

УДК 538.945

ЛОКАЛИЗОВАННАЯ СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ В СИСТЕМАХ С НЕОДНОРОДНОЙ МАССОЙ КУПЕРОВСКИХ ПАР

А. А. Копасов*, Д. А. Савинов, А. С. Мельников

Институт физики микроструктур РАН, г. Нижний Новгород, Россия

В рамках теории Гинзбурга—Ландау исследованы особенности локализованного зарождения параметра порядка в сверхпроводящих системах с неоднородной эффективной массой куперовских пар m , возникающей вследствие пространственной модуляции коэффициента диффузии и/или за счёт флуктуаций локальной оси анизотропии в образце. В асимптотике слабых магнитных полей H , для которых магнитная длина $[\Phi_0/(2\pi H)]^{1/2}$, где Φ_0 — квант магнитного потока, много меньше масштаба неоднородности, пространственный масштаб параметра порядка определяется средней по образцу длиной когерентности, а в сверхпроводнике возникает регулярная решётка вихрей Абрикосова. В достаточно сильных магнитных полях H параметр порядка оказывается локализованным вблизи минимумов длины когерентности $\xi \propto m^{-1/2}$, что приводит к повышению критической температуры и разрушению регулярной решётки вихрей Абрикосова. Таким образом, при постепенном увеличении магнитного поля возникает конкуренция между двумя типами зарождения сверхпроводимости, которая приводит к положительной кривизне линии фазового перехода. Мы изучили особенности температурных зависимостей верхнего критического магнитного поля для некоторых модельных пространственных профилей массы куперовских пар. Полученные результаты находятся в хорошем согласии с прямыми численными расчётами.

ВВЕДЕНИЕ

Согласно феноменологической теории Гинзбурга—Ландау критическая температура фазового перехода $T_{c2}(H)$ в случае изотропного массивного сверхпроводника определяется выражением [1]

$$T_{c2} = T_{c0} \left[1 - H/H_{c2}^{(0)} \right], \quad (1)$$

где H — напряжённость внешнего магнитного поля, T_{c0} — критическая температура сверхпроводящего перехода в нулевом магнитном поле, $H_{c2}^{(0)} = \Phi_0/(2\pi\xi_0^2)$, $\Phi_0 = \pi\hbar c/e$ — квант магнитного потока, $\xi_0 = \hbar v_F/(2\pi T_{c0}) \propto m^{-1}$ — длина когерентности ξ при температуре $T = 0$, длина $\xi = \xi_0/\sqrt{1 - T/T_{c0}}$ определяет пространственный масштаб параметра порядка при заданной температуре T , v_F — скорость Ферми, m — масса куперовских пар, \hbar — постоянная Планка, c — скорость света в вакууме, e — элементарный заряд. Выражение (1) позволяет описывать линию фазового перехода сверхпроводника вблизи температуры T_{c0} в пределе $\ell \gg \hbar v_F/T_{c0}$ («чистый» предел), где ℓ — длина свободного пробега. В 1963 году впервые было предсказано существование поверхностной сверхпроводимости, критическая температура которой $T_{c3} = T_{c0}[1 - H/(2H_{c2}^{(0)})]$ превышает значение T_{c2} при заданном магнитном поле H [2]. С тех пор было опубликовано большое число работ, посвящённых изучению локализованной сверхпроводимости в системах с различной геометрией, таких как тонкие сверхпроводящие плёнки в наклонном магнитном поле [3]; сверхпроводники с цилиндрической [4, 5] и сферической [5, 6] полостями; сверхпроводящие образцы, содержащие плоскости двойникования [7]; гибридные структуры сверхпроводник/ферромагнетик (S/F). Большое внимание в литературе уделяется локализованной сверхпроводимости в S/F-системах, где неоднородное обменное поле приводит к появлению параметра порядка, локализованного как

* kopasov@ipmras.ru

вблизи доменных стенок, так и вблизи границ образца (см. работы [8–24] и ссылки в них). Отметим, что во всех вышеперечисленных работах демонстрируются особенности локализованного зарождения параметра порядка в «чистых» изотропных сверхпроводниках и не учитывается влияние примесей и флуктуаций направлений кристаллографических осей анизотропии в образце, которое может оказаться существенным при расчёте зависимостей критической температуры от магнитного поля $T_c(H)$.

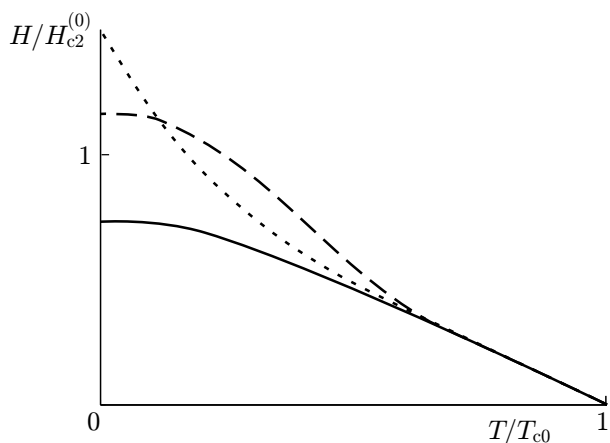


Рис. 1. Типичные кривые фазового перехода $T_c(H)$ для «грязных» сверхпроводников. Сплошная линия соответствует результатам теории ВГХ, а штриховая и пунктирная линии — экспериментальным зависимостям $T_c(H)$, полученным в работах [27–32]

$< T_{c0}$, а при $T \rightarrow 0$ выходит на насыщение (изображена сплошной линией на рис. 1). Данная зависимость $T_c(H)$ хорошо описывает сверхпроводящие свойства многих «грязных» материалов. Однако для других классов соединений, таких как высокотемпературные сверхпроводники, композитные плёнки In/InO_x , MgB_2 , а также «железные» сверхпроводники, эксперимент даёт иные зависимости $T_c(H)$ [27–32]. В частности, вблизи температуры T_{c0} линия фазового перехода может обладать положительной кривизной, сохраняя насыщение при низких температурах, либо линия $T_c(H)$ оказывается выпуклой вниз во всём интервале температур, а насыщение при $T \rightarrow 0$ вовсе отсутствует (см. штриховую и пунктирную линии на рис. 1 соответственно). В литературе существует несколько теоретических подходов, позволяющих объяснить такие аномальные зависимости $T_c(H)$ влиянием эффектов беспорядка в сверхпроводящих образцах. В частности, в ряде статей проанализировано поведение линии фазового перехода в сильно неупорядоченных сверхпроводниках, когда $k_F \ell \lesssim 1$, где k_F — импульс Ферми [33, 34]. Необычная зависимость $T_c(H)$ объясняется близостью к переходу Андерсона, когда критическая температура T_{c0} зависит от степени беспорядка. При этом график функции $T_c(H)$ обладает положительной кривизной во всём интервале температур $T < T_{c0}$ (пунктирная линия на рис. 1).

