

УДК 551.510+533.9

## СВЯЗЬ МЕЖДУ ПАРАМЕТРАМИ ЛИНЕЙНОЙ И НЕЛИНЕЙНОЙ СТАДИЙ ГЕНЕРАЦИИ ВОЛН В МАГНИТОСФЕРНОМ ЦИКЛОТРОННОМ МАЗЕРЕ В РЕЖИМЕ ЛАМПЫ ОБРАТНОЙ ВОЛНЫ

А. Г. Демехов<sup>1,2\*</sup>

<sup>1</sup> Полярный геофизический институт, г. Апатиты;

<sup>2</sup> Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород, Россия

Некоторые соотношения между параметрами квазимонохроматических свистовых волн, генерируемых на линейной и нелинейной стадиях циклотронной неустойчивости в режиме лампы обратной волны, с помощью численных расчётов обобщены на случай неоднородной среды. В частности, проанализировано соотношение между амплитудой волны на нелинейной стадии и линейным инкрементом циклотронной неустойчивости, полученное ранее аналитически В. Ю. Трахтенгерцем для однородной среды в предположении постоянной частоты и амплитуды генерируемой волны. На основе уточнённого выражения для линейного инкремента абсолютной циклотронной неустойчивости в неоднородной среде показано, что аналогичное соотношение имеет место и для сигналов, генерируемых в неоднородном магнитном поле и обладающих дискретной структурой в виде коротких волновых пакетов (элементов) с быстрым дрейфом частоты внутри каждого элемента. Проанализировано соотношение между скоростью изменения частоты в дискретных элементах и амплитудами волн. Данные соотношения важны для анализа связи между параметрами хоровых излучений в магнитосферах Земли и планет и характеристиками генерирующих эти сигналы энергичных частиц.

### ВВЕДЕНИЕ

Одним из широко известных видов электромагнитных сигналов в магнитосфере Земли являются хоровые излучения [1–4] — короткие (с длительностью  $\tau \sim 0,1 \div 0,2$  с) дискретные сигналы с частотами  $f \sim 3 \cdot 10^2 \div 10^4$  Гц (диапазон крайне низких и очень низких частот, КНЧ–ОНЧ). Эти сигналы характеризуются быстрым дрейфом частоты ( $|df/dt| \sim 10^4$  с<sup>-1</sup>) и имеют достаточно узкую частотную полосу в каждый момент времени.

Основные особенности хоровых ОНЧ излучений (хоров) могут быть объяснены в рамках модели, предложенной в работах [5, 6] и основанной на переходе циклотронной неустойчивости в режим лампы обратной волны (ЛОВ). Примеры численных расчётов в рамках этой модели даны в работах [7, 8]; сопоставление модельных оценок различных параметров хоровых излучений с результатами наблюдений проведено, в частности, в работах [3, 9–11]. Отметим, что режим ЛОВ в условиях, характерных для генерации хоров в магнитосфере Земли, имеет два важных отличия от режима работы лабораторных приборов типа гиро-ЛОВ. Во-первых, распределение энергичных частиц по скоростям здесь имеет вид перепада («ступеньки») на функции распределения по скоростям вдоль внешнего магнитного поля, а не пучка с малым разбросом скоростей. В дальнейшем для краткости будем называть такую систему С-ЛОВ. Во-вторых, генерация происходит в неоднородной среде, и, как показано в работе [7], это обстоятельство имеет принципиальное значение для формирования дискретных элементов с дрейфом частоты.

Для аналитической оценки параметров нелинейной стадии генерации хоров на основе данной модели одним из ключевых является соотношение между амплитудой волны на нелинейной стадии и линейным инкрементом циклотронной неустойчивости. Такое соотношение получено в работе [12] для случая нелинейного насыщения квазимонохроматической волны с постоянной

\* andrei@appl.sci-nnov.ru

частотой при циклотронной неустойчивости в однородной среде. Вводя численный коэффициент  $\delta_{\text{sat}}$ , равный 1 для случая однородной среды, это соотношение можно записать в виде

$$\Omega_{\text{tr}} \approx \delta_{\text{sat}} 32\gamma / (3\pi). \quad (1)$$

Здесь  $\gamma$  — линейный инкремент неустойчивости,  $\Omega_{\text{tr}} = [ekv_{\perp} B_{\sim} / (mc)]^{1/2}$  — частота осциллирующей скорости частиц в поле волны с волновым числом  $k$  и амплитудой  $B_{\sim}$ ,  $v_{\perp}$  — поперечная скорость частиц по отношению к внешнему магнитному полю  $\mathbf{B}$ ,  $e$  и  $m$  — элементарный заряд и масса электрона соответственно,  $c$  — скорость света в вакууме.

