинхронизма, при котором частоты опорного и подстраиваемого генераторов равны в среднем. В этом режиме на выходе системы фазовой синхронизации имеют место колебания с угловой модуляцией, средняя частота которых стабилизирована частотой опорного сигнала. Режим биений реализуется, если среднее значение разности частот не равно нулю, а разность фаз подстраиваемого и опорного сигналов неограниченно нарастает. В этом режиме на выходе системы фазовой синхронизации имеют место колебания с угловой модуляцией, но в этом режиме средняя частота модулированных колебаний не совпадает с частотой опорного сигнала. В фазовом пространстве парциальной системы синхронному режиму соответствует точка, квазисинхронному режиму и режиму биений — траектории, ограниченные и неограниченные по переменной φ соответственно.

Рассматривая ансамбль как совокупность элементов с индивидуальной динамикой, можно выделить [2] режим глобальной синхронизации, когда все парциальные системы находятся в синхронном режиме, и режим частичной синхронизации, когда в синхронном режиме находится лишь часть генераторов. При этом режим частичной синхронизации может быть разделён на режимы с более тонкой структурой в зависимости от числа генераторов в синхронном режиме. Поскольку при частичной синхронизации элементы ансамбля находятся как в синхронном, так и в асинхронном режимах, то эти режимы могут быть рассмотрены с позиции асинхронных режимов [17], т. е. характеризоваться количеством элементов цепочки, функционирующих, например, в квазисинхронном режиме (режим частичной квазисинхронизации). При отсутствии генераторов, функционирующих в синхронном режиме, на первый план выходит анализ числа и распределения по пространству генераторов, функционирующих в квазисинхронном режиме. При этом представляет интерес разделение колебаний на регулярные и хаотические, а также трансформация колебаний при движении по пространству от одного элемента цепочки к другому.

3. РЕЖИМЫ СИНХРОНИЗАЦИИ

Исследование режимов глобальной синхронизации сводится к поиску устойчивых состояний равновесия модели (3) и выделению областей их существования в пространстве параметров.

На рис. 2 изображены области C_S^N существования состояний равновесия модели (3) для $N = 2, \dots, 8$. При значениях параметров, находящихся внутри выделенных областей, соответствующая цепочка глобально устойчива, т.е. все генераторы цепочки функционируют в синхронном

режиме. Области существования режимов глобальной синхронизации уменьшаются с ростом N , при $N \rightarrow \infty$ область C_S^N вырождается в область $C_S^\infty = \{\gamma - 1 < \delta < 1, \gamma < 1\}$. При $\gamma > 1$ синхронные режимы отсутствуют. Границы области C_S^N являются гладкими для нечётных $N > 2$, а также для чётных N в области $\delta < 0$ (связи антагонистические). Границы C_S^N в области $\delta > 0$ (связи кооперативные) для чётных N имеют изломы в точках $a(\delta^*, \gamma^* = 1 - \delta^*)$, где δ^* — решение уравнения $\delta^N + \delta^{N-1} + 2(-\delta)^{N-2} - 2 = 0, N = 4, 6, 8, \dots$. Границы областей C_S^{N-1} и C_S^N справа от точек A совпадают.

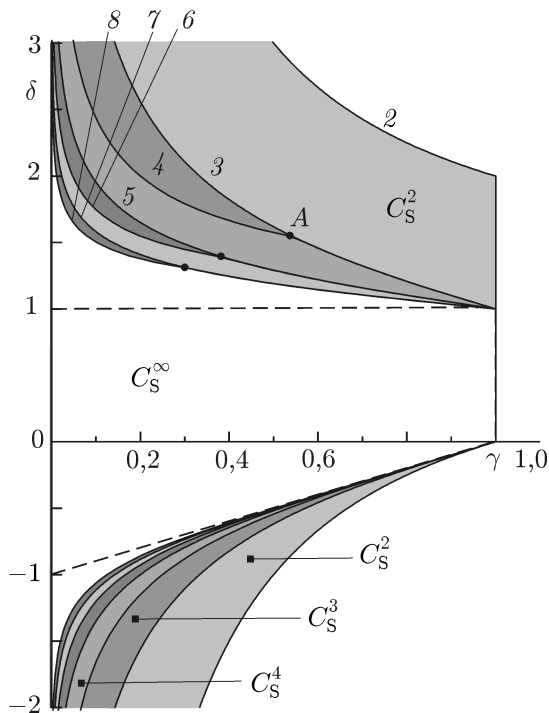


Рис. 2. Области C_S^N существования режимов глобальной синхронизации модели (3) для $N = 2, 3, \dots, 8$ (цифрами отмечены границы соответствующих областей C_S^N в случае кооперативных связей)

строек асинхронных режимов. Рассмотрим эти картины на примере ансамблей из двух и трёх элементов.

4. АСИНХРОННЫЕ РЕЖИМЫ

4.1. Ансамбль из двух элементов

Рассмотрим однородную цепочку, состоящую из двух элементов. Динамические процессы в такой цепочке описываются двумя первыми уравнениями модели (3):

$$\frac{d\varphi_1}{d\tau} = \gamma - \sin \varphi_1, \quad \frac{d\varphi_2}{d\tau} = \gamma - \sin \varphi_2 - \delta \sin \varphi_1. \quad (4)$$

Система (4) в силу периодичности её правых частей по переменным φ_1 и φ_2 является нелинейной динамической системой на тороидальной фазовой поверхности $T_2 = \{\varphi_1(\bmod 2\pi), \varphi_2(\bmod 2\pi)\}$.