Другая серия теоретических работ касается исследования $T_c(H)$ в пределе слабого беспорядка ($k_F \ell \gg 1$) [35–38]. В частности, в статье [39] рассчитаны флуктуации верхнего критического поля в сверхпроводниках со случайно распределёнными точечными дефектами: относительное среднеквадратичное отклонение поля H_{c2} составляет величину порядка $(k_F \ell)^{-1}$. Отсюда видно, что в пределе слабого беспорядка дисперсия верхнего критического поля пренебрежимо мала. Она может быть увеличена за счёт модуляции характеристик беспорядка. В реальных образцах такая модуляция может быть вызвана, например, неоднородностью концентрации примесей, что

Простейший способ описания сверхпроводящих свойств неупорядоченных соединений, когда $\ell \ll \hbar v_F / T_{c0}$ («грязный» предел), основан на теории Гинзбурга—Ландау с перенормированной длиной когерентности $\xi = \xi_0 / \sqrt{1 - T/T_{c0}}$, где $\xi_0 = \sqrt{\pi \hbar D / (8 T_{c0})}$ и $D = v_F \ell / 3$ — коэффициент диффузии. Данная перенормировка приводит к увеличению верхнего критического поля при заданной температуре T , а соответствующая зависимость $T_c(H)$ оказывается линейной вблизи T_{c0} . Описание линии фазового перехода $T_c(H)$ во всём диапазоне температур может быть проведено в рамках теории Вертхамера—Гельфанда—Хоенберга (ВГХ) [25, 26]. Теория ВГХ основана на решении квазиклассических уравнений Узаледа для функций Грина совместно с уравнением самосогласования для сверхпроводящей щели Δ . Соответствующая линия фазового перехода $T_c(H)$ имеет отрицательную кривизну при $T <$

приводит к определённому виду пространственной зависимости коэффициента диффузии D , а значит и эффективной массы куперовских пар m , поскольку $D \propto m^{-1}$. В то же время неоднородное распределение массы m может возникать в тонкоплёночных поликристаллах вследствие флуктуаций направления локальной оси анизотропии. Такие флуктуации типичны для плёнок высокотемпературных, а также «железных» сверхпроводников и могут приводить к аномальным линиям $T_c(H)$ с положительной кривизной, которые наблюдались ранее экспериментально [27–32]. Впервые теоретическое обоснование данного явления было дано в работе [35], где авторы обнаружили положительную кривизну графика зависимости $T_c(H)$ для периодических сверхпроводящих структур (сверхрешёток), предполагая пространственное распределение D одномерным и скачкообразным.

В данной работе анализируются особенности возникновения локализованной сверхпроводимости и формы линии фазового перехода в системах с неоднородной эффективной массой куперовских пар, обусловленной либо определённым пространственным распределением примесей по образцу («грязный» предел), либо флуктуациями направления локальной оси анизотропии в поликристаллических материалах («чистый» предел). В таких системах возможна модификация структуры вихревого состояния, при которой происходит разрушение регулярной решётки вихрей Абрикосова и возникновение локализованной сверхпроводимости в форме отдельных зародышей сверхпроводящей фазы (сверхпроводящих островков). Появление таких островков должно приводить к уширению сверхпроводящего перехода, регистрируемого в результате измерений температурной зависимости сопротивления образца во внешнем магнитном поле. Действительно, начало падения сопротивления при уменьшении температуры свидетельствует о зарождении локализованной сверхпроводимости, в то время как его полное исчезновение соответствует появлению развитой сверхпроводимости, возникающей при формировании бесконечного сверхпроводящего кластера. Очевидно, что сверхпроводящие островки формируются вблизи минимумов длины когерентности $\xi \propto m^{-1/2}$ и оказываются связанными посредством слабого джозефсоновского взаимодействия, которое вызвано экспоненциально малым перекрытием волновых функций куперовских пар, центрированных на разных островках. При значениях внешнего магнитного поля, близких к нулю, это перекрытие возрастает, приводя к усреднению пространственной модуляции массы куперовских пар и переходу (кроссоверу) к стандартной решётке вихрей Абрикосова. В данной статье мы анализируем особенности данного кроссовера для различных модельных ситуаций и показываем, что он может приводить к положительной кривизне линии $T_c(H)$, позволяя, таким образом, предложить возможное объяснение нетривиальных фазовых диаграмм широкого класса известных сверхпроводящих материалов.

Для достижения намеченной цели мы используем линеаризованную теорию Гинзбурга—Ландау, обобщённую на случай неоднородной массы m . В «грязном» пределе неоднородность массы m является следствием пространственной модуляции коэффициента диффузии D , а критическая температура T_c может быть найдена из уравнения типа

$$\frac{\hbar^2}{2\nu} \hat{\Pi} m^{-1}(\mathbf{r}) \hat{\Pi} \Psi(\mathbf{r}) = \left(1 - \frac{T_c}{T_{c0}}\right) \Psi(\mathbf{r}), \quad (2)$$

где $\nu = \nu(E_F) = m_0 k_F / (\pi^2 \hbar^2)$ — плотность состояний на уровне Ферми E_F , m_0 — эффективная масса квазичастиц, определяемая зонной структурой сверхпроводника (однородная в образце), $\hat{\Pi} = (i\nabla + 2\pi\mathbf{A}/\Phi_0)$, $m^{-1}(\mathbf{r}) = \pi\nu D(\mathbf{r}) / (4\hbar T_{c0})$, \mathbf{A} — векторный потенциал, $\Psi(\mathbf{r})$ — пространственное распределение параметра порядка. В «чистом» пределе неоднородность распределения массы m может возникать в тонкоплёночных поликристаллах с флуктуациями направления локальной оси анизотропии. В этом случае температура T_c определяется из уравнения

$$\left[\frac{\hbar^2}{2\nu} \sum_{i,j=1}^3 \hat{\Pi}_i m_{ij}^{-1}(\mathbf{r}) \hat{\Pi}_j \right] \Psi(\mathbf{r}) = \left(1 - \frac{T_c}{T_{c0}} \right) \Psi(\mathbf{r}). \quad (3)$$