Вместе с тем, как уже отмечалось, хоровые излучения формируются в неоднородном магнитном поле и характеризуются нестационарностью амплитуды и частоты. Очевидно, что приведенное выше соотношение (1) нуждается в уточнении и обобщении на случай нестационарного сигнала. Данная работа посвящена этой задаче, а также уточнению выражений для линейного инкремента неустойчивости и для связи скорости дрейфа частоты с амплитудой волны. Указанные задачи решаются численно на основе упрощенной математической модели режима ЛОВ, представленной в работе [13] для случая малого коэффициента полезного действия (КПД) взаимодействия волн и частиц. Состоятельность указанной модели, т. е. её способность воспроизвести сигналы с параметрами, близкими к наблюдаемым хоровым излучениям, продемонстрирована в работах [7, 8].

## 1. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Приведём вначале использованную в расчётах упрощенную систему нелинейных уравнений С-ЛОВ для случая малого КПД взаимодействия волн и частиц, выведенную в работе [13] и описывающую в нерелятивистском приближении резонансное взаимодействие энергичных электронов с квазимонохроматической необыкновенной (правополяризованной) волной с частотой  $\omega$  и волновым вектором  $\mathbf{k}$ , распространяющейся вдоль внешнего магнитного поля ( $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}$ ). В соответствии со сказанным выше предполагается, что начальная функция распределения электронов  $F_0$  имеет достаточно резкий перепад («ступеньку») по продольным скоростям  $v_{\parallel L}$  (индекс  $L$  здесь и далее обозначает величины в центральном сечении ловушки):

$$F_0 = N_h \left[ 1 - s + s\Theta(V_*^2 - v_{\parallel L}^2) \right] \mathcal{F}(v_{\parallel L}, I), \quad (2)$$

где  $|v_{\parallel L}| = (v^2 - IB_L)^{1/2}$ ,  $v$  — модуль скорости,  $I = v_{\perp}^2 / B$  — первый адиабатический инвариант,  $N_h$  — концентрация энергичных электронов,  $\Theta(x)$  — единичная функция,  $\mathcal{F}(v_{\parallel L}, I)$  — плавная часть функции распределения, параметр  $s$  характеризует относительную высоту ступеньки,  $V_* > 0$  — модуль продольной скорости, соответствующей «ступеньке». Исходные уравнения имеют вид

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} + u_g \frac{\partial \epsilon}{\partial \zeta} = -j, \quad (3a)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} - u_* \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} = -\frac{q}{\pi} a \cos \psi, \quad (3б)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - u_* \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} = -\delta + \frac{V_*^2}{v_{\perp*}^2} \frac{\omega t_{\text{ЛОВ}}}{k_L^2 l_{\text{ЛОВ}}^2} \left( 1 - \frac{kv_{\parallel}}{\omega} \right) a \sin \psi, \quad (3в)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - u_* \frac{\partial u}{\partial \zeta} = -(k_L l_{\text{ЛОВ}})^{-1} a \cos \psi. \quad (3г)$$

Здесь  $\epsilon = a \exp(i\vartheta) = E/A_1$  — нормированная на  $A_1$  медленно меняющаяся комплексная амплитуда электрического поля волны,  $u_g = v_g/V_*$ ,  $v_g$  — групповая скорость волны,

$$j = \int \Phi \exp(i\varphi) d\varphi_0 \quad (3д)$$

— нормированный резонансный ток,  $\Phi = \tilde{\Phi}/\Phi_1$  — нормированное проинтегрированное по начальным продольным и поперечным скоростям отклонение функции распределения  $F$  от начальной  $F_0$ ,

$$\tilde{\Phi} = \int (F - F_0) v_{\perp L_0} dv_{\perp L_0} dv_{\parallel L_0},$$

$\varphi(\varphi_0, \zeta, \tau)$  и  $\varphi_0$  — текущее и начальное значения фазы гировращения частицы относительно фазы «холодной» волны  $\vartheta_c = \omega t - \int k dz$ ,  $\psi = \varphi - \vartheta$ ,  $u = (v_{\parallel L} + V_*)/V_*$  — нормированное отклонение экваториальной продольной скорости от скорости «ступеньки»,  $u_* = \{1 + (v_{\perp*}^2/V_*^2) [1 - B(\zeta)/B_L]\}^{1/2}$  — нормированная величина продольной скорости в точке  $\zeta$ , соответствующая «ступеньке»,  $v_{\perp*}$  — характерная величина поперечной скорости электронов,

$$q = \frac{2\pi^2 e^2}{mc^2} v_g t_{\text{ЛОВ}}^2 s N_h \int v_{\perp}^2 \mathcal{F}|_{v_{\parallel L} = -V_*} v_{\perp L} dv_{\perp L} \quad (4)$$