Рисунок 2 даёт представление о структуре областей существования режимов частичной квазисинхронизации. В модели (3) при $\gamma < 1$ первый элемент цепочки всегда находится в синхронном режиме, состояние других элементов зависит от значений параметров γ и δ . Для фиксированных значений γ и δ значение n^* , определяющее число элементов цепочки, находящихся в синхронизме, можно определить из условия $|\gamma [1 - (-\delta)^{N-1}] (1 + \delta)^{-1}| \leq 1$. Значение n^* равно максимальному значению N для которого справедливо данное неравенство.

Таким образом, в цепочке существует режим частичной синхронизации: элементы цепочки с номерами $n \leq n^*$ функционируют в режиме синхронизма, элементы с номерами $n > n^*$ — в асинхронном режиме. Отметим, что при усилении антагонистической связи элементы цепочки «выпадают» из режима синхронизации всегда по отдельности, а при усилении кооперативной связи — сначала парами, далее по отдельности. Нарушение режима синхронизма сопровождается возникновением либо квазисинхронного режима, либо режима биений. Далее при вариациях параметров эти режимы эволюционируют, образуя достаточно сложную, но стройную картину перестроения режимов.

Качественную структуру разбиения фазового пространства на траектории определяют особые траектории: состояния равновесия, сепаратрисы седел и предельные циклы [9]. В отличие от плоскости, на тороидальной фазовой поверхности, кроме циклов, охватывающих состояния равновесия (т. е. циклов 1-го рода, или колебательных циклов), могут существовать предельные циклы 2-го рода (вращательные циклы), не охватывающие состояния равновесия, а охватывающие тор в направлении параллели и (или) меридиана. Кроме того, на торе могут существовать устойчивые по Пуассону незамкнутые траектории. Характер поведения траекторий на тороидальной фазовой поверхности определяется числом вращения [18]. В зависимости от рациональности или иррациональности числа вращения интегральные кривые будут или замкнутыми, или незамкнутыми соответственно.

Первое уравнение системы (4) интегрируется независимо от второго. Свойства решения этого уравнения определяются значением параметра γ :

- 1) при $\gamma \leq 1$ решение сходится к стационарному состоянию $\varphi_1^* = \arcsin \gamma$;
- 2) при $\gamma > 1$ решение [19]

$$\varphi_1(\tau) = 2 \operatorname{arctg} \left[\frac{\gamma - 1}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{2} (\tau + \tau_0) \right] \quad (5)$$

постоянно возрастает на классе эквивалентности $[-\pi, \pi]$ с отождествлёнными целочисленными сдвигами по всей действительной оси [20] при любом τ_0 при непрерывном увеличении τ . Поскольку решения первого уравнения системы (4) не могут быть колебательными, то циклы первого рода в фазовом пространстве такой модели отсутствуют.

На рис. 3 приведено разбиение плоскости параметров $\{\gamma, \delta\}$ модели (4) на области с различным динамическим поведением. Серым цветом отмечен фрагмент области C_S^2 существования синхронного режима, а также наиболее крупные фрагменты областей существования устойчивых предельных циклов $L_{1,0}$ (см. рис. 4а), $L_{1,-1}$ (см. рис. 4б), $L_{1,-2}$, $L_{1,-3}$, $L_{1,-4}$, $L_{0,-1}$, $L_{1,2}$, $L_{1,3}$, $L_{1,4}$ (см. рис. 4жс), $L_{1,5}$, $L_{1,6}$ (см. рис. 4з), $L_{0,1}$. Обозначения для выделенных областей $[i, j]$ совпадают с рациональным числом вращения $\nu = i/j$ аттрактора $L_{i,j}$, где числа i и j характеризуют число 2π -оборотов траекторий вокруг тора T_2 вдоль координат φ_1 и φ_2 соответственно. Знак минус перед i (j) означает, что координата φ_1 (φ_2) убывает с ростом τ . Циклы $L_{0,1}$ и $L_{0,-1}$ (см. рис. 4е) соответствуют режиму частичной синхронизации, они представляют собой прямые, параллельные оси ординат. Равенство $j = 0$ соответствует тому, что переменная φ_2 на циклах $L_{1,0}$ и $L_{-1,0}$ ограничена (см. рис. 4а). Эти циклы отвечают режиму частичной квазисинхронизации. При $\gamma > 1$ области существования предельных циклов ограничены бифуркационными кривыми двукратного предельного цикла (один из мультипликаторов предельного цикла обращается в +1). В модели (4) области существования предельных циклов перемежаются с областями существования аттракторов с иррациональным числом вращения (см. рис. 4б, з). При этом в случае $\gamma > 1$ периодические решения модели (4) по переменной φ_1 имеют индекс $i = 1$, а индекс j , характеризующий число набегов на 2π по переменной φ_2 , растёт при уменьшении параметра γ по абсолютному значению. Отметим, что с уменьшением γ как области существования предельных циклов, так и области существования квазипериодических решений уменьшаются в размерах, а их количество увеличивается вблизи прямой $\gamma = 1$. Пространство, включающее области квазипериодических решений и периодических решений с индексом $j < -4$ при $\delta > 2$ и $j > 6$ при $\delta < 2$, на рис. 3 отмечено штриховкой.