Здесь $\nu = \nu(E_F) = (2E_F)^{1/2} (m_c m_{ab}^2)^{1/2} / (\pi^2 \hbar^3)$ — плотность состояний на уровне Ферми анизотропного материала, m_{ab} и m_c — эффективные массы куперовских пар отдельных кристаллитов для движения в плоскости ab и в перпендикулярном ей направлении соответственно; $m_{ij}^{-1}(\mathbf{r})$ — компоненты тензора обратных эффективных масс куперовских пар в системе координат (x, y, z) , где ось z выбрана вдоль нормали к плёнке поликристалла. Компоненты данного тензора зависят от m_{ab} и m_c , а также от направления локальной оси анизотропии относительно нормали к плоскости поликристалла. Компоненты $m_{ij}^{-1}(\mathbf{r})$ могут быть найдены путём линейного преобразования координат главных осей текущего кристаллита к координатам (x, y, z) :

$$\begin{aligned} m_{xx}^{-1}(\varphi, \theta) &= \frac{\cos^2 \varphi + \cos^2 \theta \sin^2 \varphi}{m_{ab}} + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{m_c}, \\ m_{yy}^{-1}(\varphi, \theta) &= \frac{\sin^2 \varphi + \cos^2 \theta \cos^2 \varphi}{m_{ab}} + \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{m_c}, & m_{zz}^{-1}(\varphi, \theta) &= \frac{\sin^2 \theta}{m_{ab}} + \frac{\cos^2 \theta}{m_c}, \\ m_{xy}^{-1}(\varphi, \theta) &= m_{yx}^{-1}(\varphi, \theta) = \left(\frac{1 - \cos^2 \theta}{2m_{ab}} - \frac{\sin^2 \theta}{2m_c} \right) \sin(2\varphi), \\ m_{zx}^{-1}(\varphi, \theta) &= m_{xz}^{-1}(\varphi, \theta) = \left(-\frac{1}{2m_{ab}} + \frac{1}{2m_c} \right) \sin \varphi \sin(2\theta), \\ m_{yz}^{-1}(\varphi, \theta) &= m_{zy}^{-1}(\varphi, \theta) = \left(\frac{1}{2m_{ab}} - \frac{1}{2m_c} \right) \cos \varphi \sin(2\theta), \end{aligned} \quad (4)$$

где φ — угол между осями x и a , θ — угол между осями c и z . Заметим, что для тонкой плёнки и частного случая $\varphi = 0$ уравнение (3) сводится к двумерному уравнению типа (2) в плоскости (x, y) .

В данной работе мы ограничились анализом модели (2) и рассмотрели две различные задачи: а) эффективная масса куперовских пар является случайной функцией координат и может быть задана автокорреляционной функцией вида

$$A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \propto \exp(-|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 / \ell_c^2), \quad (5)$$

где ℓ_c — определённый масштаб длины; б) масса куперовских пар имеет заданный пространственный профиль. Для обеих задач найдено аналитическое решение в рамках приближённых теоретических подходов — вариационного метода и теории возмущений. При этом задача (б) также решена численно, и соответствующие результаты оказались в хорошем согласии с результатами, найденными аналитически. Таким образом, обнаружены аномальные зависимости $T_c(H)$, на которых происходит формирование кроссовера и области с положительной кривизной линии фазового перехода. Данный результат может быть легко объяснён на простейшем модельном примере системы с одномерным изотропным распределением массы m , которое задаётся пространственной зависимостью коэффициента диффузии D типа

$$D(x) = D_0 - (D_0 - D_m) \exp(-x^2 / \ell_c^2), \quad (6)$$

где D_0 — средний по образцу коэффициент диффузии, а D_m — его минимальное значение. В данном примере форма линии фазового перехода $T_c(H)$ вблизи температуры T_{c0} полностью определяется уравнением (2). Однако её характерные особенности можно проанализировать из

общих соображений в отсутствие точного/приближённого решения уравнения (2). Действительно, коэффициент диффузии D_0 определяет линию фазового перехода $T_c(H)$ при температурах, близких к T_{c0} , которая может быть описана формулой (1), где величина $H_{c2}^{(0)}$ задаётся длиной когерентности ξ_0 в «грязном» пределе: $H_{c2}^{(0)} = 4\hbar\Phi_0 T_{c0}/(\pi^2 D_0)$. При более низких температурах (но в рамках применимости теории Гинзбурга—Ландау) размер сверхпроводящего островка, возникающего вблизи минимума коэффициента диффузии, определяется не средним значением D_0 , а D_m : $\xi_m = \sqrt{\pi D_m/(8\hbar T_{c0})}$. Такое изменение длины когерентности приводит к переключению между двумя зависимостями $T_c(H)$ с разными наклонами. В результате вблизи температуры T_{c0} зависимость $T_c(H)$ обладает положительной кривизной подобно штриховой линии на рис. 1. Температура кроссовера T^* может быть оценена из условия $\ell_c \sim \xi(T^*)$, откуда следует $T^* \sim T_{c0}[1 - (\xi_0/\ell_c)^2]$. При уменьшении пространственного масштаба неоднородности ℓ_c температура кроссовера также уменьшается.

Статья построена следующим образом. В разделе 1 мы анализируем структуру индивидуальных сверхпроводящих зародышей и рассчитываем зависимость $T_c(H)$, используя некоторые детерминированные пространственные профили массы куперовских пар. В разделе 2 мы используем методы теории возмущений для расчёта линии фазового перехода $T_c(H)$ в сверхпроводниках со случайным распределением массы куперовских пар. Основные результаты обсуждаются в разделе 3.

1. ИЗОЛИРОВАННЫЕ СВЕРХПРОВОДЯЩИЕ ЗАРОДЫШИ

В данном разделе мы проведём детальный анализ зависимости $T_c(H)$ для модельного примера системы с одномерным изотропным распределением массы m , которое задаётся пространственной зависимостью коэффициента диффузии D типа (6), и обобщим полученные результаты на случай других распределений массы m , а также двумерного и трёхмерного распределения коэффициента диффузии. Данный анализ основан на использовании метода пробных функций. Согласно этому методу минимальное собственное значение для задачи (2) может быть определено следующим образом:

$$E_0 = \frac{\pi\hbar}{8T_{c0}} \min \frac{\int D(\mathbf{r})\{v^2(\mathbf{r})f^2(\mathbf{r}) + [\nabla f(\mathbf{r})]^2\} d^3\mathbf{r}}{\int f^2(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}}, \quad (7)$$

где $E_0 = 1 - T_c/T_{c0}$, $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \nabla\vartheta(\mathbf{r}) + 2\pi\mathbf{A}/\Phi_0$, $f(\mathbf{r})$ и $\vartheta(\mathbf{r})$ — модуль и фаза параметра порядка $\Psi(\mathbf{r})$ соответственно, $v = |\mathbf{v}|$.