— безразмерный параметр взаимодействия,  $\delta = \Delta t_{\text{ЛОВ}}$ ,  $\Delta = \omega - \omega_B - kv_{\parallel}$  — частотная расстройка,  $\omega_B$  — гирочастота электронов,  $\zeta = z/l_{\text{ЛОВ}}$ ,  $z$  — координата вдоль магнитного поля,  $\tau = t/t_{\text{ЛОВ}}$ ,  $l_{\text{ЛОВ}}$  и  $t_{\text{ЛОВ}} = l_{\text{ЛОВ}}/V_*$  — масштабы длины и времени. Для обезразмеривания введены следующие характерные величины амплитуды волны  $A_1$  и функции распределения по начальным фазам  $\Phi_1$ :

$$A_1 = \frac{mV_*^2}{e v_{\perp*}} \frac{\omega}{k_L^2 l_{\text{ЛОВ}}^2}, \quad \Phi_1 = -\frac{A_1 k_L c^2}{2\pi v_g \omega t_{\text{ЛОВ}}}. \quad (5)$$

В качестве  $l_{\text{ЛОВ}}$  выберем характерный масштаб изменения безразмерной расстройки  $\delta$  за счёт только слагаемого  $\omega_B(z)$ . Для параболического профиля  $B(z)$  этот масштаб даётся формулой

$$l_{\text{ЛОВ}} = (a_B^2 V_*/\omega_{BL})^{1/3} \sim a(ka)^{-1/3}. \quad (6)$$

В этом случае с учётом зависимостей  $v_{\parallel}(z)$  и  $k(z)$ , соответствующих дисперсионному уравнению для свистовых волн, в приближении  $z/a_B \ll 1$  и предположении, что  $N_c(z) \propto B(z)$  (здесь  $N_c(z)$  — концентрация холодной плазмы, определяющей дисперсию волн) и  $\Delta_L = 0$ , имеем

$$\delta(\zeta) \approx -(\zeta/\alpha)^2, \quad \alpha^{-2} = [1 + \tilde{\omega}/2 + \text{tg}^2 \theta_L (1 - \tilde{\omega})], \quad (7)$$

где  $\tilde{\omega} = \omega/\omega_{BL}$ ,  $\text{tg} \theta = v_{\perp}/|v_{\parallel}|$  — питч-фактор электронов.

Для дальнейшего сопоставления аналитических и численных результатов более удобными оказываются другие единицы длины и времени:

$$\tilde{l}_{\text{ЛОВ}} = \alpha^{2/3} l_{\text{ЛОВ}}, \quad \tilde{t}_{\text{ЛОВ}} = \tilde{l}_{\text{ЛОВ}}/V_*. \quad (8)$$

В этих единицах безразмерная расстройка  $\Delta \tilde{t}_{\text{ЛОВ}} = -(z/\tilde{l}_{\text{ЛОВ}})^2$ .

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЁТОВ

Аналогично [7, 13] граничное условие для нормированной амплитуды  $\epsilon$  задавалось в виде

$$\epsilon(\zeta = -\zeta_m) = \epsilon_0 \exp[-(t/\tau_{in})^n] \quad (9)$$

с достаточно малой величиной  $\epsilon_0 < 10^{-5}$  и  $n = 4$ , так что входная амплитуда волны обращается практически в нуль за время  $\tau \sim 2\tau_{in}$ . Начальные условия для  $\epsilon$  выбраны в виде

$$\epsilon(t = 0, \zeta) = \epsilon_0. \quad (10)$$

Время убывания входной амплитуды  $\tau_{in} = 4$  в  $3 \div 5$  раз меньше времени распространения волны по расчётной области.

Длина расчётной области  $\zeta \in [-\zeta_m; \zeta_m]$  выбиралась исходя из неравенства  $l \gg l_{ЛОВ}$ , т.е.  $\zeta_m \gg 1$ . В вычислениях, результаты которых представлены ниже, полагается  $\zeta_m = 7$ . Проверка показала, что увеличение  $\zeta_m$ , изменение числа узлов сетки по  $\zeta$  и численные отражения волн от границ расчётной области не оказывает влияние на результаты.

Для частиц на входе в область взаимодействия (расчёта) использовались граничные условия, отвечающие равномерному распределению по фазам и нулевому возмущению  $\Phi$  функции распределения электронов:

$$\Phi_{in} \equiv \Phi(\zeta = \zeta_m) = 0. \quad (11)$$

Если не указано другое, в расчётах неизменны следующие параметры: линейная расстройка в центре ловушки  $\delta_L \equiv (\omega - \omega_{BL} + kV_*)t_{ЛОВ} = 0$ , нормированная частота  $\tilde{\omega} = 0,5$ ,  $v_{\perp*} = V_*$  ( $\text{tg } \theta_L = 1$ ).

