

УДК 533.9.01

## МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ПЛАЗМЕННО-ВОЛНОВЫХ КАНАЛОВ В МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

*Е. А. Широков\*, Ю. В. Чугунов*

Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород, Россия

В работе анализируется динамика плазменно-волновых каналов, возбуждаемых в магнитоактивной плазме в свистовом диапазоне частот. В рамках квазистационарного приближения построена линейная теория возбуждения плазменного волновода сторонним источником. На основе линейной теории найдены самосогласованные пространственно-временные распределения электрического поля квазипотенциальных волн и концентрации плазмы, являющиеся решением нелинейной нестационарной задачи об ионизационном самоканалировании волн в плазме.

### ВВЕДЕНИЕ

Плазменно-волновой канал представляет собой возмущение концентрации плазмы, вытянутое вдоль внешнего магнитного поля. Он создаётся при ионизации газа или фоновой плазмы в области сильного электромагнитного поля излучающей антенны и поддерживается этим полем. Таким образом, плазменно-волновой канал является самосогласованной разрядной структурой. При её установлении передний фронт ионизации перемещается вдоль магнитного поля с групповой скоростью возбуждаемых волн. Помимо разрядной части, находящейся за фронтом ионизации, канал имеет также диффузионную часть, находящуюся перед фронтом, электромагнитное поле в которой исчезающе мало. Волны, распространяющиеся в разрядной части канала и поддерживающие его, могут быть свистовыми или квазипотенциальными, т. е. в плазме канала выполняются условия резонанса<sup>1</sup>. В данной статье рассматривается случай, когда в канале распространяются квазипотенциальные волны свистового диапазона частот.

Плазменно-волновой канал впервые был получен в лабораторных условиях [1]. Впоследствии эксперименты по его созданию и изучению ставились как в лабораторных условиях (см., например, статьи [2, 3]), так и в околоземной плазме с помощью антенн, установленных на ракетах (см., например, работу [4]).

Существующие математические модели, описывающие плазменно-волновые каналы, являются стационарными, т. е. в них рассматривается не изменяющаяся во времени структура неограниченных вдоль магнитного поля возмущений концентрации плазмы (плазменных дактов) в различных условиях [5, 6]. Несмотря на весьма обширные экспериментальные данные, математические модели, описывающие динамику плазменно-волновых каналов, далеки от завершения. В первую очередь это связано со сложностью решения нелинейных самосогласованных систем уравнений для электромагнитного поля и концентрации плазмы.

В данной статье предлагается модель динамики (формирования) плазменно-волнового канала. Она основана на предположении, что канал сравнительно быстро приходит в стационарное состояние, которое поддерживается, в первую очередь, диффузией частиц вдоль магнитного поля. При этом подразумевается, что единственная существенно нестационарная область — это сравнительно малая окрестность переднего фронта канала, который движется вдоль магнитного

\* [eshirokov@yandex.ru](mailto:eshirokov@yandex.ru)

<sup>1</sup> Под условиями резонанса будем понимать такие условия, при которых волновая поверхность, задаваемая уравнением  $\omega(\mathbf{k}) = \text{const}$ , где  $\omega$  — круговая частота излучения,  $\mathbf{k}$  — волновой вектор, не замкнута.

поля с групповой скоростью квазипотенциальных волн. На основе данной модели и построенной линейной теории возбуждения квазипотенциальных волн в плазменном волноводе сторонним источником рассчитывается пространственно-временное распределение электрического поля и концентрации плазмы.

## 1. ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ВОЗБУЖДЕНИЯ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ВОЛН В ПЛАЗМЕННОМ ВОЛНОВОДЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ДИПОЛЕМ

Прежде всего отметим, что задача о собственных модах плазменных волноводов в магнитном поле и о возбуждении волн в них сторонними источниками детально проанализирована и решена строго [6]. Однако соответствующие дисперсионные уравнения и выражения для электромагнитных полей весьма громоздки, поэтому в данной работе мы ограничимся решением этой задачи в квазистационарном приближении. Последнее позволяет чётко выделить характерные свойства структуры квазипотенциального поля.

Рассмотрим однородный плазменный волновод (канал) в виде бесконечно длинного цилиндра с радиусом  $a$ , окружённого однородной фоновой плазмой. Внешнее однородное постоянное магнитное поле с напряжённостью  $\mathbf{H}_0$  направлено вдоль оси цилиндра, а концентрация плазмы канала  $N_1$  больше концентрации фоновой плазмы  $N_2$ . Введём цилиндрическую систему координат  $(\rho, \varphi, z)$ , где координата  $\rho$  отсчитывается от оси цилиндра в поперечном направлении,  $\varphi$  — азимутальный угол, а ось  $z$  совпадает с осью цилиндра и направлена вдоль внешнего магнитного поля. При дальнейшем анализе возбуждения и распространения квазипотенциальных волн в таком волноводе будем считать, что в плазме канала (т. е. при  $\rho \leq a$ ) реализуются условия резонанса, соответствующие свистовому диапазону частот. Это означает, что в плазме канала поперечная компонента  $\varepsilon_1$  тензора диэлектрической проницаемости положительна, а продольная компонента  $\eta_1$  отрицательна, т. е.  $\varepsilon_1 \eta_1 < 0$ . Также будем полагать, что в фоновой плазме (т. е. при  $\rho > a$ ) условия резонанса не реализуются: в ней поперечная  $\varepsilon_2$  и продольная  $\eta_2$  компоненты тензора диэлектрической проницаемости положительны, т. е.  $\varepsilon_2 \eta_2 > 0$ .

Анализ квазипотенциальных волн удобно вести в квазистационарном приближении [7]. Оно применимо, когда характерный размер излучателя много меньше длины электромагнитной волны. Последнее обстоятельство позволяет ввести электростатический потенциал  $\Phi$  согласно формуле

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi, \quad (1)$$

где  $\mathbf{E}$  — комплексная амплитуда напряжённости электрического поля  $\text{Re}[\mathbf{E} \exp(-i\omega_0 t)]$ ,  $\omega_0 = 2\pi f_0$ ,  $f_0$  — частота излучения.