1.1. Одномерное распределение массы куперовских пар

Мы начнём анализ с вычисления зависимости $T_c(H)$ для локализованной сверхпроводимости в случае распределения коэффициента диффузии, зависящего от одной координаты (см. (6)). Выбирая калибровку векторного потенциала в виде $\mathbf{A} = Hx\mathbf{y}_0$, где \mathbf{y}_0 — орт оси y , ищем решение уравнения (2) в виде $\Psi(x, y) = f(x) \exp(ik_y y)$. Рассмотрим следующую пробную функцию $f(x)$:

$$f(x) = \exp(-\alpha_1 x^2/2), \quad (8)$$

где α_1 — вариационный параметр. Подставляя выражения (6) и (8) в уравнение (7), получим, что максимальной критической температуре T_c соответствует условие $k_y = 0$. Таким образом, мы

находим следующее выражение для E_0 :

$$E_0 = \min_{a_1} \left\{ \frac{h^2 + a_1^2}{2a_1} \left[1 - \frac{k-1}{k} \left(\frac{a_1}{a_1 + b} \right)^{3/2} \right] \right\}, \tag{9}$$

где $a_1 = \alpha_1 \xi_0^2$, $b = (\xi_0/\ell_c)^2$, $\xi_0 = \sqrt{\pi \hbar D_0 / (8T_{c0})}$, $k = D_0/D_m > 1$ и $h = 2\pi \xi_0^2 H / \Phi_0$. Выполняя минимизацию по параметру a_1 , мы определяем линию фазового перехода $T_c(H)$. Для проверки результатов, полученных в рамках вариационного подхода, проведено численное решение задачи (2) с использованием нулевых граничных условий для модуля f параметра порядка на концах выбранных интервалов. Результаты аналитического и численного решения уравнения (2) при $D_0/D_m = 20$, $\ell_c = 5\xi_0$, $3\xi_0$ и $2\xi_0$ представлены на рис. 2а сплошными линиями и кружками соответственно.

Теперь рассмотрим другую зависимость $D(x)$:

$$D(x) = D_m + (D_0 - D_m) \frac{x^2}{\ell_c^2 + x^2}, \tag{10}$$

и рассчитаем соответствующие линии фазового перехода. Выбирая такую же калибровку векторного потенциала, рассмотрим пробную функцию $f(x)$ в виде (8). В результате получим следующее выражение для E_0 :

$$E_0 = \min_{a_1} \left\{ \frac{h^2 + a_1^2}{2ka_1} + \frac{(k-1)(h^2 + a_1^2)\sqrt{a_1}}{kb^{3/2}\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^4}{1+t^2} \exp\left(-\frac{a_1}{b}t^2\right) dt \right\}. \tag{11}$$

Проводя минимизацию, найдём зависимость $T_c(H)$, которая оказывается весьма схожей с изображёнными на рис. 2 зависимостями.

1.2. Двумерное распределение массы куперовских пар

В данном разделе мы продолжим расчёты линий фазового перехода для систем с неоднородной массой куперовских пар, предполагая распределение коэффициента диффузии двумерным. Рассмотрим пространственный профиль $D(\mathbf{r})$ следующего вида:

$$D(\rho) = D_0 - (D_0 - D_m) \exp(-\rho^2/\ell_c^2), \tag{12}$$

где ρ — радиальная координата. Используя калибровку векторного потенциала в виде $\mathbf{A} = H\rho\phi_0/2$, где ϕ_0 — орт координаты φ ищем решение уравнения (2) в форме $\Psi(\rho, \phi) = f(\rho) \exp(in\phi)$, где n — целое число. Выбираем пробную функцию

$$f(\rho) = \exp(-\alpha_2 \rho^2/2), \tag{13}$$

где α_2 — вариационный параметр. Подстановка распределений (12) и (13) в уравнение (7) даёт $n = 0$. Вычисляя интегралы, получаем

$$E_0 = \min_{a_2} \left\{ \frac{h^2 + 4a_2^2}{4a_2} \left[1 - \frac{k-1}{k} \left(\frac{a_2}{a_2 + b} \right)^2 \right] \right\}, \tag{14}$$

где $a_2 = \alpha_2 \xi_0^2$. Минимизируя выражение (14), можно найти линию фазового перехода $T_c(H)$. Также проведено численное решение уравнения (2) с использованием следующих граничных условий:

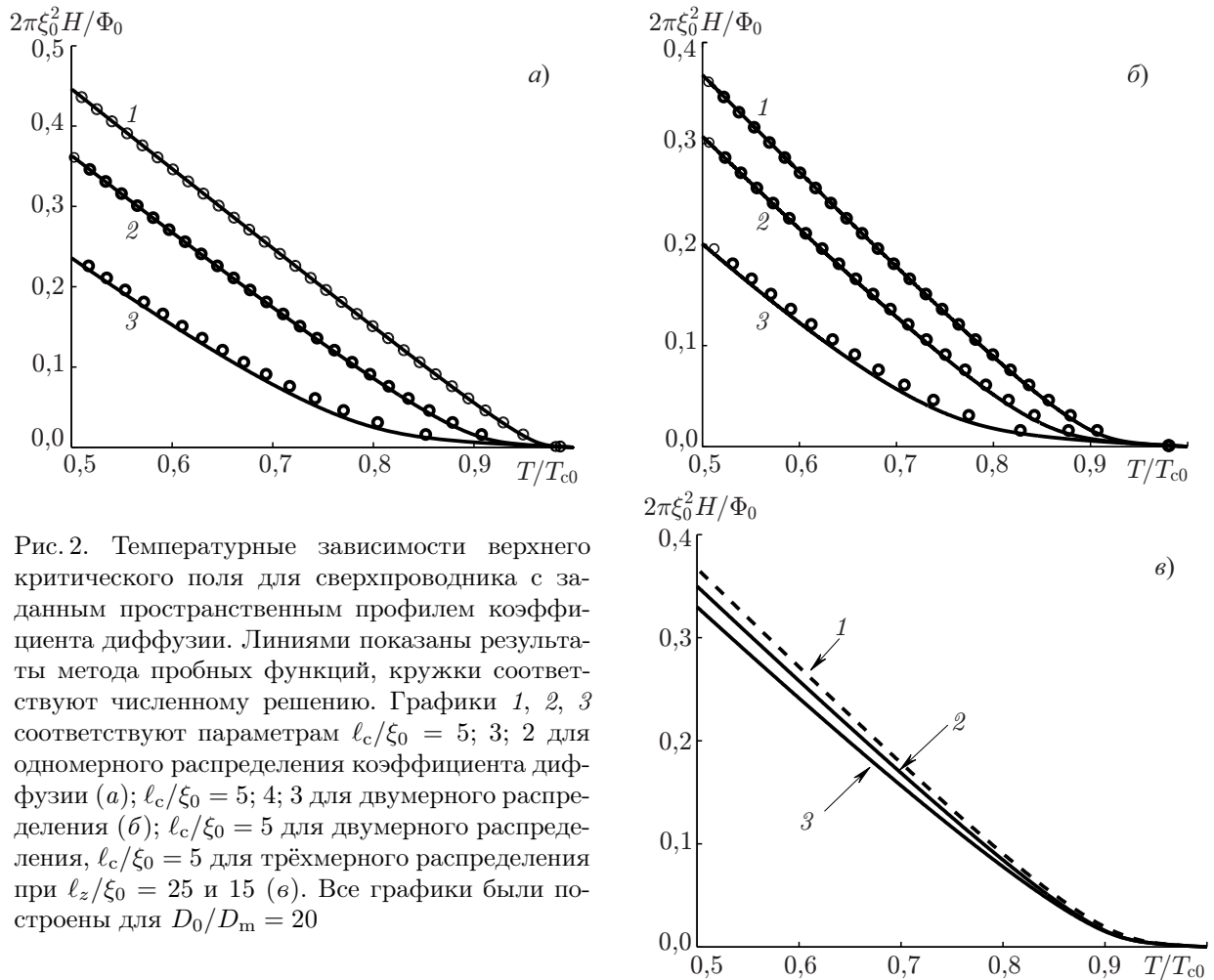


Рис. 2. Температурные зависимости верхнего критического поля для сверхпроводника с заданным пространственным профилем коэффициента диффузии. Линиями показаны результаты метода пробных функций, кружки соответствуют численному решению. Графики 1, 2, 3 соответствуют параметрам $\ell_c/\xi_0 = 5; 3; 2$ для одномерного распределения коэффициента диффузии (а); $\ell_c/\xi_0 = 5; 4; 3$ для двумерного распределения (б); $\ell_c/\xi_0 = 5$ для трёхмерного распределения при $\ell_z/\xi_0 = 25$ и 15 (в). Все графики были построены для $D_0/D_m = 20$

$df/d\rho = 0$ при $\rho = 0$ и $f = 0$ на концах выбранного интервала. Типичные кривые фазового перехода представлены на рис. 2б для $D_0/D_m = 20$, $\ell_c = 5\xi_0, 4\xi_0$ и $3\xi_0$. Сплошные линии соответствуют результатам вариационного расчёта, а кружки — численному решению.

Теперь мы рассчитаем зависимость $T_c(H)$ локализованной сверхпроводимости для иного пространственного профиля $D(\mathbf{r})$:

$$D(\rho) = D_m + (D_0 - D_m) \frac{\rho^2}{\ell_c^2 + \rho^2}. \quad (15)$$

Выбирая калибровку $\mathbf{A} = H\rho\phi_0/2$ и пробную функцию $f(\rho)$ как в выражении (13), мы получили следующее выражение для E_0 :

$$E_0 = \min_{a_2} \left\{ \frac{h^2 + 4a_2^2}{4ka_2} + \frac{(k-1)(h^2 + 4a_2^2)}{(kb^{3/2}/\sqrt{a_2})} \int_0^\infty \frac{t^2}{1+t} \exp\left(-\frac{a_2}{b} t^2\right) dt \right\}, \quad (16)$$

которая позволяет найти кривые $T_c(H)$. Мы не приводим здесь соответствующие линии фазового перехода в силу их схожести с представленными на рис. 2 зависимостями, рассчитанными для модельного профиля (12).

1.3. Трёхмерное распределение массы куперовских пар

Наконец, мы рассмотрим трёхмерный пространственный профиль $D(\mathbf{r})$, который задаётся функцией

$$D(\mathbf{r}) = D_0 - (D_0 - D_m) \exp(-\rho^2/\ell_c^2 - z^2/\ell_z^2). \quad (17)$$

При условии $\ell_z \gg \ell_c$ можно искать решение уравнения (2) в виде $\Psi(\mathbf{r}) = \bar{A}(z) \exp[-\alpha(z)\rho^2/2]$, где зависимость $\bar{A}(z)$ при больших z устроена следующим образом: $\bar{A}(z) \propto \exp(-|z|)$. Таким образом, выберем пробную функцию в виде

$$f(\mathbf{r}) = \exp(-\alpha\rho^2/2) \exp(-\gamma\sqrt{\zeta^2 + z^2}/2), \quad (18)$$

где α , γ и ζ — вариационные параметры. Подставляя (18) в уравнение (2), находим E_0 :

$$E_0 = \min_{a, \tilde{\gamma}, \tilde{\zeta}} \left\{ a + \frac{h^2}{4a} + \frac{I_2}{I_1} - \frac{k-1}{kI_1} \left[\frac{(a^3 + h^2a/4)I_3}{(a+b)^2} + \frac{aI_4}{a+b} \right] \right\}, \quad (19)$$

где $a = \alpha\xi_0^2$,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\tilde{\gamma}\sqrt{\tilde{\zeta}^2 + t^2}) dt, & I_2 &= \frac{\tilde{\gamma}^2}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{\tilde{\zeta}^2 + t^2} \exp(-\tilde{\gamma}\sqrt{\tilde{\zeta}^2 + t^2}) dt, \\ I_3 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2/\tilde{\ell}_z^2 - \tilde{\gamma}\sqrt{\tilde{\zeta}^2 + t^2}) dt, & I_4 &= \frac{\tilde{\gamma}^2}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{\tilde{\zeta}^2 + t^2} \exp(-t^2/\tilde{\ell}_z^2 - \tilde{\gamma}\sqrt{\tilde{\zeta}^2 + t^2}) dt, \end{aligned} \quad (20)$$

$\tilde{\zeta} = \zeta/\xi_0$, $\tilde{\gamma} = \gamma\xi_0$ и $\tilde{\ell}_z = \ell_z/\xi_0$. Проводя минимизацию, можно найти линии фазового перехода. Они представлены на рис. 2в при $D_0/D_m = 20$, $\ell_c = 3\xi_0$, $\ell_z = 15\xi_0$ и $25\xi_0$. Очевидно, что при постепенном увеличении масштаба ℓ_z линия $T_c(H)$ стремится к линии фазового перехода, полученной в разделе 1.2 для двумерного распределения коэффициента диффузии при том же значении ℓ_c , а в пределе $\ell_z \rightarrow \infty$ — в точности совпадает с ней.

2. СИСТЕМЫ СО СЛУЧАЙНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ МАССЫ КУПЕРОВСКИХ ПАР

В данном разделе мы изучим влияние неоднородной эффективной массы куперовских пар на зарождение локализованной сверхпроводимости и линию $T_c(H)$ в случае, когда пространственная модуляция $m(\mathbf{r})$ является случайной. Ниже будет показано, что, как и в случае детерминированной зависимости $m(\mathbf{r})$, линии фазового перехода $T_c(H)$ оказываются выпуклыми вверх вблизи температуры T_{c0} .