### 2.1. Зависимость инкремента неустойчивости от превышения порога генерации

В этом разделе приводятся результаты численной проверки полученной ранее в работе [14] аналитической зависимости инкремента неустойчивости от превышения порога генерации в С-ЛОВ. Такая проверка желательна, поскольку строгие аналитические результаты получены в [14] лишь для однородной ограниченной среды, а случай неоднородного профиля  $B(z)$  рассмотрен приближённо, для малого превышения порога.

В рамках системы (3) линейный режим неустойчивости обеспечивается «выключением» слагаемых, отвечающих за нелинейность движения электронов, а именно правой части в уравнении (3г) и последнего слагаемого в правой части уравнения (3в). В этом режиме в каждой точке системы устанавливается экспоненциальный закон изменения амплитуды  $a \propto \exp(\gamma t)$ , что и даёт возможность определить инкремент неустойчивости.

Напомним, что для однородной С-ЛОВ с длиной  $2l$  в работе [14] получено выражение, пригодное для любого значения параметра связи  $q$ :

$$\gamma \approx \gamma_0 = \frac{\pi}{T} \left( \tilde{q}^{1/2} - \tilde{q}^{-1/3} \right), \quad (12)$$

где  $\tilde{q} = q/q_{thr}$  — параметр превышения порога генерации,  $q_{thr}$  — пороговое значение  $q$ ,

$$T = \frac{2l}{V_*} (1 + u_g^{-1}) \quad (13)$$

— характерное время распространения возмущения в цепи обратной связи системы, которое определяет период модуляции при периодическом режиме работы С-ЛОВ. В однородной ограниченной среде, как установлено в работе [5],  $q_{thr} = q_{thr}^0 = u_g \pi^2 / 16$ .

Зависимость инкремента от параметра превышения порога  $\tilde{q} = q/q_{\text{thr}}$  для С-ЛОВ с параболическим профилем  $B(z)$  иллюстрирует рис. 1. По горизонтальной оси на рис. 1 отложена функция  $\gamma_0(\tilde{q})$  (12), в которой для вычисления  $T$  в (13) вместо  $l$  подставлена некоторая эффективная длина  $l_{\text{ef}}^{(g)} = \Lambda \tilde{l}_{\text{ЛОВ}}$  (ниже такой масштаб времени будем обозначать  $T_{\text{ef}}$ ), где  $\Lambda$  — безразмерный коэффициент. Параметры  $\Lambda$  и  $q_{\text{thr}}$  (они указаны в подписи к рис. 1) удаётся подобрать так, что полученная численно зависимость близка к прямой  $\gamma = \gamma_0$ . Это говорит о применимости аналитической формулы из работы [14] и для случая неоднородной среды.

Отметим, однако, что при подборе параметров  $\Lambda$  и  $q_{\text{thr}}$  возникают два эффективных масштаба длины: один ( $l_{\text{ef}}^{(g)}$ ) определяется из масштаба времени  $T_{\text{ef}}$ , т. е. при подгонке наклона прямой на графике  $\gamma(\gamma_0)$  к единице, а другой, который обозначим  $l_{\text{ef}}^{(\text{thr})}$ , — при подгонке точки пересечения графика с горизонтальной осью к началу координат, т. е. по сопоставлению величины порога  $q_{\text{thr}}$  с соответствующим значением для однородной среды (см. определение  $q$  в (4) и формулу (7)):

$$l_{\text{ef}}^{(\text{thr})} = \tilde{l}_{\text{ЛОВ}} (q_{\text{thr}}^0/q_{\text{thr}})^{1/2} = (\pi/4) \tilde{l}_{\text{ЛОВ}} (u_g/q_{\text{thr}})^{1/2}. \quad (14)$$

Поскольку в линеаризованных уравнениях фигурирует именно характерный масштаб неоднородности расстройки  $\tilde{l}_{\text{ЛОВ}}$  [15], можно ожидать, что введённая таким образом величина  $l_{\text{ef}}^{(\text{thr})}$  не зависит от параметра  $\alpha$  (7), т. е. от частоты волны и поперечной скорости электронов. Результаты расчётов при разных значениях  $\tilde{\omega}$  и  $\text{tg} \theta_L$  подтверждают это предположение.