На рис. 5 представлена однопараметрическая диаграмма отображения Пуанкаре, иллюстрирующая эволюцию решений модели (4) при фиксированных значениях δ с уменьшением γ . Поскольку переменная φ_1 постоянно нарастает, на диаграмме представлена эволюция вспомогательной

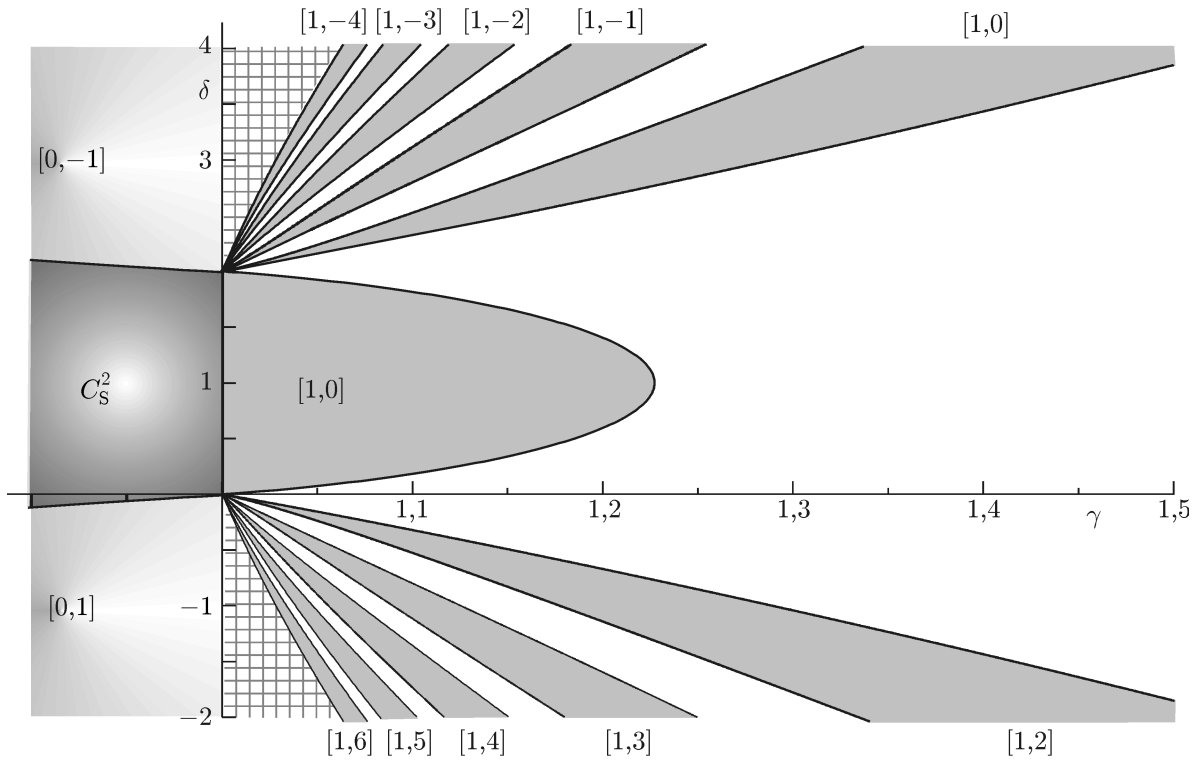


Рис. 3. Структура плоскости параметров $\{\gamma, \delta\}$ модели (4) (модели (3) при $N = 2$)