Рассмотрим гауссово случайное распределение коэффициента диффузии $D(\mathbf{r})$, которое можно представить в виде

$$D(\mathbf{r}) = \langle D \rangle + \delta D(\mathbf{r}), \quad (21)$$

где угловые скобки означают среднее по ансамблю распределения примесей в образце, $\delta D(\mathbf{r})$ — случайная часть коэффициента диффузии, определяющаяся автокорреляционной функцией с заданным масштабом корреляции ℓ_c :

$$\langle \delta D(\mathbf{r}) \delta D(\mathbf{r}') \rangle = \langle D \rangle^2 (d/\ell_c)^\delta \exp(-|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2/\ell_c^2), \quad (22)$$

δ — размерность \mathbf{r} -пространства. Аналогично работе [40], мы ввели здесь феноменологическую константу d , которая связана со свойствами пиннинга сверхпроводника и может быть независимо определена из экспериментов. Перепишем уравнение (2) в виде

$$\frac{\pi\hbar}{8T_{c0}} \langle D \rangle \hat{\Pi}^2 \Psi(\mathbf{r}) + \frac{\pi\hbar}{8T_{c0}} \hat{\Pi} \delta D(\mathbf{r}) \hat{\Pi} \Psi(\mathbf{r}) = E_0 \Psi(\mathbf{r}). \quad (23)$$

Заметим, что в пространственно-однородном пределе, когда $D = \langle D \rangle$, мы имеем стандартное выражение для линии фазового перехода, которое может быть описано формулой (1).

Для анализа экспериментальных зависимостей $R(T)$ сопротивления от температуры может оказаться недостаточным вычислить среднюю величину $\langle E_0 \rangle = 8(T_{c0} - \langle T_c \rangle)/(\pi\hbar)$, т. к. наблюдаемая критическая температура, соответствующая началу падения сопротивления при уменьшении температуры, должна определяться сверхпроводящими зародышами с максимальной критической температурой. Такая ситуация возникает, например, при определении критической температуры по положению так называемого онсета на зависимости $R(T)$, т. е. по уровню сопротивления $R(T) = 0,9R_N$, где R_N — это сопротивление в нормальном состоянии (см., например, [37]). Соответствующая критическая температура T_c^{onset} определяется не только средней величиной $\langle T_c \rangle$, но и среднеквадратичным отклонением $\delta T_c = \sqrt{\langle (T_c - \langle T_c \rangle)^2 \rangle}$. Строго говоря, разброс критических температур можно характеризовать двумя условными границами: $\langle T_c \rangle + \delta T_c$ и $\langle T_c \rangle - \delta T_c$. Однако, выбирая максимальную критическую температуру для оценки температуры онсета, мы должны воспользоваться следующим выражением:

$$T_c^{\text{onset}} \sim \langle T_c \rangle + \sqrt{\langle (T_c - \langle T_c \rangle)^2 \rangle}.$$

Наблюдение образования сверхпроводящих зародышей на нижней границе $\langle T_c \rangle - \delta T_c$ затруднено, т. к. оно происходит в условиях существенно развитой сверхпроводимости и не может быть описано в рамках линеаризованного уравнения Гинзбурга—Ландау.

Запишем уравнения (23) и (22) в безразмерных переменных (\mathbf{r} заменим на $\mathbf{r}L_H$, $\hat{\Pi}$ — на $\hat{\Pi}/L_H$, где $L_H = \sqrt{\Phi_0/(2\pi H)}$ — магнитная длина):

$$\hat{\Pi}^2 \Psi(\mathbf{r}) + \left(\frac{d}{L_H} \right)^{\delta/2} \hat{\Pi} \delta \tilde{D}(\mathbf{r}) \hat{\Pi} \Psi(\mathbf{r}) = \left(\frac{E_0 L_H^2}{\xi_0^2} \right) \Psi(\mathbf{r}),$$

$$\langle \delta \tilde{D}(\mathbf{r}) \delta \tilde{D}(\mathbf{r}') \rangle = \pi^{\delta/2} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (24)$$

где $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ — дельта-функция Дирака, $\xi_0 = \sqrt{\pi\hbar\langle D \rangle/(8T_{c0})}$ и $\delta \tilde{D} = (L_H/d)^{\delta/2} \delta D/\langle D \rangle$. Здесь мы рассмотрели предел нулевой длины корреляции ℓ_c , которая поэтому не вошла в приведённые выше выражения. Минимальное собственное значение для задачи (24) может быть записано в виде

$$\frac{L_H^2}{\xi_0^2} \min E_0 = F \left[\left(\frac{d}{L_H} \right)^{\delta/2} \right]. \quad (25)$$

Здесь $F[(d/L_H)^{\delta/2}]$ — случайная функция, зависящая от единственного безразмерного параметра $(d/L_H)^{\delta/2}$. Для анализа фазовой диаграммы сверхпроводника со случайным распределением $D(\mathbf{r})$ вблизи температуры T_{c0} (т. е. при малых H и $L_H \rightarrow \infty$) достаточно учитывать несколько первых членов разложения функции F по малому параметру $(d/L_H)^{\delta/2}$. В таком случае справедливо следующее выражение для $\min E_0$:

$$\frac{L_H^2}{\xi_0^2} \min E_0 = F^{(0)} + F^{(1)} \left(\frac{d}{L_H} \right)^{\delta/2} + F^{(2)} \left(\frac{d}{L_H} \right)^{\delta} + \dots, \quad (26)$$

где коэффициенты разложения $F^{(i)}$ — случайные числа, зависящие от конкретной реализации распределения $D(\mathbf{r})$. В силу условия $\langle \delta D \rangle = 0$ мы получаем $\langle F^{(1)} \rangle = 0$. Рассмотрим ряд теории возмущений для энергии $\min E_0 = E_0^{(0)} + E_0^{(1)} + E_0^{(2)} + \dots$, где величина $E_0^{(i)}$ соответствует i -му порядку теории возмущений по флуктуациям коэффициента D . Считая, что $\langle F^{(2)} \rangle \sim 1$ и $\langle [F^{(1)}]^2 \rangle \sim 1$, мы получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} \langle E_0^{(2)} \rangle &\sim \xi_0^2 \frac{d^\delta}{L_H^{2+\delta}} \sim \frac{\hbar \langle D \rangle}{T_{c0}} \frac{d^\delta}{L_H^{2+\delta}} \propto H^{1+\delta/2}, \\ \sqrt{\langle [E_0^{(1)}]^2 \rangle} &\sim \xi_0^2 \frac{d^{\delta/2}}{L_H^{2+\delta/2}} \sim \frac{\hbar \langle D \rangle}{T_{c0}} \frac{d^{\delta/2}}{L_H^{2+\delta/2}} \propto H^{1+\delta/4}. \end{aligned} \quad (27)$$