Нетрудно вычислить, что порог  $q_{\text{thr}} = 0,31u_g$  при  $\tilde{\omega} = 0,5$  и  $\text{tg} \theta_L = 1$  ( $\alpha^{-2} = 1,75$ ) соответствует  $l_{\text{ef}}^{(\text{thr})} \approx 1,4 \tilde{l}_{\text{ЛОВ}} \approx 1,7 l_{\text{ЛОВ}}$ , что согласуется с оценками, полученными в работах [14, 15]. В то же время значение  $\Lambda = 1,5$  соответствует, очевидно,  $l_{\text{ef}}^{(g)} \approx 1,5 \tilde{l}_{\text{ЛОВ}}$ .

Таким образом, определённая численно зависимость инкремента неустойчивости для неоднородной среды (при параболической зависимости величины магнитного поля  $B$  от продольной координаты  $z$ ) имеет тот же вид, что и для однородной среды. При этом возникают два формально независимых характерных масштаба длины ЛОВ, которые отличаются численным коэффициентом, близким к единице:  $l_{\text{ef}}^{(g)}/l_{\text{ef}}^{(\text{thr})} \approx 1,06$ .

Это отличие невелико, но воспроизводимо, т. е. его нельзя объяснить численными погрешностями. Возможно, что его причина заключается в несовпадении вида собственных функций электромагнитного поля для однородной и неоднородной среды. В частности, наиболее неустойчивая мода, определяющая поведение численного решения, имеет несимметричную область локализации относительно экваториальной плоскости [15], в то время как аналитическое решение получено для симметричной области.

## 2.2. Амплитуда волны в нелинейном режиме как функция инкремента

Известно, что в С-ЛОВ, как и в пучковой ЛОВ, при небольшом превышении порога генерации устанавливается стационарный уровень выходного сигнала, при большем превышении порога ре-

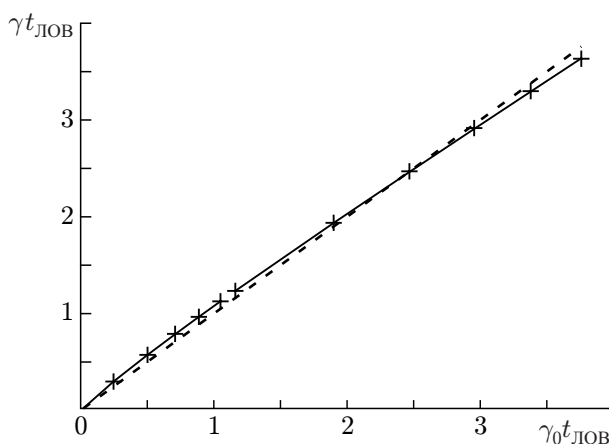


Рис. 1. Сравнение инкремента неустойчивости  $\gamma$  в С-ЛОВ с аналитическим значением  $\gamma_0$  при различной величине параметра превышения порога генерации  $\tilde{q} = q/q_{\text{thr}}$  для  $\Lambda = 1,5$ ;  $q_{\text{thr}}/u_g = 0,31$ . Зависимость  $\gamma = \gamma_0$  показана штриховой линией.

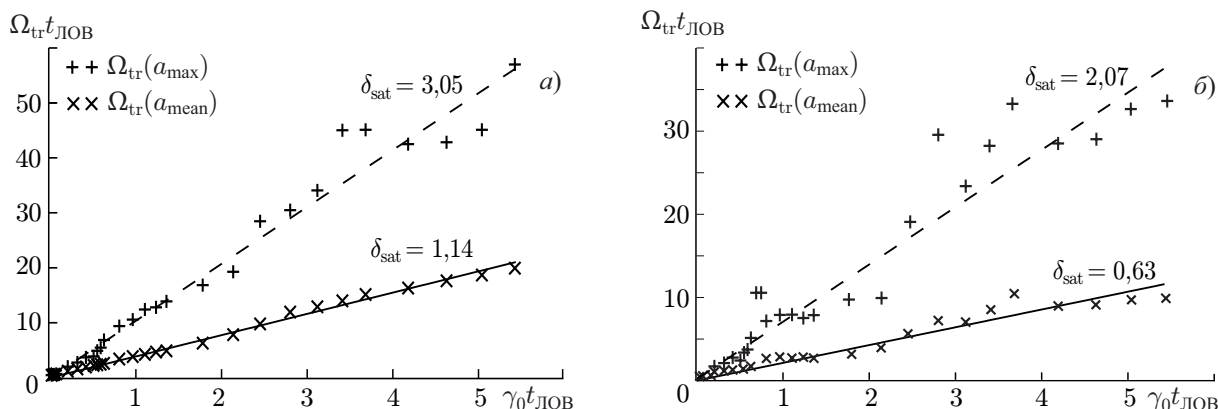


Рис. 2. Зависимости величины  $\Omega_{tr}$ , характеризующей амплитуду волны на выходе (а) и в центре системы (б), от инкремента неустойчивости  $\gamma$  в С-ЛОВ. Значения  $\gamma_0(\tilde{q})t_{ЛОВ}$  получены согласно выражению (12) с учётом (13) и (14). Символы соответствуют значениям  $\Omega_{tr}$ , вычисленным по максимальным ( $a_{max}$ ) и средним ( $a_{mean}$ ) значениям амплитуды, линии отвечают линейной зависимости (1) с коэффициентами  $\delta_{sat}$ , указанными на графике