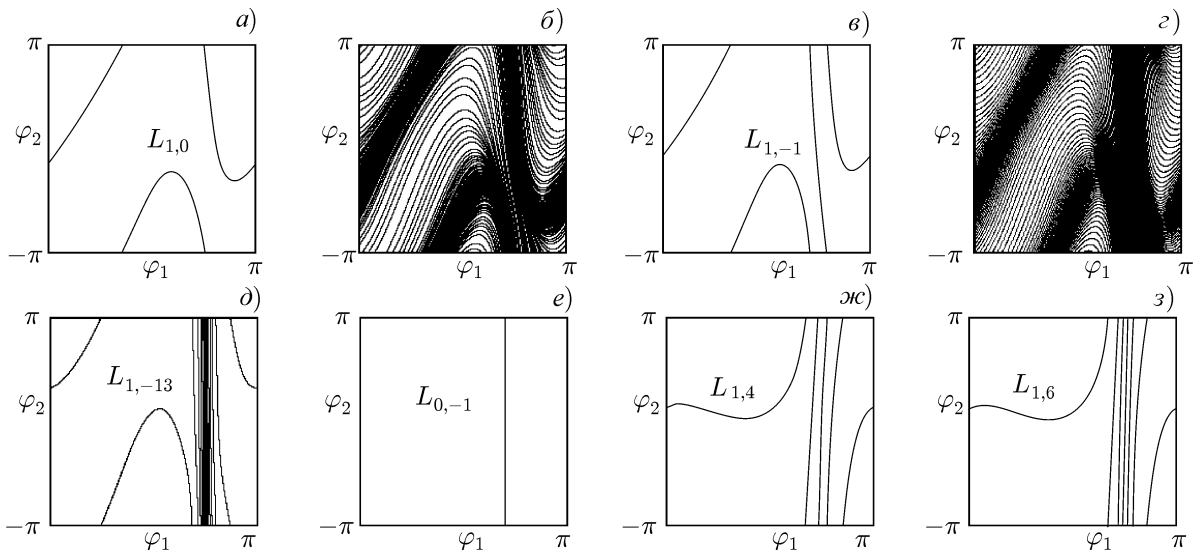


Рис. 4. Аттракторы модели (4) при $\delta=3,5$ (а-е): $\gamma=1,3$ (а); $\gamma=1,24$ (б); $\gamma=1,16$ (в); $\gamma=1,08$ (г); $\gamma=1,01$ (д); $\gamma=0,95$ (е); $\delta = -1,5$ (ж, з): $\gamma=1,10$ (ж); $\gamma=1,05$ (з)

величины $\bar{\varphi}_1 = \varphi_1 \pmod{2\pi}$, линия над диаграммой означает, что переменная φ_1 нарастает. Наличие в областях регулярных движений дополнительных линий l^+ и l^- обусловлено «сложной» формой предельных циклов. Для фазовой траектории цикла сложной формы число пересечений с секущей Пуанкаре превышает кратность цикла. Дополнительные пересечения при этом не влияют на кратность цикла, т. к. пересечение с секущей в одну сторону (линия l^+) компенсируется пересечением с секущей в обратную сторону (линия l^-).

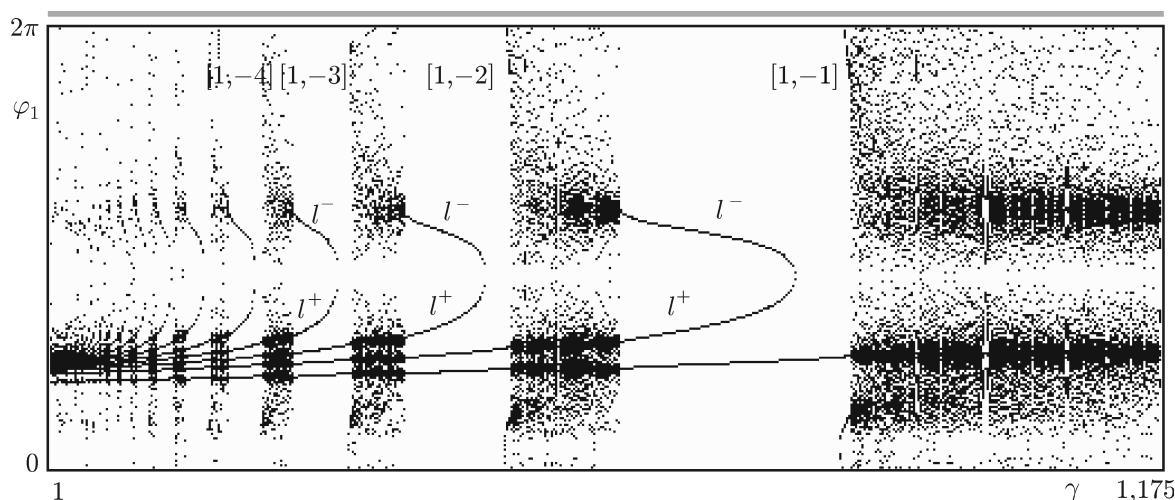


Рис. 5. Диаграмма отображения Пуанкаре модели модели (4) при $\delta=3$. Секущая $\varphi_2=0$

4.2 Ансамбль из трёх элементов

При увеличении числа элементов в цепочке однонаправленно связанных систем фазовой синхронизации структура пространства параметров модели (3) усложняется, при этом модель с размерностью N наследует структуру пространства параметров модели с размерностью $(N-1)$. Установлено, что сценарии трансформации областей существования различных регулярных движений аналогичны и при увеличении N повторяются. Изменения, обусловленные ростом размерности N , мы рассмотрим на примере перехода от модели (4) к модели (3) при $N=3$.