Таким образом, вблизи критической температуры T_{c0} (в асимптотике малых H) среднее от второй поправки к энергии (и, следовательно, к критической температуре онсета) оказывается малым по сравнению с среднеквадратичным отклонением. Итоговое выражение для температуры T_c^{onset} принимает вид

$$T_c^{\text{onset}} - T_{c0} \sim T_{c0} \xi_0^2 d^{\delta/2} (H/\Phi_0)^{1+\delta/4}, \quad (28)$$

из которого следует, что линия фазового перехода, измеренная по положению онсета на температурной зависимости сопротивления, может обладать положительной кривизной вблизи температуры T_{c0} . Приведённые выше соображения, основанные на теории подобия, безусловно оказываются несправедливыми для конечных величин ℓ_c , сравнимых с L_H . Однако вблизи температуры T_{c0} мы имеем $L_H \rightarrow \infty$ и полученные оценки верны.

Полезно подтвердить проведённый выше общий анализ явными вычислениями на основе теории возмущений для одномерного распределения флуктуирующего коэффициента диффузии, т.к. в этом случае их можно провести для произвольного отношения ℓ_c/L_H . Предполагая отклонения коэффициента диффузии от среднего значения $\langle D \rangle$ малыми, можно рассматривать оператор $\hat{\Pi} \delta D(\mathbf{r}) \hat{\Pi}$ как оператор возмущения. Очевидно, что волновая функция нулевого приближения имеет вид

$$\Psi_0(x, y) = \exp[-(x - x_0)^2/(2L_H^2) + ik_y y], \quad (29)$$

т.е. это собственная функция нижнего уровня гармонического осциллятора. Ниже мы представим результат нашего расчёта для поправки к нижнему уровню осциллятора:

$$E_0^{(1)} = \frac{2}{\sqrt{\pi} L_H^5} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \delta D(x + x_0) \exp(-x^2/L_H^2) dx. \quad (30)$$

Таким образом, среднеквадратичное отклонение от линии (1) равно

$$\sqrt{\langle [E_0^{(1)}]^2 \rangle} = \frac{8T_{c0}}{\pi \hbar} \frac{[\tilde{d}(k^4 + 2k^2 + 3)]^{1/2}}{(2 + k^2)^{5/4}} h^{5/4}, \quad (31)$$

где $\tilde{d} = d/\xi_0$, $k = \ell_c/L_H$, $h = 2\pi \xi_0^2 H/\Phi_0$. Типичная зависимость $T_c^{\text{onset}}(H)$, найденная из уравнения

$$1 - \frac{T_c^{\text{onset}}}{T_{c0}} = \frac{2\pi \xi_0^2 H}{\Phi_0} - \sqrt{\langle [E_0^{(1)}]^2 \rangle}, \quad (32)$$

представлена на рис. 3 сплошной линией для $d = \xi_0$ и $\ell_c = \xi_0$ (в одномерном случае). Для сравнения с этой кривой мы также представили на данном рисунке зависимость (1), которая изображена штриховой линией. В пределе $k \rightarrow 0$ выражение для поправки (31) имеет вид

$$\sqrt{\langle [E_0^{(1)}]^2 \rangle} = \frac{\sqrt{3}}{2^{5/4}} \sqrt{\frac{d}{\xi_0}} h^{5/4}, \quad (33)$$

который находится в согласии с приведёнными выше размерными оценками.

Построение прямой теории возмущений для неоднородного распределения коэффициента D , зависящего от двух координат, оказывается весьма затруднительным, т. к. становится существенным взаимодействие волновых функций нулевого приближения, соответствующих нижнему уровню Ландау. В пределе $L_H \gg \ell_c$ мы можем, безусловно, пользоваться приведёнными выше оценками (27), а ситуация при $L_H \sim \ell_c$ требует отдельного рассмотрения.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе мы изучили особенности зарождения локализованной сверхпроводимости в системах с неоднородной массой куперовских пар $m(\mathbf{r})$ в заданном магнитном поле. При постепенном увеличении магнитного поля возникает конкуренция между различными сверхпроводящими состояниями, приводящая к положительной кривизне линии $T_c(H)$ в диапазоне температур $|T - T_{c0}| \ll T_{c0}$. Данная конкуренция является следствием перехода регулярной решётки вихрей Абрикосова к состоянию с заданными/случайными числом и положением сверхпроводящих островков. Необычные фазовые диаграммы на плоскости $H - T$ рассчитаны как для детерминированных пространственных профилей массы куперовских пар, так и для случайных, описываемых заданной автокорреляционной функцией. В работе показано, что в обоих случаях увеличение размерности координатной зависимости $m(\mathbf{r})$ приводит к уменьшению верхнего критического поля при заданной температуре T , как это можно видеть из рис. 2 и 3. Мы предполагаем, что соответствующие зависимости $T_c(H)$ могут быть получены экспериментально в результате прямых резистивных измерений на неупорядоченных сверхпроводящих образцах, а также поликристаллических материалов с флуктуациями направления локальной оси анизотропии.

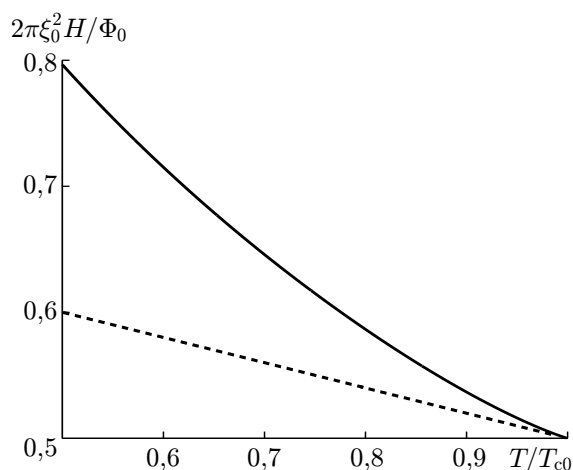


Рис. 3. Типичная зависимость $T_c^{\text{onset}}(H)$ для сверхпроводника со случайным распределением коэффициента диффузии, описываемого автокорреляционной функцией (22) при $\delta = 1$, для $d = \xi_0$ и $\ell_c = \xi_0$, $\xi_0 = \sqrt{\pi \hbar \langle D \rangle / (8 T_{c0})}$ (сплошная линия) и зависимость (1) (штриховая линия)