ализуется периодическая модуляция сигнала, а при ещё больших  $\tilde{q}$  выходной сигнал становится стохастическим [7, 13]. Сигналы, имеющие вид дискретных элементов с дрейфом частоты (хорошие элементы в случае ОНЧ волн), формируются при достаточно большом превышении порога:  $\tilde{q} \gtrsim 5 \div 10$ . Напомним, что при формировании таких элементов существенную роль играет неоднородность среды [7].

В случае нестационарного сигнала вопрос о связи его амплитуды с линейным инкрементом неустойчивости надо уточнить, определив понятие характерной амплитуды. Используем два варианта: максимальная и средняя амплитуда по всей временной реализации. Для достаточно длинной реализации, включающей, как минимум, несколько дискретных элементов, результат не должен существенно зависеть от длины реализации для обоих вариантов. В отличие от первого варианта, который характеризует в основном конечную стадию генерации, средняя по всей реализации амплитуда определяется также свойствами сигнала во время пауз между всплесками.

Результаты численных расчётов для зависимостей максимальной и средней амплитуды на выходе С-ЛОВ от линейного инкремента неустойчивости приведены на рис. 2. Здесь для сравнения показаны прямые, соответствующие аналитической зависимости  $\Omega_{tr}(\gamma)$  из (1), в которой значения коэффициента  $\delta_{sat}$  получены минимизацией среднеквадратичного отклонения от результатов численного эксперимента. Инкремент вычислялся аналитически по формуле (12) с параметрами, определёнными в разделе 2.1. Как видим, величина  $\Omega_{tr}$ , вычисленная по средней (по всей реализации) амплитуде волны на выходе системы практически пропорциональна линейному инкременту, причём эта зависимость лишь незначительно отличается от аналогичной зависимости для амплитуды насыщения волны в однородной среде [12].

Для максимальной амплитуды также имеет место зависимость, близкая к линейной, но коэффициент этой зависимости примерно в 3 раза выше, и, кроме того, отклонения от линейного закона здесь более заметны. Последнее, скорее всего, связано со стохастическим характером генерации. Отметим, что практически все значения  $q$  в этой серии расчётов соответствуют именно стохастическому режиму генерации, который, как показано в [7], для неоднородной С-ЛОВ реализуется уже при относительно небольшом превышении порога самовозбуждения ( $\tilde{q} > 1,85$ , что при выбранных параметрах соответствует величине  $\gamma_0 t_{ЛОВ} \approx 0,43$ ; периодическая же модуляция амплитуды имеет место при  $\tilde{q} > 1,55$ ).

Повторяя ту же процедуру для амплитуды поля в центре расчётной области (т. е. в точке ми-

нимума внешнего магнитного поля), получаем графики, приведённые на рис. 26. За счёт меньшей амплитуды поля в центре коэффициенты  $\delta_{\text{sat}}$  также получились меньше. Как видно из графиков, средняя амплитуда поля в центре системы примерно в 4 раза меньше, чем на выходе, а максимальная амплитуда — примерно вдвое.

### 2.3. Связь между скоростью дрейфа частоты и амплитудой волны

Определённые выше зависимости линейного инкремента неустойчивости от превышения порога перехода в режим ЛОВ в магнитосферном циклотронном мазере (см. (12)) и амплитуды волны на нелинейной стадии от линейного инкремента (см. (1)) важны для сопоставления теории с экспериментальными данными. Такое сопоставление, в частности, проводилось в работах [10, 11], где на основе измерений скорости дрейфа частоты в элементах хорových ОНЧ излучений и указанных зависимостей были сделаны выводы о значении превышения порога перехода в режим ЛОВ при генерации хорov и о величине перепада на функции распределения быстрых электронов. В частности, было установлено, что превышение порога (параметр  $\tilde{q}$ ) в хорových элементах всегда достаточно велико ( $\tilde{q} > \tilde{q}_* \approx 3$ ), т. е., помимо линейного порога режима ЛОВ, существует «нелинейный» порог, при котором формируются дискретные элементы. Аналогичный вывод был независимо сделан по результатам численного моделирования уравнений С-ЛОВ [7].