Модель (3) в случае $N=3$ имеет вид

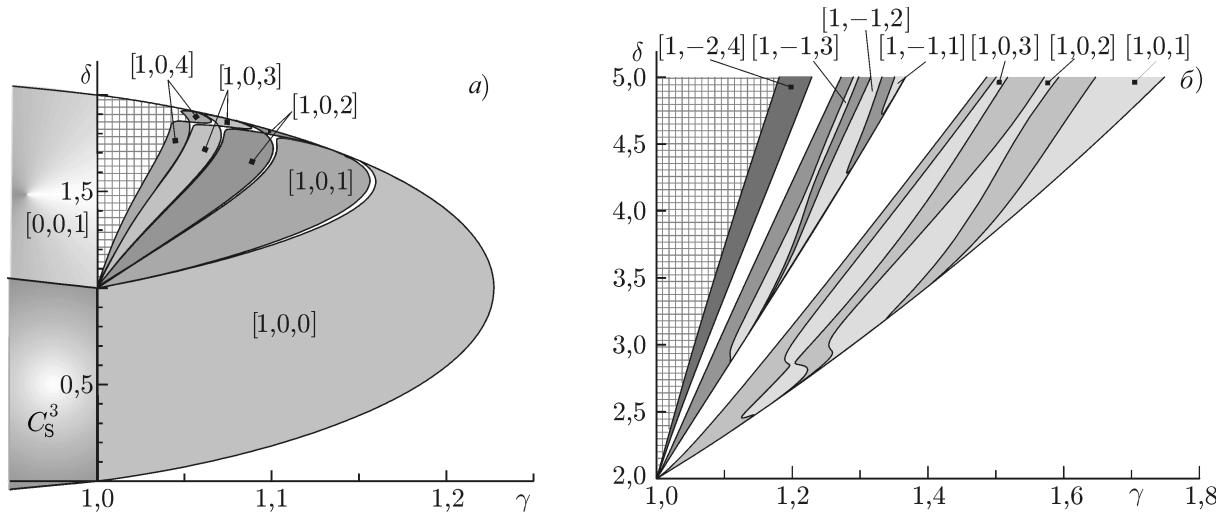
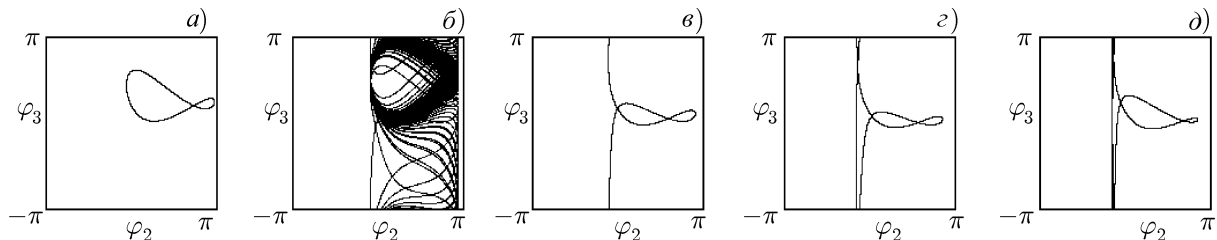
$$\frac{d\varphi_1}{d\tau} = \gamma - \sin \varphi_1, \quad \frac{d\varphi_2}{d\tau} = \gamma - \sin \varphi_2 - \delta \sin \varphi_1, \quad \frac{d\varphi_3}{d\tau} = \gamma - \sin \varphi_3 - \delta \sin \varphi_2. \quad (6)$$

Модель (6) определена на трёхмерном фазовом торе $T_3 = \{\varphi_1(\bmod 2\pi), \varphi_2(\bmod 2\pi), \varphi_3(\bmod 2\pi)\}$. Периодические движения на торе T_3 будем характеризовать числом вращения $[i, j, k]$, где значения i, j и k дают число оборотов вокруг тора T_3 , совершаемых изображающей точкой, лежащей на предельном цикле, до замыкания траектории по координатам φ_1, φ_2 и φ_3 соответственно [17, 21]. В силу однонаправленности связей значения i, j наследуются от движений системы (4) и остаются неизменными при вариациях параметров модели (6). Решения (6) будут представлять собой замкнутые кривые, если отношения $\nu_1 = i/j$ и $\nu_2 = j/k$ — рациональные числа. Отсюда следует, что периодические движения модели (6) могут существовать только при значениях параметров из областей существования периодических и синхронных режимов модели (4).

На рис. 6а приведена часть плоскости $\{\gamma, \delta\}$ модели (6) в интервале $0 < \delta < 2$, которая в модели (4) захватывает часть области C_S^2 синхронных режимов и область периодических режимов типа $[1, 0]$ (см. рис. 3). Рассмотрим трансформацию этих областей при переходе от модели (4) к модели (6).

В модели (6) область C_S^2 содержит две области: область режимов глобальной C_S^3 и частичной синхронизации типа $[0, 0, 1]$. Проекция периодического движения типа $[0, 0, 1]$ на плоскость (φ_1, φ_2) представляет собой точку, а на плоскости (φ_2, φ_3) и (φ_1, φ_3) — прямые, параллельные оси φ_3 . Точка характеризует синхронные режимы первого и второго генераторов, прямые — режим биений третьего генератора.

Область периодических режимов модели (4) типа $[1, 0]$ превращается в слоистую структуру,

Рис. 6. Фрагменты плоскости параметров $\{\gamma, \delta\}$ модели (6)Рис. 7. Проекция аттракторов модели (4) на плоскость (φ_2, φ_3) при $\delta=1,5, \gamma=1,170$ (а); $\gamma=1,157$ (б); $\gamma=1,120$ (в); $\gamma=1,070$ (г); $\gamma=1,040$ (д)

где области существования периодических движений типа $[1, 0, k]$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ перемежаются с областями квазипериодических режимов. На рис. 6а области существования периодических движений типа $[1, 0, 0]$, $[1, 0, 1]$, $[1, 0, 2]$, $[1, 0, 3]$, $[1, 0, 4]$, выделены оттенками серого цвета, области существования квазипериодических движений — белым. Области существования предельных циклов $[1, 0, k]$ и области квазипериодических решений с увеличением k уменьшаются в размере, а их количество увеличивается вблизи $\gamma = 1$. Пространство с тонкой структурой, содержащее области квазипериодических решений и периодических решений с индексом $k > 4$, на рис. 6а заштриховано. Области существования периодических движений ограничены бифуркационными кривыми двукратных предельных циклов, которые собираются в точке $\gamma=1, \delta=1$.