Потенциал собственных мод удовлетворяет уравнению

$$\text{div}(\hat{\varepsilon} \nabla\Phi) = 0, \quad (2)$$

где  $\hat{\varepsilon}$  — тензор диэлектрической проницаемости. В рассматриваемых условиях это уравнение относится к гиперболическому типу внутри волновода и к эллиптическому типу вне волновода. Ограничиваясь модами с азимутальной симметрией ( $\partial\Phi/\partial\varphi \equiv 0$ ), находим

$$\Phi(\rho, z, h) = \begin{cases} a_1(h) J_0(\rho h/\mu_1) \exp(ihz), & \rho \leq a; \\ a_2(h) K_0(\rho h/\mu_2) \exp(ihz), & \rho > a, \end{cases} \quad (3)$$

где  $J_0(\rho h/\mu_1)$  — функция Бесселя первого рода нулевого порядка,  $K_0(\rho h/\mu_2)$  — функция Макдональда нулевого порядка,  $h$  — продольное волновое число,  $\mu_1 = \sqrt{|\varepsilon_1/\eta_1|}$ ,  $\mu_2 = \sqrt{\varepsilon_2/\eta_2}$ , а  $a_1(h)$

и  $a_2(h)$  — некоторые коэффициенты. В выражении (3) учтены только те моды, которые экспоненциально спадают при  $\rho \rightarrow +\infty$ . Также отметим, что здесь и далее рассматриваются моды, распространяющиеся в направлении оси  $z$ , т. е.  $h > 0$ .

Из равенства (1) находим компоненты комплексной амплитуды напряжённости электрического поля

$$E_\rho(\rho, z, h) = \begin{cases} ha_1(h) J_1(\rho h/\mu_1) \exp(ihz)/\mu_1, & \rho \leq a; \\ ha_2(h) K_1(\rho h/\mu_2) \exp(ihz)/\mu_2, & \rho > a, \end{cases} \quad (4)$$

$$E_\varphi(\rho, z, h) \equiv 0, \quad (5)$$

$$E_z(\rho, z, h) = \begin{cases} -iha_1(h) J_0(\rho h/\mu_1) \exp(ihz), & \rho \leq a; \\ -iha_2(h) K_0(\rho h/\mu_2) \exp(ihz), & \rho > a. \end{cases} \quad (6)$$

Здесь  $J_1(\rho h/\mu_1)$  — функция Бесселя первого рода первого порядка,  $K_1(\rho h/\mu_2)$  — функция Макдональда первого порядка.

Условия непрерывности потенциала и нормальной компоненты  $D_\rho$  комплексной амплитуды индукции электрического поля  $\mathbf{D} = \hat{\epsilon}\mathbf{E}$  при  $\rho = a$  позволяют получить дисперсионное уравнение [8]

$$\frac{\varepsilon_1 J_1(ah/\mu_1)}{\mu_1 J_0(ah/\mu_1)} = \frac{\varepsilon_2 K_1(ah/\mu_2)}{\mu_2 K_0(ah/\mu_2)} \quad (7)$$

и связь между величинами  $a_1(h)$  и  $a_2(h)$ :

$$a_2(h) = a_1(h) \frac{J_0(ah/\mu_1)}{K_0(ah/\mu_2)}. \quad (8)$$

Отметим, что в данном случае условие непрерывности потенциала при  $\rho = a$  совпадает с условием непрерывности тангенциальной компоненты  $E_z$ . Численный анализ показывает, что дисперсионное уравнение (7) имеет бесконечный дискретный набор положительных корней  $h_n$ , где  $n = 1, 2, \dots$ , соответствующих квазипотенциальным собственным модам.

Для расчёта потока энергии электромагнитного поля необходимо найти компоненту  $H_\varphi$  комплексной амплитуды  $\mathbf{H}$  напряжённости магнитного поля собственных мод, которое удовлетворяет уравнению

$$\text{rot } \mathbf{H} = -ik_0\mathbf{D}, \quad (9)$$

где  $k_0 = \omega_0/c$  — волновое число в вакууме,  $c$  — скорость света в вакууме. Следовательно, вектор-потенциал  $\mathbf{A}$ , который определяется соотношением  $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$ , в калибровке Кулона  $\text{div } \mathbf{A} = 0$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta \mathbf{A} = ik_0\mathbf{D}, \quad (10)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа. Решение этого уравнения имеет вид

$$\mathbf{A}(\rho, z, h) = -\frac{ik_0}{4\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbf{D}(\rho', z', h)}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\varphi - \varphi') + (z - z')^2}} \rho' d\rho' d\varphi' dz'. \quad (11)$$

Объёмный интеграл в равенстве (11) сводится к однократному интегралу по переменной  $\rho'$  [9, 10].