Для вычисления параметра  $\tilde{q}$  по измеренной скорости дрейфа частоты  $\partial\omega/\partial t$ , кроме приведённых выше, используется соотношение, связывающее  $\partial\omega/\partial t$  с амплитудой волны [6, 9]:

$$\partial\omega/\partial t \approx \delta_{\text{tr}}\Omega_{\text{tr}}^2/(2\pi). \quad (15)$$

Формула (15) имеет оценочный характер и, следовательно, также нуждается в уточнении, которое учтено введённым в неё коэффициентом  $\delta_{\text{tr}}$ . К тому же в выражение (15) входит значение  $\Omega_{\text{tr}}$ , соответствующее некоторой характерной амплитуде хорového элемента. Таким образом, в этом соотношении существует ещё одна неопределённость, которую можно устранить двумя путями: сопоставлением полученных выше результатов с данными наблюдений или с помощью более детального (теоретического или численного) анализа соотношения между скоростью дрейфа частоты и амплитудой волны.

Ранее подобные расчёты проводились в работе [16], и согласно изложенным там результатам коэффициент  $\delta_{\text{tr}}$  в формуле (15) близок к единице, если в каждый момент времени для вычисления  $\Omega_{\text{tr}}$  брать текущую амплитуду волны. Однако авторы не уточняют, какое значение поперечной скорости электронов они при этом использовали.

Расчёты на основе нашей модели также позволяют более точно определить соотношение между скоростью дрейфа частоты и амплитудой волны. Это было сделано с использованием результатов ручного определения наклона хорového элемента на спектрограммах. Примеры таких спектрограмм приведены на рис. 3. Очевидно, данный метод имеет значительную погрешность, которая связана не только с несовершенством ручного выбора наклона, но и со сложным характером самого элемента, на разных участках которого скорость дрейфа частоты может быть различной. Для определённости выбирался участок элемента с наиболее чётко выраженным линейным характером изменения частоты и со спектральной амплитудой, близкой к максимальной для данного элемента величине.

Результат обработки спектров представлен на рис. 4. Погрешность метода проявляется в разбросе точек около аппроксимирующей прямой. Ошибка определения наклона этих прямых методом минимизации среднеквадратичного отклонения составила примерно  $\pm 10\%$ .

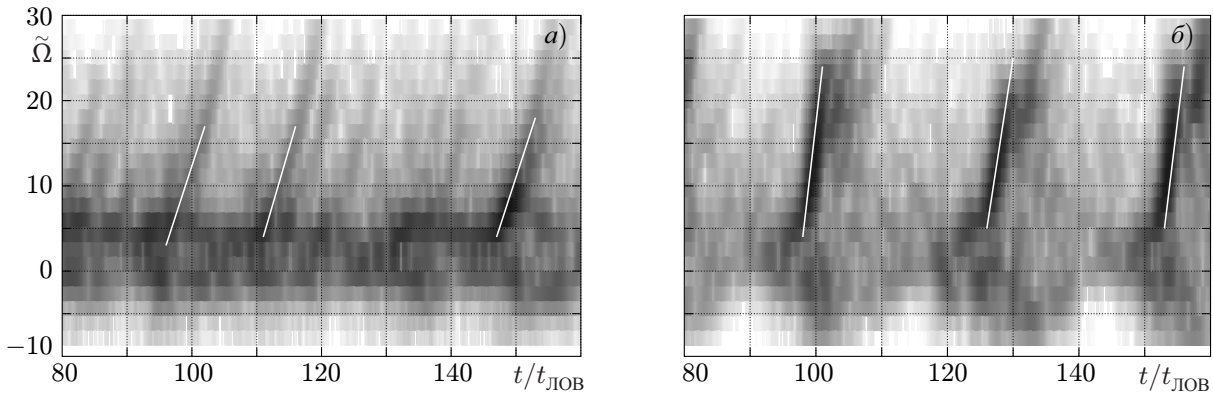


Рис. 3. Динамический спектр амплитуды волны на выходе С-ЛОВ для  $\tilde{q} \approx 4,2$  (а) и  $\tilde{q} \approx 6,5$  (б). По вертикали отложена нормированная отстройка от частоты  $\omega_0$ :  $\tilde{\Omega} = (\omega - \omega_0)t_{\text{ЛОВ}}$ . Более тёмные области на спектрограммах соответствуют большим значениям спектральной плотности мощности сигнала