Заметим, что вид проекций аттракторов модели (6) на плоскость (φ_1, φ_2) при вариациях параметров внутри рассматриваемого фрагмента плоскости $\{\gamma, \delta\}$ качественно не меняется и аналогичен рис. 3а. Изменения имеют место в проекциях, содержащих координату φ_3 . Примеры проекций регулярных и квазирегулярных движений модели (6) на плоскость (φ_2, φ_3) приведены на рис. 7.

На рис. 6б показан фрагмент плоскости $\{\gamma, \delta\}$ модели (6) для $\delta > 2$. В модели (4) этот фрагмент представляет собой слоистую структуру, состоящую из областей существования периодических решений типа $[1, j]$, $j = 0, -1, -2, -3, \dots$, разделённых областями квазипериодических движений (см. рис. 3). В модели (6) области квазипериодических движений модели (4) сохраняются, области периодических решений типа $[1, j]$ расслаиваются на области периодических решений типа $[1, j, k]$ и квазипериодических решений. На рис. 6б также представлены примеры расслоения областей существования периодических решений $[1, 0]$ и $[1, -1]$ модели (4) при переходе

к модели (6). У модели (6) в области $[1, 0]$ установлено существование периодических решений с индексами $[1, 0, 1]$, $[1, 0, 2]$ и $[1, 0, 3]$, в области $[1, -1]$ — с индексами $[1, -1, 1]$, $[1, -1, 2]$ и $[1, -1, 3]$. Области существования периодических решений отмечены светлыми тонами, квазипериодических — тёмными, пространство с тонкой структурой заштриховано.

Из представленных результатов следует, что пространство параметров цепочки из трёх элементов наследует структуру пространства параметров системы из двух элементов, при этом области существования квазипериодических движений сохраняются, области существования периодических движений расслаиваются на области регулярных и квазирегулярных движений.

4.3. Особенности динамики элементов цепочки с произвольной длиной

Рассмотрим цепочку с произвольной длиной, функционирующую в режиме частичной синхронизации. В такой цепочке представлены все возможные динамические режимы парциальных элементов. Первые n^* элементов находятся в режиме синхронизма, система СФС_{n^*+1} функционирует в режиме биений, где φ_{n^*+1} изменяется согласно выражению (5). Колебания следующих элементов цепочки могут быть квазипериодическими и периодическими, иметь как простую, так и сложную форму. Характер колебаний зависит от номера n элемента цепочки и параметров модели γ и δ .

Колебания СФС_n описываются уравнением

$$\frac{d\varphi_n}{d\tau} = \gamma - \sin \varphi_n - \delta \sin \varphi_{n-1} \quad (7)$$

и могут быть только регулярными. Хаотическими они могли бы быть только при хаотическом изменении переменной φ_{n-1} , однако структура рассматриваемой цепочки этого не допускает. Для $n < n^*$ переменная φ_{n-1} есть константа. При $n = n^* + 1$ уравнение (7) с учётом выражения (5) преобразуется в неавтономное уравнение первого порядка с регулярной динамикой. Динамика модели (7) в этом случае аналогична динамике модели (4) при $\gamma > 1$. При $n = n^* + 2$ уравнение (7) есть динамическая система первого порядка с внешним регулярным воздействием. В этом случае динамика модели (7) аналогична динамике модели (5) и является регулярной. Дальнейшее продвижение вниз по потоку не меняет регулярности воздействия (переменной φ_{n-1}), поэтому хаотических колебаний в модели (3) быть не может.

Разбиение плоскости параметров $\{\gamma, \delta\}$ модели (3) при увеличении N наследует структуру плоскости параметров цепочек с меньшим числом элементов, при этом положение бифуркационных кривых, определяющих структуру плоскости $\{\gamma, \delta\}$ для размерности N , остаётся неизменным при увеличении размерности до $N + 1$. Данный факт наглядно иллюстрируют параметрические портреты на рис. 3 и 6, а также картины отображения Пуанкаре на рис. 8.

Однопараметрические $\{\gamma, \varphi_i\}$ -диаграммы отображения Пуанкаре (см. рис. 8) порождены фазовыми траекториями модели (3) на секущей $\varphi_1=0$ при $\delta = 4,5$ и увеличении γ . Они отражают перестройки динамических режимов пяти элементов цепочки (начиная со второго) при вариациях начальной частотной расстройки, а также трансформацию колебаний вниз по потоку. Первый элемент цепочки функционирует в режиме биений, в котором переменная φ_1 постоянно нарастает. Динамика второго элемента цепочки для фиксированной силы связи определяется параметром γ . Мы выбрали два диапазона: диапазон $\gamma \in [1,225; 1,310]$, содержащий значения параметров, при которых второй элемент функционирует в режиме биений с убывающей разностью фаз φ_2 , и диапазон $\gamma \in [1,40; 1,65]$, в котором второй элемент функционирует в режиме квазисинхронизма. На краях выбранных диапазонов в системе реализуется режим биений, определяемый квазипериодическим движением, при этом в первом диапазоне разность фаз φ_2 убывает, во втором —