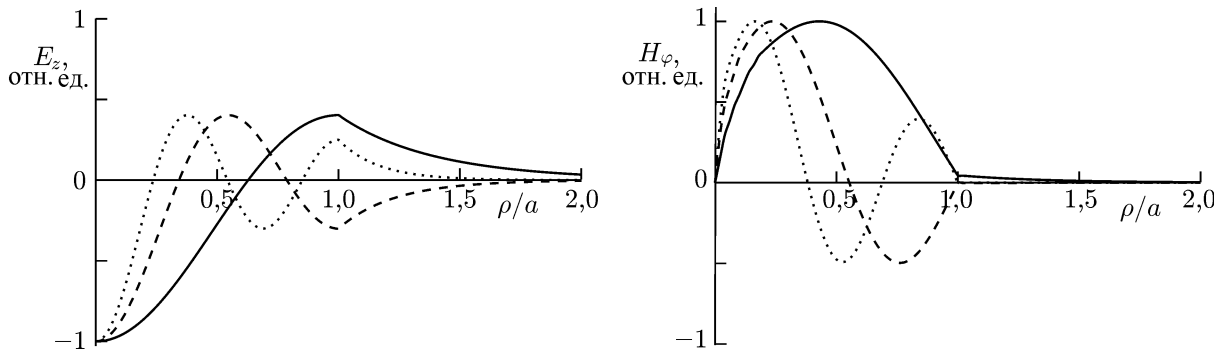


Рис. 1. Радиальные зависимости компонент  $E_z$  и  $H_\varphi$  электромагнитного поля для первых трёх собственных мод. Сплошная линия соответствует первой моде, штриховая — второй, пунктирная — третьей

Приведём выражение для азимутальной компоненты магнитного поля  $H_\varphi \equiv \partial A_\rho / \partial z - \partial A_z / \partial \rho$ :

$$H_\varphi(\rho, z, h) = k_0 \left[ K_0(\rho h) \int_0^{\rho h} F_1(x) I_0(x) x dx + I_0(\rho h) \int_{\rho h}^{+\infty} F_1(x) K_0(x) x dx - K_1(\rho h) \int_0^{\rho h} F_2(x) I_0(x) x dx + I_1(\rho h) \int_{\rho h}^{+\infty} F_2(x) K_0(x) x dx \right] \exp(ihz), \quad (12)$$

где  $I_0(\rho h)$  и  $I_1(\rho h)$  — функции Инфельда нулевого и первого порядка соответственно,

$$F_1(x) = \begin{cases} \varepsilon_1 a_1(h) J_1(x/\mu_1) / \mu_1, & x \leq ah; \\ \varepsilon_2 a_2(h) K_1(x/\mu_2) / \mu_2, & x > ah, \end{cases}$$

$$F_2(x) = \begin{cases} \eta_1 a_1(h) J_0(x/\mu_1), & x \leq ah; \\ \eta_2 a_2(h) K_0(x/\mu_2), & x > ah. \end{cases}$$

Некоторые интегралы в равенстве (12) выражаются через конечную комбинацию цилиндрических и элементарных функций [9], тем не менее соответствующие выражения здесь не приводим ввиду их громоздкости.

На рис. 1 приведены графики зависимости компонент  $E_z$  и  $H_\varphi$  электромагнитного поля от координаты  $\rho$  для первых трёх мод. При построении графиков использовались следующие параметры:  $N_1 = 1,0 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3}$ ,  $N_2 = 2,4 \cdot 10^3 \text{ см}^{-3}$ ,  $a = 7,55 \text{ м}$ ,  $H_0 = 0,5 \text{ Э}$ ,  $\omega_0 = 4,3 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$  (выбор указанных значений объясняется в разделе 2). Видно, что поля собственных мод локализованы внутри волновода и спадают при удалении от него в поперечном направлении. Число укладываемых вдоль радиуса волновода пространственных периодов электрического и магнитного полей определяет номер моды. Отметим, что величина  $|H_\varphi|$  при  $\rho > a$  отлична от нуля, но много меньше, чем при  $\rho \leq a$ .

Рассмотрим теперь задачу о возбуждении плазменного волновода сторонним монохроматическим источником. В качестве последнего удобно рассмотреть диполь, состоящий из двух равномерно заряженных колец с радиусом  $a$ , плоскости которых параллельны друг другу, перпендикулярны оси волновода и отстоят на расстояние  $b$  друг от друга, а центры колец лежат на оси

волновода. Соответствующее распределение комплексной амплитуды объёмной плотности заряда  $\varrho$  имеет вид

$$\varrho(\rho, z) = \frac{Q}{2\pi a} \delta(\rho - a) [\delta(z) - \delta(z + b)], \quad (13)$$

где  $Q$  — полный заряд на кольце,  $\delta(z)$  — дельта-функция Дирака.

Поле, возбуждаемое источником вида (13), обращается в бесконечность в канале на особых характеристиках<sup>2</sup> гиперболического уравнения (2). Поэтому будем предполагать, что в плазме имеют место слабые столкновительные потери, которые снимают указанную особенность и не слишком сильно искажают структуру найденных собственных мод. Тогда комплексные амплитуды напряжённостей электрического  $\mathbf{E}(\rho, z)$  и магнитного  $\mathbf{H}(\rho, z)$  полей излучения в свободной от источников области  $z > 0$  можно искать в виде

$$\mathbf{E}(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \mathbf{E}_n(\rho, z) \exp(-szh_n), \quad (14)$$

$$\mathbf{H}(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \mathbf{H}_n(\rho, z) \exp(-szh_n), \quad (15)$$

где  $\mathbf{E}_n(\rho, z)$  и  $\mathbf{H}_n(\rho, z)$  — комплексные амплитуды напряжённостей электрического и магнитного полей собственных мод, бегущих в направлении оси  $z$ , соответственно,  $s = \nu_e/\omega_0$  (см., например, монографию [7]),  $\nu_e$  — эффективная частота столкновений электронов с ионами и нейтральными молекулами,

$$C_n = \frac{1}{4P_n} \iiint \mathbf{j} \bar{\mathbf{E}}_n dV \quad (16)$$

— коэффициенты разложения. Здесь интегрирование ведётся по области, занятой источником,  $\mathbf{j}$  — комплексная амплитуда плотности стороннего тока,  $\bar{\mathbf{E}}_n$  обозначает электрическое поле  $n$ -й моды, бегущей против направления оси  $z$ ,  $P_n$  — средняя за период мощность, переносимая  $n$ -й модой в направлении оси  $z$  [11]. После интегрирования с использованием уравнения непрерывности соотношение (16) принимает вид

$$C_n = a_1(h_n) \frac{i\omega_0 Q}{4P_n} J_0\left(\frac{ah_n}{\mu_1}\right) [1 - \exp(ih_nb)]. \quad (17)$$

Отметим, что в разложениях (14) и (15), вообще говоря, следует учитывать не только моды дискретной части спектра, но и моды непрерывной части спектра [6]. Последние характеризуются электрическим полем, которое не спадает экспоненциальным образом при  $\rho \rightarrow +\infty$ . Однако расчёты показывают [12], что в рассматриваемом случае возбуждения квазипотенциальных волн в канале с плазмой, где выполняются резонансные условия, основной вклад в поле излучения дают моды дискретной части спектра.