Авторы благодарят С. В. Шарова, В. В. Курина, А. В. Самохвалова, Д. А. Рыжова за стимулирующие обсуждения. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (ААК, ДАС), а также Российского научного фонда (АСМ, грант 15-12-10020).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абрикосов А. А. Основы теории металлов. М.: Наука, 1987. 520 с.
2. Saint-James D., Gennes de P. G. // Phys. Lett. 1963. V. 7. P. 306.
3. Миненко Е. В., Кулик И. О. // Физика низких температур. 1979. Т. 5, № 11. С. 1 237.
4. Hauser J. R., Wang J. S.-Y., Kittel C. // Phys. Lett. 1974. V. 47A. P. 34.
5. Овчинников Ю. Н. // ЖЭТФ. 1980. Т. 79, № 4. С. 1 496.
6. Рудько В. И., Сугаков В. И. // Физика низких температур. 1983. Т. 9, № 4. С. 440.
7. Хлюстиков И. Н., Буздин А. И. // Успехи физ. наук. 1988. Т. 155, № 1. С. 47.
8. Копаев Ю. В. // Физика твёрдого тела. 1965. № 7. С. 2 907.
9. Буздин А. И., Булаевский Л. Н., Панюков С. В. // ЖЭТФ. 1984. Т. 87, № 1. С. 299.
10. Buzdin A. I., Mel'nikov A. S. // Phys. Rev. B. 2003. V. 67. Art. no. 020503(R).
11. Aladyshkin A. Yu., Buzdin A. I., Fraerman A. A., et al. // Phys. Rev. B. 2003 V. 68. Art. no. 184508.
12. Rusanov A. Yu., Hesselberth M., Aarts J., Buzdin A. I. // Phys. Rev. Lett. 2004. V. 93. Art. no. 057002.
13. Yang Z., Lange M., Volodin A., et al. // Nat. Mater. 2004. V. 3. P. 793.
14. Aladyshkin A. Yu., Mel'nikov A. S., Nefedov I. M., et al. // Phys. Rev. B. 2012. V. 85. Art. no. 184528.
15. Houghton A., McLean F. B. // Phys. Lett. 1965. V. 19. P. 172.
16. van Gelder A. P. // Phys. Rev. Lett. 1968. V. 20. P. 1 435.
17. Симонов А. Ю., Мельников А. С., Шаров С. В. // Физика низких температур. 1989. Т. 15, № 11. С. 1 206.
18. Fomin V. M., Devreese J. T., Moshchalkov V. V. // Europhys. Lett. 1998. V. 42. P. 553.
19. Brosense F., Fomin V. M., Devreese J. T., Moshchalkov V. V. // Solid State Communications. 2007. V. 144. P. 494.
20. Klimin S. N., Fomin V. M., Devreese J. T., Moshchalkov V. V. // Solid State Communications. 1999. V. 111. P. 589.
21. Schweigert V. A., Peeters F. M. // Phys. Rev. B. 1999. V. 60. P. 3 084.
22. Bonnaillie-Noel V. // Comptes Rendus Mathematique. 2003. V. 336. P. 135.
23. Bonnaillie-Noel V. // Asymptotic Anal. 2005. V. 41. P. 215.
24. Bonnaillie-Noel V., Dauge M. // Ann. H. Poincare 2006. V. 7. P. 899.
25. Helfand E., Werthamer N. R. // Phys. Rev. Lett. 1964. V. 13. P. 686.
26. Helfand E., Werthamer N. R. // Phys. Rev. 1966. V. 147. P. 288.
27. Osofsky M. S., Soulen R. J., Wolf S. A., et al. // Phys. Rev. Lett. 1993. V. 71. P. 2 315.
28. Gurevich A., Patnaik S., Braccini V., et al. // Supercond. Sci. Technol. 2004. V. 17. P. 278.
29. Braccini V., Gurevich A., Giencke J. E., et al. // Phys. Rev. B. 2005. V. 71. Art. no. 012504.
30. Hunte F., Jaroszynski J., Gurevich A., et al. // Nature. 2008. V. 453. P. 903.
31. Jaroszynski J., Hunte F., Balicas L., et al. // Phys. Rev. B. 2008. V. 78. Art. no. 174523.
32. Lee H. S., Bartkowiak M., Park J. H., et al. // Phys. Rev. B. 2009. V. 80. Art. no. 144512.
33. Bulaevskii L. N., Sadvovskii M. V. // J. Low Temperature Physics. 1985. V. 59. P. 89.
34. Kotliar G., Kapitulnik A. // Phys. Rev. B. 1986. V. 33. P. 3 146.
35. Takahashi S., Tachiki M. // Phys. Rev. B. 1986. V. 33. P. 4 620.
36. Иоффе Л. Б., Ларкин А. И. // ЖЭТФ. 1981. Т. 81, № 2. С. 707.
37. Zwicknagl G. E., Wilkins J. W. // Phys. Rev. Lett. 1984. V. 53. P. 1 276.
38. Thuneberg E. V. // J. Low Temperature Physics. 1986. V. 62. P. 27.
39. Spivak B., Zhou Fei // Phys. Rev. Lett. 1995. V. 74. P. 2 800.

40. Galitski V. M., Larkin A. I. // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 87. Art. no. 087001.

Поступила в редакцию 6 июля 2016 г.; принята в печать 3 октября 2016 г.

LOCALIZED SUPERCONDUCTIVITY IN SYSTEMS WITH INHOMOGENEOUS MASS OF COOPER PAIRS

A. A. Kopasov, D. A. Savinov, and A. S. Mel'nikov

Within the framework of the Ginzburg–Landau theorem, we study the features of the localized nucleation of the order parameter in superconducting systems with inhomogeneous effective mass m of the Cooper pairs, which is due to the spatial modulation of the diffusion coefficient and/or fluctuations in the local anisotropy axis in the sample. In the asymptotic of the weak magnetic fields H , for which the magnetic length $[\Phi_0/(2\pi H)]^{1/2}$, where Φ_0 is the magnetic flux quantum, is much shorter than the inhomogeneity scale of the order parameter, is determined by the sample-average coherence length and the regular lattice of the Abrikosov vortices is formed in the superconductor. In sufficiently strong magnetic fields H , the order parameter is localized near the coherence-length minima $\xi \propto m^{-1/2}$, which results in an increase in the critical temperature and destruction of the regular lattice of the Abrikosov vortices. Therefore, competition between the two superconductivity-nucleation types is observed during a gradual increase in the magnetic field, which leads to the positive curvature of the phase-transition line. We have also studied the features of the temperature dependences of the upper critical magnetic field for some model spatial mass profiles of the Cooper pairs. The obtained results are in good agreement with direct numerical calculations.