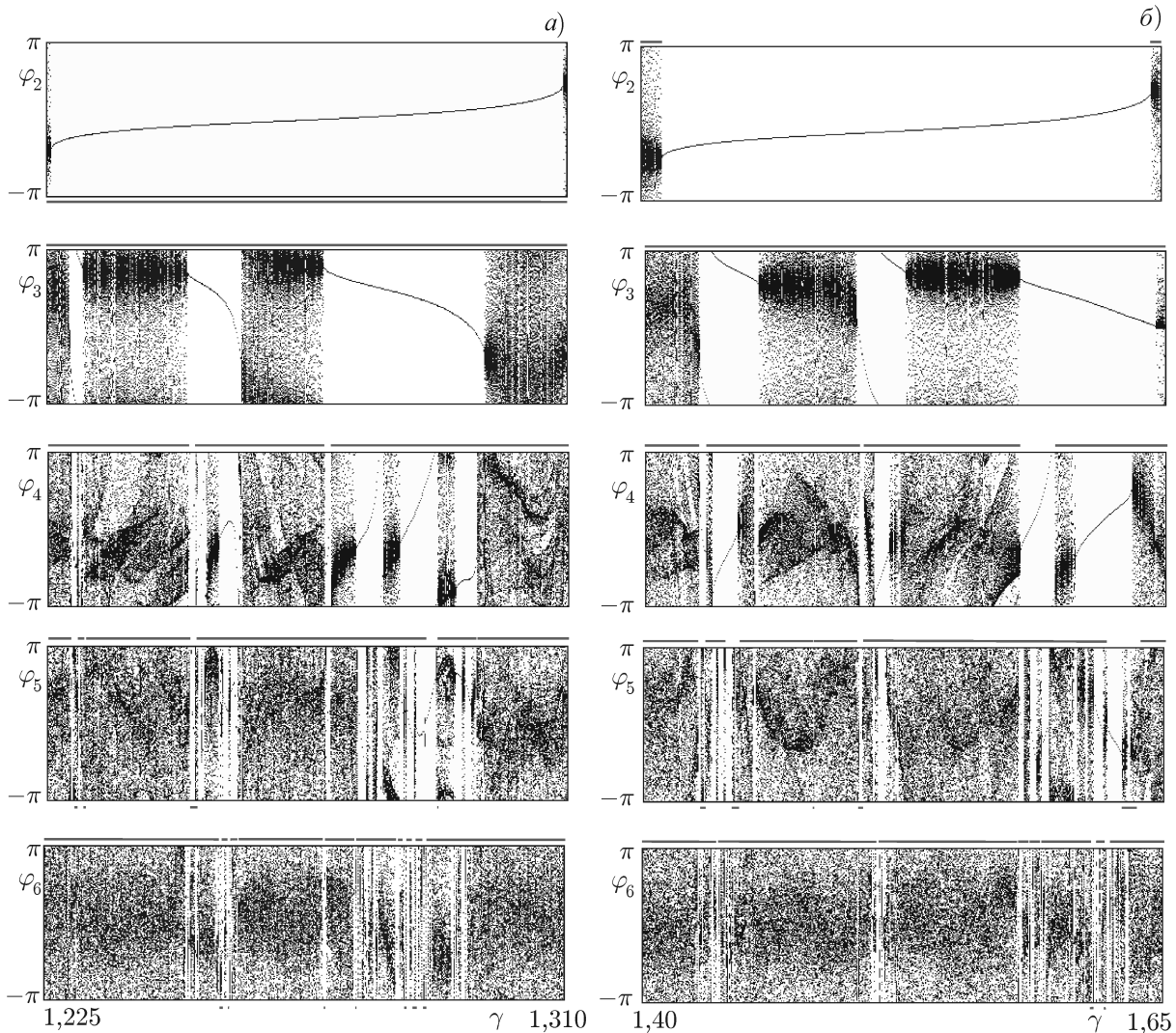


Рис. 8. Однопараметрические $\{\gamma, \varphi_i\}$ -диаграммы отображения Пуанкаре модели (3) при $\delta = 4,5$, $\gamma \in [1,225; 1,310]$ (а) и $\gamma \in [1,40; 1,65]$ (б). Секущая $\varphi_1 = 0$

нарастает. На диаграммах режим биений характеризуется линиями над и под диаграммами. Линии над (под) диаграммами означают, что соответствующие фазовые переменные φ_i при $\tau \rightarrow +\infty$ нарастают (убывают), отсутствие линий свидетельствует о том, что соответствующие фазовые переменные ограничены, что характерно для квазипериодических режимов.

Если состояние φ_n меняется периодически, то характер изменения переменной φ_{n+1} может быть как периодическим, так и квазипериодическим. На плоскости параметров $\{\gamma, \delta\}$ область существования периодических движений n -го элемента для $(n+1)$ -го элемента расслаивается: области периодических движений перемежаются с областями квазипериодических движений. Области существования периодических режимов n -го элемента с ростом n достаточно быстро сокращаются и практически вырождаются при небольших изменениях n . Квазипериодические колебания, возникшие в n -м элементе цепочки, далее сохраняются в последующих элементах.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена динамика модели однородной цепочки систем фазовой синхронизации с однонаправленными связями вниз по потоку. Изучены синхронные и автоколебательные режимы. Получены аналитические условия границ областей C_S^N существования режима глобальной синхронизации цепочки, состоящей из N элементов. Показано, что границы областей C_S^N для чётных N являются гладкими, а для нечётных N в области $\delta > 0$ они имеют изломы в точке $a(\delta^*, \gamma^*)$. Приведены выражения для определения координат точек излома. Установлено, что границы областей C_S^N при $\gamma > \gamma^*$ для цепочек с длинами $2i$ и $2i + 1$ совпадают.