На рис. 2 приведено пространственное распределение величины  $|\mathbf{E}(\rho, z)|$ , отвечающее возбуждению волновода источником вида (13). В расчёте использовались те же параметры, что и при

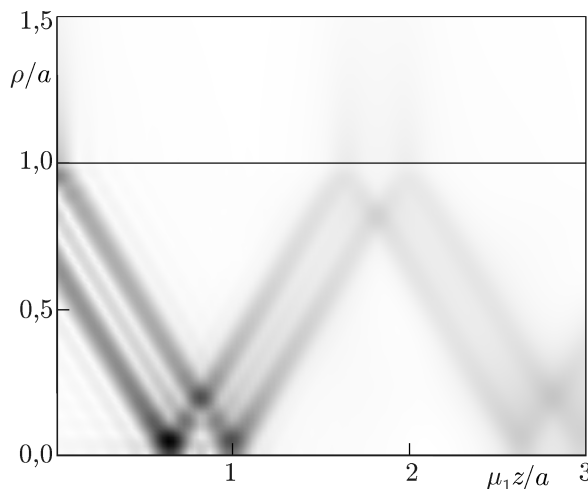


Рис. 2. Пространственное распределение величины  $|\mathbf{E}(\rho, z)|$  в волноводе, который возбуждается источником (13). Чёрный цвет соответствует максимальному значению  $|\mathbf{E}(\rho, z)|$ , а белый — минимальному. Сплошная линия  $\rho = a$  соответствует границе волновода

<sup>2</sup> Под особыми характеристиками здесь и далее понимаются такие характеристики, которые проходят через источник (кольца) и направлены под углом  $\arctg \mu_1$  к внешнему магнитному полю внутри волновода. На границе с фоновой плазмой они имеют излом.

нахождении собственных мод;  $s = 3,7 \cdot 10^{-3}$  (см. раздел 2),  $b = a$ . Видно, что поле излучения локализовано на особых характеристиках. В окрестности точек пересечения этих характеристик, особенно на оси волновода, величина электрического поля максимальна.

## 2. МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ПЛАЗМЕННО-ВОЛНОВОГО КАНАЛА

Если в фоновой плазме или нейтральном газе в магнитном поле имеется источник вида (13), который включается в некоторый момент времени, то при определённых условиях (см., например, статью [13]) возможно образование плазменно-волнового канала. В общем случае описание этого канала сводится к решению задачи об ионизационном самоканалировании волн в плазме, которая предполагает анализ трёх самосогласованных уравнений для концентрации и температуры электронов и электрического поля волны. Важно отметить, что нелинейность здесь является нелокальной, т. к. частицы плазмы в разряде движутся диффузионным образом.

Изменение концентрации электронов  $N(\rho, z, t)$  в плазменно-волновом канале описывается уравнением [14]

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( D_{e\parallel} \frac{\partial N}{\partial z} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho D_{e\perp} \frac{\partial N}{\partial \rho} \right) + (\nu_i - \nu_a) N - \alpha N^2 + I_{\text{ext}}, \quad (18)$$

где  $D_{e\parallel} = T_e / (m\nu_e)$  и  $D_{e\perp} = T_e \nu_e / (m\omega_{ce}^2)$  — коэффициенты диффузии электронов вдоль и поперёк магнитного поля соответственно,  $T_e$  — температура электронов,  $m$  — масса электрона,  $\omega_{ce}$  — циклотронная частота электронов,  $\nu_i$  — частота ионизации,  $\nu_a$  — частота диссоциативного прилипания электронов к нейтральным молекулам,  $\alpha$  — коэффициент рекомбинации,  $I_{\text{ext}}$  — определяемая параметрами фоновой плазмы интенсивность внешнего источника ионизации [5], поддерживающего равновесную концентрацию фоновой плазмы. В приведённых выражениях для коэффициентов диффузии учтено, что температура электронов в разряде много больше температуры ионов. Отметим, что в рассматриваемых условиях слабой ионизации плазмы основной вклад в частоту  $\nu_e$ , входящую в эти выражения, дают столкновения электронов с нейтральными молекулами. Коэффициенты  $D_{e\parallel}$ ,  $D_{e\perp}$ ,  $\nu_i$ ,  $\nu_a$  и  $\alpha$ , вообще говоря, зависят от температуры электронов  $T_e$ .

Отметим, что в общем случае при наличии фоновой магнитоактивной плазмы уравнение (18), строго говоря, неверно [15]: в неоднородных задачах в анизотропных средах уравнение, описывающее изменение концентрации, не может быть записано в виде обычного уравнения диффузии. Однако уравнение (18) справедливо при рассмотрении сильно вытянутых вдоль магнитного поля плазменных неоднородностей. Условие, позволяющее использовать это уравнение, имеет вид  $L_{\parallel}^2 / L_{\perp}^2 \gg D_{e\parallel} / D_{i\perp}$ , где  $D_{i\perp}$  — коэффициент диффузии ионов поперёк магнитного поля,  $L_{\parallel}$  и  $L_{\perp}$  — характерные продольный и поперечный масштабы неоднородности соответственно [14]. Расчёты показывают, что в рассматриваемой задаче это условие выполняется, т. е. уравнение (18) можно использовать.