Изучено поведение модели вне области глобальной синхронизации. Проведён бифуркационный анализ периодических режимов моделей с малыми размерностями ($N=2$ и 3), выделены области существования периодических режимов различных типов, определён характер границ выделенных областей. Проанализированы изменения структуры плоскости параметров (δ, γ) с ростом N . Установлено, что при увеличении числа элементов в цепочке структура пространства параметров модели с размерностью N наследует структуру пространства параметров моделей с меньшими размерностями, при этом сценарии трансформации областей существования различных регулярных движений аналогичны и при увеличении N повторяются. Проведённый анализ даёт представление об эволюции структуры пространства параметров модели цепочки с ростом N и объясняет пространственные бифуркации периодических движений вниз по потоку. Показано, что в рассматриваемой цепочке отсутствуют хаотические колебания и явления мультистабильности.

Результаты, полученные в этой работе, могут быть использованы для различных научных и технических приложений, например в теории фазированных антенных решёток [22], при конструкции ансамблей высокоточных эталонов частоты [23] и других.

Работа поддержана Министерством образования и науки РФ и ННГУ им. Н. И. Лобачевского (грант 3.820.2014/К).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Капранов М. В. Взаимодействующие многосвязанные системы фазовой синхронизации. Гл. 4. // Системы фазовой синхронизации / Под ред. В. В. Шахгильдяна, Л. Н. Белюстиной. М.: Радио и связь, 1982. С. 55.
2. Афраймович В. С., Некоркин В. И., Осипов Г. В., Шалфеев В. Д. Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации. Горький: ИПФ АН, 1989. 256 с.
3. Мишагин К. Г., Шалфеев В. Д., Пономаренко В. П. Нелинейная динамика систем фазирования в антенных решётках. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2007. 188 с.
4. Мишагин К. Г., Шалфеев В. Д. // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32, № 23. С. 32
5. Coherent laser beam combining / Ed. by A. Brignon. Berlin: Wiley & Sons, 2013. 498 p.
6. Matrosov V. V., Mishchenko M. A., Shalfeev V. D. // Eur. Phys. J. Special Topics. 2013. V. 222, No. 10, P. 2399.
7. Osipov G. V., Kurths J., Zhou Ch. Synhronization in oscillatory networks. Berlin: Springer Science & Business Media, 2007. 370 p.
8. Шалфеев В. Д., Матросов В. В. Нелинейная динамика систем фазовой синхронизации. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2013. 366 с.
9. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. 3-е изд. М.: Наука, 1981. 568 с.

10. Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.
11. Некоркин В. И. Лекции по основам теории колебаний: уч. пособие. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2012. 310 с.
12. Матросов В. В. Динамика нелинейных систем: Программный комплекс для исследования нелинейных динамических систем с непрерывным временем. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2002. 54 с.
13. Осипов Г. В., Шалфеев В. Д. // Радиотехника. 1988. № 3. С. 27.
14. Лифшиц Л. М. // Электросвязь. 1972. № 5. С. 44.
15. Матросов В. В. // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22, № 23. С. 4.
16. Матросов В. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 2006. Т. 49, № 4. С. 357.
17. Матросов В. В., Касаткин Д. В. // Радиотехника и электроника. 2003. Т. 48, № 6. С. 637.
18. Плисс В. А. Нелокальные проблемы теории колебаний. М.: Наука, 1967. 367 с.
19. Шахгильдян В. В., Ляховкин А. А. Системы фазовой автоподстройки частоты. М.: Связь, 1972. 447 с.
20. Каток А. Б., Хасселблат Б. Введение в теорию динамических систем с обзором последних достижений. М.: МЦНМО, 2005. 464 с.
21. Матросов В. В., Касаткин Д. В. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2004. Т. 12, № 1. С. 159.
22. Смирнов В. В., Сорокин А. А., Страхов С. Ю., Сотникова Н. В. Антенные решётки: уч. пособие / Под ред. В. В. Смирнова. СПб.: Изд-во Балт. гос. техн. ун-та, 2014. 81 с.
23. Мишагин К. Г., Чернышев И. Н., Сахаров Б. А. и др. // Труды Института прикладной астрономии РАН. 2015. Вып. 32.

Поступила в редакцию 4 декабря 2014 г.; принята в печать 23 ноября 2015 г.

THE DYNAMICS OF THE SMALL-SIZED ENSEMBLES OF THE PHASE-LOCKING SYSTEMS WITH UNIDIRECTIONAL COUPLINGS

K. N. Aleshin, V. V. Matrosov, and V. D. Shalfeev

The collective dynamics of a small-sized chain of the unidirectionally coupled systems of the phase-locked-loop frequency control is studied. The conditions for the synchronous-regime existence are found, the asynchronous self-oscillation regimes and the transitions among them are studied, and the property of inheriting the structure of the parameter space of the chain when a new element is added to the latter is established.