Также отметим, что в уравнении (18) не учитывается влияние термодиффузии в силу того, что далее рассматриваются небольшие возмущения температуры электронов: величина  $T_e$  близка к своему «пробойному» значению.

Уравнение для электрического поля волны в свободной от источников области имеет вид (2), где теперь  $\hat{\epsilon} = \hat{\epsilon}(N)$ :

$$\text{div} [\hat{\epsilon}(N) \nabla \Phi] = 0. \quad (19)$$

Будем далее предполагать, что температура  $T_e$  в канале однородна и не изменяется со временем. Это позволяет с некоторыми оговорками, которые будут сделаны далее, ограничиться

системой двух самосогласованных уравнений для электрического поля волны и концентрации электронов. Отметим, что анализ этой системы в некоторых простых случаях проведён в монографии [7].

Сделаем также следующие допущения. Прежде всего, будем считать, что разрядная часть канала, которая вытягивается (растёт) вдоль магнитного поля, состоит из стационарной и сравнительно короткой нестационарной областей (рис. 3). В стационарной области концентрация электронов и амплитуда поля полагаются установившимися, т. е. не зависящими от времени. Кроме того, плазма в этой области считается однородной, прежде всего благодаря сильной продольной диффузии. При этом, вообще говоря, плазма неоднородна в поперечном направлении. Тем не менее, для расчётов поля в стационарной области и при рассмотрении окрестности фронта ионизации достаточно полагать, что плазма в стационарной области однородна не только в продольном, но и в поперечном направлении. Стационарная область простирается от области источника (точнее, от области формирования канала) до границы с нестационарной областью. В последней происходят сложные нестационарные процессы ионизации и установления стационарных значений поля и концентрации электронов. Эта часть имеет некоторую длину  $\Delta_0$  и перемещается вдоль магнитного поля со скоростью фронта ионизации, равной групповой скорости квазипотенциальных волн [7]

$$V_{\text{gr}} = b \sqrt{1 + \mu_1^2} \left( \frac{\partial \mu_1}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_0} \right)^{-1}. \quad (20)$$

В рассматриваемых условиях эта скорость почти не зависит от концентрации плазмы. Факт равенства скорости перемещения фронта ионизации групповой скорости волн был установлен экспериментально (см., например, статью [2]).

Поясним смысл величины  $V_{\text{gr}}$ . Как показывают расчёты, основной вклад в затухание квазипотенциальных волн в стационарной области дают столкновительные, а не ионизационные потери. Вместе с предыдущими допущениями это означает, что структура электрического поля в этой области совпадает с найденной в предыдущем разделе и представляет собой суперпозицию собственных мод. Каждая такая мода, вообще говоря, характеризуется собственной групповой скоростью. Однако в рассматриваемых условиях наиболее интенсивно возбуждается мода с продольным волновым числом, величина которого обратно пропорциональна характерному размеру излучающего диполя, т. е. в данном случае величине  $b = a$ . Групповая скорость в выражении (20) отвечает именно этой моде.

Таким образом, нестационарная область находится в движущемся со скоростью  $V_{\text{gr}}$  промежутке  $V_{\text{gr}}t - \Delta_0 \leq z \leq V_{\text{gr}}t$ . Вся мощность, подводимая от диполя к этой области, идёт на ионизацию газа (расчёты показывают, что в этой области акты ионизации происходят гораздо чаще, чем столкновения). Поэтому падающая от источника волна не отражается от нестационарной области и от фронта ионизации.

При  $z > V_{\text{gr}}t$ , т. е. перед фронтом ионизации, находится диффузионная часть канала. В ней поле исчезающе мало, а заряженные частицы появляются за счёт продольной диффузии из разрядной части канала, главным образом из нестационарной области.

Отметим также, что, как только фронт ионизации достигает области, расстояние от которой до источника равно масштабу столкновительного затухания волн, формирование канала пре-

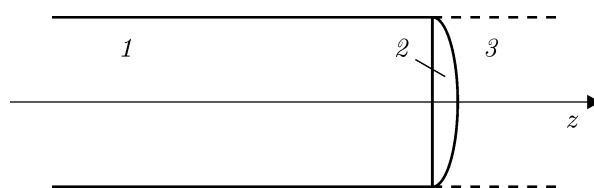


Рис. 3. Условная схема канала: 1 — стационарная область, 2 — нестационарная область, 3 — диффузионная часть. Области 1 и 2 образуют разрядную часть канала

кращается и реализуется полностью стационарный режим, который характеризуется конечной длиной канала  $L$ . Для оценки этой длины, а также концентрации  $N_1$  и средней температуры электронов  $T_e$  в разрядной части канала используем соотношения (см., например, статью [5])

$$D_{e\parallel}/L^2 + D_{e\perp}/a^2 + \nu_i - \nu_a - \alpha N_1 + I_{\text{ext}}/N_1 = 0, \quad (21)$$

$$N_1 = \frac{2W_0}{3\pi a^2 L \delta_{em} \nu_e T_e}, \quad (22)$$

$$a^2 = D_{e\perp}/\nu_i, \quad (23)$$

$$L = \omega_0 a / \nu_e, \quad (24)$$

где  $W_0$  — мощность, излучаемая антенной и вкладываемая в разряд,  $\delta_{em}$  — доля энергии, теряемой электроном при соударении с молекулой, радиус кольца считается равным радиусу канала  $a$ . Ясно, что последнее предположение не ограничивает общность рассмотрения. Зависимости величин  $\nu_i$ ,  $\nu_a$ ,  $\alpha$  и  $\nu_e$  от температуры  $T_e$  в интервале её значений ниже 3 эВ и ряда других факторов приведены в работах [16, 17]. Соотношение (21) представляет собой уравнение баланса концентрации в стационарном режиме, а формула (22) следует из уравнения для температуры частиц. В выражении (23) подразумевается, что радиус канала определяется длиной, которую проходят частицы вследствие поперечной диффузии за время ионизации. Соотношение (24) даёт длину канала как масштаб столкновительного затухания квазипотенциальных волн.

Для характерных условий ночной ионосферы на высоте 150 км [16], частоты  $\omega_0 = 4,3 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$  и мощности  $W_0 = 30 \text{ кВт}$  из системы (21)–(24) находим:  $N_1 = 1,0 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3}$ ,  $T_e = 2,14 \text{ эВ}$ ,  $a = 7,55 \text{ м}$ ,  $L = 2030 \text{ м}$ ,  $V_{\text{gr}} = 0,17 \text{ с}$ .

Рассмотрим теперь нестационарную область разрядной части канала. Её продольный размер  $\Delta_0$  определим как расстояние, на которое перемещается фронт ионизации за характерное время ионизации:

$$\Delta_0 = \frac{V_{\text{gr}}}{\nu_i - \nu_a}. \quad (25)$$

Будем полагать, что величина  $\Delta_0$  много меньше радиуса канала  $a$ , что подтверждается дальнейшими расчётами.

Отметим, что форма нестационарной области такова, что граница между областями с различным типом уравнения (2) может быть аппроксимирована, например, параболоидом. Это означает, что особые характеристики гиперболического уравнения для потенциала сходятся в точку с координатой  $\rho = 0$  на переднем фронте канала (это особая точка типа фокус в фазовом пространстве), испытывая бесчисленные изломы на параболической границе [7]. Иными словами, в рассматриваемой нестационарной области происходит значительное уплотнение (сгущение) особых характеристик в пространстве. Это означает, что величина электрического поля в этой области значительно больше, чем в точках пересечения особых характеристик в стационарной области. По существу, это обстоятельство обуславливает интенсивную ионизацию в нестационарной области и вытягивание канала в направлении магнитного поля. Более того, оценки показывают, что в этой области основной вклад в баланс концентрации даёт не диффузия, а ионизация. Иными словами, в нестационарной области за характерное время ионизации частицы перемещаются вследствие диффузии на гораздо меньшее расстояние, чем фронт ионизации, и поэтому диффузионным слагаемым в уравнении (18) можно пренебречь. Отметим, что в стационарной области, напротив, основной вклад в баланс концентрации вносит диффузия.

Будем искать самосогласованные солитоноподобные распределения электрического поля  $\mathbf{E}$  и концентрации  $N$ , которые зависят от автомодельной переменной  $z' = z - V_{\text{gr}}t$ , в нестационарной области в окрестности фронта ионизации. Пусть при этом координата  $z'$  отсчитывается от



переднего края фронта ионизации. Выбор такой автомодельной переменной означает, что искомые структуры поля и концентрации плазмы стационарны и распространяются вдоль оси  $z$  со скоростью  $V_{gr}$ . При поиске таких распределений в системе уравнений (18) и (19) необходимо представить частоту ионизации  $\nu_i$  как функцию электрического поля. Известно [18], что если продольный масштаб электронной теплопроводности  $L_T$  мал по сравнению с соответствующим пространственным масштабом электрического поля  $L_E$ , то имеет место степенная аппроксимация

$$\nu_i = \nu_a (|\mathbf{E}|/E_p)^\beta, \quad (26)$$

где  $E_p$  — пробойное поле в плазме,  $\beta$  — показатель крутизны зависимости частоты ионизации от амплитуды поля (для воздуха  $\beta = 16/3$ ). Вблизи фронта ионизации условие  $L_T \ll L_E$  нарушается, однако всё равно будем использовать эту зависимость по следующим причинам. Во-первых, как уже отмечалось, в рамках предлагаемой модели наиболее интенсивная ионизация идёт только в нестационарной области, где электрическое поле особенно велико. Именно этому и соответствует локальная связь в формуле (26). Во-вторых, эта формула является весьма простой и позволяет получить верную качественную картину динамики концентрации плазмы и электрического поля вблизи фронта ионизации в рамках используемых приближений.

Таким образом, в нестационарной области для автомодельных самосогласованных распределений величин  $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$  и  $N$  в переменных  $\rho$  и  $z'$  можно записать систему уравнений

$$\frac{\partial N}{\partial z'} = \frac{\nu_a}{V_{gr}} \left[ 1 - \left( \frac{|\nabla\Phi|}{E_p} \right)^\beta \right] N + \frac{\alpha}{V_{gr}} N^2 - \frac{I_{ext}}{V_{gr}}, \quad (27)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \left( 1 + \frac{N}{N_m} (1 + is) \right) \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right] + \frac{\partial}{\partial z'} \left[ \left( 1 - \frac{N}{N_c} (1 - is) \right) \frac{\partial \Phi}{\partial z'} \right] = 0, \quad (28)$$

где  $N_m = H_0^2 / (4\pi mc^2)$ ,  $N_c = m\omega_0^2 / (4\pi q^2)$  — критическая концентрация плазмы,  $q$  — элементарный заряд. Уравнение (27) описывает баланс концентрации электронов в движущейся системе координат с учётом процессов ионизации (за счёт внешнего источника и ударов электронов), прилипания и рекомбинации. Учёт столкновений в соотношении (28) позволяет устранить особенность в распределении электрического поля.

Система уравнений (27) и (28) чрезвычайно сложна для анализа во всей нестационарной области даже с учётом условия  $\Delta_0 \ll a$  и локализации поля на особых характеристиках. Дело в том, что в силу сравнительно высокой плотности особых характеристик в этой области упрощение уравнения (28) не позволяет корректно описывать распределение поля вдоль некоторой особой характеристики. По этой причине мы ограничимся рассмотрением только той области, которая близка к точке  $\rho = 0, z' = 0$  на параболической границе, в которую сходятся особые характеристики: вблизи этой точки они являются квазипоперечными. Следовательно, в нестационарной области в окрестности фронта ионизации можно считать, что поле имеет только компоненту  $E_z$ , и рассматривать одномерную задачу.

В соответствии с вышесказанным перепишем систему (27) и (28) в виде

$$\frac{dN}{dz'} = \frac{\nu_a}{V_{gr}} \left[ 1 - \left( \frac{|E_z|}{E_p} \right)^\beta \right] N + \frac{\alpha}{V_{gr}} N^2 - \frac{I_{ext}}{V_{gr}}, \quad (29)$$

$$\frac{d}{dz'} \{ [N_c - N(1 - is)] E_z \} = 0. \quad (30)$$

Уравнение (30) интегрируется и позволяет установить связь между величинами  $E_z$  и  $N$ :

$$E_z = \frac{U}{N_c - N(1 - is)}, \quad (31)$$

где  $U$  — некоторая постоянная. Подставляя (31) в (29), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка для функции  $N(z')$ :

$$\frac{dN}{dz'} = \frac{\nu_a}{V_{gr}} \left[ 1 - \left( \frac{|U|}{E_p |N_c - N(1 - is)|} \right)^\beta \right] N + \frac{\alpha}{V_{gr}} N^2 - \frac{I_{ext}}{V_{gr}}. \quad (32)$$

Поскольку граница  $z' = 0$  разделяет области, в которых уравнение для потенциала является эллиптическим и гиперболическим, условие для функции  $N(z')$  на этой границе, очевидно, имеет вид

$$N(z' = 0) = N_c. \quad (33)$$

Тогда решение уравнения (32) можно записать в неявной форме

$$z' = \int_{N_c}^N \left\{ \frac{\nu_a}{V_{gr}} \left[ 1 - \left( \frac{|U|}{E_p |N_c - N'(1 - is)|} \right)^\beta \right] N' + \frac{\alpha}{V_{gr}} N'^2 - \frac{I_{ext}}{V_{gr}} \right\}^{-1} dN'. \quad (34)$$

Постоянную  $U$  определим из условия, что вся мощность излучения, подводимого от антенны к нестационарной области канала, идёт на ионизационные потери в последней (отметим, что столкновительные потери в этой области сравнительно малы). Для этого запишем теорему Пойнтинга в виде

$$\operatorname{Re} \left( \frac{c}{8\pi} \operatorname{div} [\mathbf{E}, \mathbf{H}^*] \right) = \frac{\omega_0}{8\pi} \operatorname{Im} [\mathbf{E} (\hat{\epsilon} \mathbf{E})^*], \quad (35)$$

где индекс  $*$  обозначает комплексное сопряжение. Раскрывая правую часть в последнем равенстве и интегрируя его по нестационарной области канала, получаем соотношение для определения константы  $U$ :

$$P(z' = -\Delta_0) = \frac{a^2 N_1}{16 N_c} \nu_i(E_{\max}) |E_{\max}|^2 \Delta_0. \quad (36)$$

Здесь  $P(z' = -\Delta_0) = 0,25 \int_0^a E_p H_\varphi^* \rho d\rho \Big|_{z'=-\Delta_0}$  — мощность подводимого от антенны к нестационарной области излучения, рассчитываемая в исходной (лабораторной) системе отсчёта,  $E_{\max} = E_z(z' = 0) = U / (is N_c)$ .

На рис. 4 приведены найденные самосогласованные распределения  $|E_z(z')|$  и  $N(z')$  в нестационарной области канала в окрестности фронта ионизации для мощности подводимого излучения  $P(z' = -\Delta_0) = 15$  кВт. Соответствующая длина нестационарной области примерно равна  $\Delta_0 = 0,1a$ . Отметим, что поле в вершине параболической границы примерно на порядок больше, чем в точке пересечения особых характеристик в стационарной части канала. Концентрация плазмы в рассматриваемой области в данном приближении близка к критической. В то же время ясно, что отмеченное усиление поля вблизи параболической границы приводит к особенно интенсивной ионизации и, следовательно, к значительному росту концентрации плазмы в нестационарной области до значений больше или порядка  $N_1$ . Следовательно, для более корректного описания необходимо принимать во внимание двумерность задачи и кривизну параболической границы.

Отметим, что мощность подводимого излучения медленно уменьшается во времени из-за столкновительных потерь в стационарной части канала. Это приводит к медленному изменению длины  $\Delta_0$  и постоянной  $U$ . Поэтому найденные распределения слабо зависят от времени, качественно при этом не меняясь.

Достаточно далеко от фронта ионизации в диффузионной части ( $z' > 0$ ) электрическое поле исчезающе мало, т. к. квазипотенциальные волны до неё не доходят. Продольный масштаб  $L_{diff}$ ,

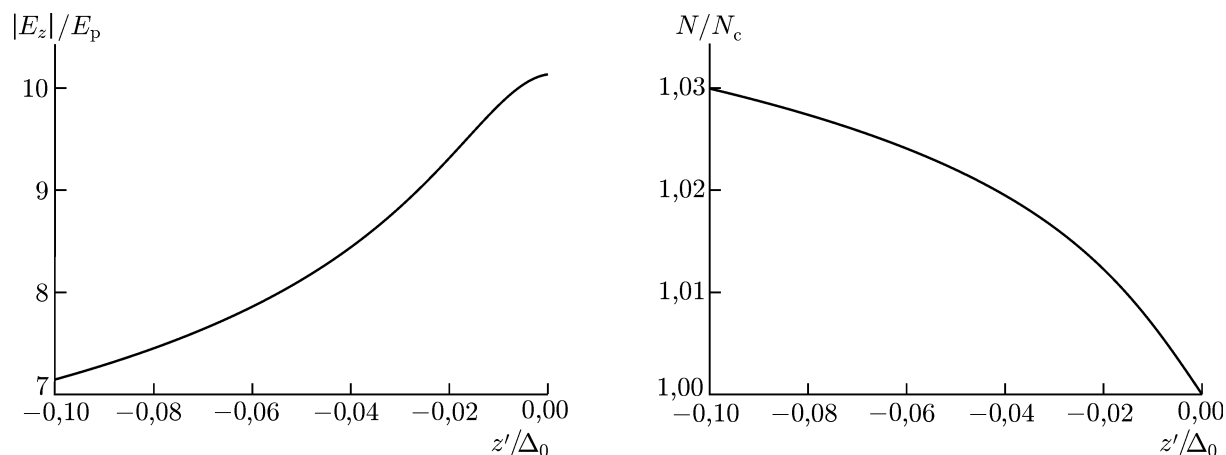


Рис. 4. Солитоноподобные распределения величины электрического поля  $|E_z(z')|$  и концентрации плазмы  $N(z')$  вблизи фронта ионизации. Координата  $z' = 0$  соответствует расположению фронта ионизации в сопутствующей системе отсчёта

на который простирается эта часть в стационарном режиме, определяется потерями частиц из-за прилипания:

$$L_{\text{diff}} = \sqrt{D_{e\parallel}/\nu_a}. \quad (37)$$

В рассматриваемых условиях этот масштаб равен 6 880 м.

### 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе построены приближённые нестационарные распределения поля излучения и концентрации заряженных частиц в плазменно-волновом канале на основе, во-первых, развитой линейной теории возбуждения плазменного волновода сторонним источником и, во-вторых, упрощённой модели канала, согласно которой в его разрядной части почти на всём её протяжении имеет место стационарный (установившийся) режим, за исключением сравнительно небольшой области вблизи фронта ионизации. В окрестности последнего найдены самосогласованные солитоноподобные распределения электрического поля и концентрации плазмы.

Отметим, что плазменно-волновые каналы могут использоваться для активной диагностики параметров околоземной плазмы [19]. В самом деле, амплитудная модуляция высокочастотного сигнала, возбуждающего газовый разряд в ионосфере Земли, приводит к появлению токов в плазменном шнуре. Эти токи возбуждают низкочастотный электромагнитный сигнал, что позволяет говорить о канале как об антенне, достаточно эффективно излучающей электромагнитные волны. Регистрация этих волн и анализ их характеристик позволяют диагностировать параметры ионосферной плазмы. Поэтому изучение плазменно-волновых каналов, в т. ч. построение математических моделей, описывающих их динамику, представляет не только теоретический интерес, но также важно для развития радиофизических методов диагностики параметров околоземной плазмы.

Авторы признательны В. Е. Семёнову и А. В. Кудрину за полезные обсуждения и С. В. Тарасову и В. С. Грачу за ряд проведённых вычислений. Работа Е. А. Широкова выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 14-02-31081 мол\_а).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Марков Г. А., Миронов В. А., Сергеев А. М. // Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 29, № 11. С. 672.
2. Марков Г. А. // ЖЭТФ. 1998. Т. 113, № 4. С. 1289.
3. Марков Г. А., Белов А. С. // УФН. 2010. Т. 180, № 7. С. 735.
4. Chugunov Yu. V., Markov G. A. // J. Atmosph. Solar-Terrestrial Phys. 2001. V. 63, No. 17. P. 1775.
5. Кудрин А. В., Курина Л. Е., Марков Г. А. // ЖЭТФ. 1997. Т. 112, № 4. С. 1285.
6. Kondratiev I. G., Kudrin A. V., Zaboronkova T. M. Electrodynamics of density ducts in magnetized plasmas. Amsterdam: CRC Press, 1999. 288 p.
7. Мареев Е. А., Чугунов Ю. В. Антенны в плазме. Нижний Новгород: ИПФ АН СССР, 1991. 232 с.
8. Кондратенко А. Н. Плазменные волноводы. М.: Атомиздат, 1976. 232 с.
9. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
10. Watson G. N. A treatise on the theory of Bessel functions. Cambridge: Cambridge University Press, 1995. 814 p.
11. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988. 442 с.
12. Kudrin A. V., Zaitseva A. S., Zaboronkova T. M., Zilitinkevich S. S. // Progress Electromagn. Res. B. 2013. V. 55. P. 241.
13. Марков Г. А., Попова Л. Л., Чугунов Ю. В. // Письма в ЖЭТФ. 1985. Т. 11, № 23. С. 1465.
14. Гершман Б. Н. Динамика ионосферной плазмы. М.: Наука, 1974. 256 с.
15. Жилинский А. П., Цендин Л. Д. // УФН. 1980. Т. 131, № 3. С. 343.
16. Гуревич В. А., Шварцбург А. Б. Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере. М.: Наука, 1973. 272 с.
17. Райзер Ю. П. Физика газового разряда. М.: Наука, 1987. 592 с.
18. Anderson D., Jordan U., Lisak M., et al. // IEEE Trans. Microw. Theory Tech. 1999. V. 47, No. 12. P. 2547.
19. Кудрин А. В., Марков Г. А., Трахтенгерц В. Ю., Чугунов Ю. В. // Геомагнетизм и аэронавигация. 1991. Т. 31, № 2. С. 334.

Поступила в редакцию 14 января 2015 г.; принята в печать 9 сентября 2015 г.

## MODEL OF THE DYNAMICS OF PLASMA-WAVE CHANNELS IN MAGNETIZED PLASMAS

*E. A. Shirokov and Yu. V. Chugunov*

We analyze the dynamics of the plasma-wave channels excited in magnetized plasmas in the whistler frequency range. A linear theory of excitation of a plasma waveguide by an external source is developed using the quasi-static approximation. Self-consistent spatio-temporal distributions of the electric field of quasi-potential waves and plasma density, which are solutions of the nonlinear nonstationary problem of the ionizing self-channeling of waves in plasmas are found on the basis of the linear theory.