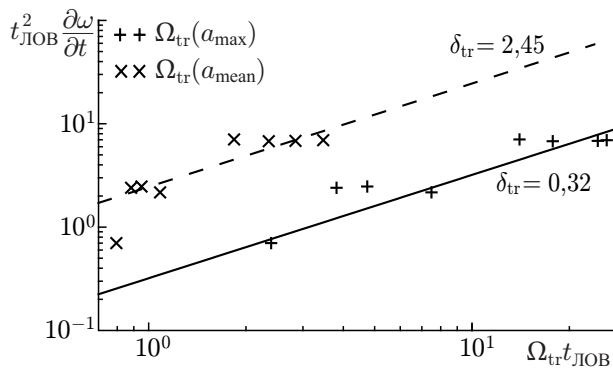


Рис. 4. Зависимости скорости дрейфа частоты в дискретном элементе  $\partial\omega/\partial t$  от величины  $\Omega_{\text{tr}}$ , характеризующей амплитуду волны на выходе системы в С-ЛОВ. Символами показаны величины, соответствующие вычислению  $\Omega_{\text{tr}}$  по максимальным и средним значениям амплитуды излучения, линии соответствуют линейной зависимости (15) с коэффициентами  $\delta_{\text{tr}}$ , указанными на графике

### 3. ОБСУЖДЕНИЕ И ВЫВОДЫ

На основании полученных выше соотношений можно проверить основанные на экспериментальных данных результаты работ [10, 11]. Сопоставляя выражение (15) с формулами (1) и (12), (13), для случая  $\tilde{q} \gg 1$  легко получить, что

$$\tilde{q} \propto (\delta_{\text{sat}} \delta_{\text{tr}} / \Lambda)^{-2} \partial\omega/\partial t. \tag{16}$$

В работе [11] величина  $\tilde{q}$  определялась по измеренным значениям  $\partial\omega/\partial t$  в предположениях  $\delta_{\text{sat}} = \delta_{\text{tr}} = 1$  и  $\Lambda \approx 1,76$ . Таким образом, оценки параметра  $\tilde{q}$ , полученные в [11], следует умножить на коэффициент  $C = (1,76/\Lambda)^2 \delta_{\text{sat}}^2 \delta_{\text{tr}}^2$ . Выше было показано, что в численных расчётах  $\Lambda \approx 1,5$ ;  $\delta_{\text{sat}} \approx 3,05$ ,  $\delta_{\text{tr}} \approx 0,32$ , если в качестве характерной амплитуды хороших излучений брать максимальную амплитуду. В этом случае получаем  $C \approx 1,3$ . Можно сказать, что это несколько (хотя и не слишком существенно) улучшает соответствие между наблюдениями и расчётами, поскольку минимальное значение  $\tilde{q}$  из наблюдений с учётом коэффициента  $C$  получается равным  $\tilde{q}_* \approx 3,9$  вместо 3, в то время как в расчётах  $\tilde{q}_* \approx 4$  (для  $\tilde{q} < 4$  дискретные элементы выражены ещё слабее, чем на спектрограмме, приведённой на рис. 3а). Важнее то, что теперь сопоставление основано не на оценках по порядку величины, а на выводах, подтверждённых численными расчётами.

В заключение кратко сформулируем основные результаты работы.

1) С помощью численных расчётов аналитическая формула для линейного инкремента циклотронной неустойчивости в режиме лампы обратной волны, выведенная в работе [14] для случая однородной среды, обобщена на случай среды с параболической неоднородностью. Определён



коэффициент пропорциональности  $\Lambda \approx 1,5$  между эффективной длиной С-ЛОВ в среде с параболической неоднородностью ( $l$ ) и характерным масштабом изменения расстройки ( $l_{\text{ЛОВ}}$ ).

2) Формула (1), связывающая амплитуду волн в нелинейном режиме циклотронной неустойчивости с линейным инкрементом и полученная в работе [12] при решении задачи о насыщении неустойчивости в однородной среде, остаётся в силе и в случае неоднородной среды, когда нелинейный режим неустойчивости характеризуется стохастической генерацией дискретных волновых пакетов с дрейфом частоты. Численный коэффициент  $\delta_{\text{sat}}$ , учитывающий влияние неоднородности среды и нестационарности нелинейного режима генерации, оказывается близок к 1, если в качестве амплитуды волны подставлять её значение на выходе системы, усреднённое по достаточно длинной реализации. Для максимальной (пиковой) амплитуды излучения  $\delta_{\text{sat}} \approx 3$ . Более точные значения приведены на рис. 2.

3) Уточнено соотношение (15), связывающее скорость дрейфа частоты в дискретных элементах с частотой осцилляций частиц в поле волны  $\Omega_{\text{тр}}$ , которая определяется характерной амплитудой волны. Для оценок, использующих пиковое значение амплитуды на выходе системы, дополнительный численный коэффициент в этом соотношении  $\delta_{\text{тр}} \approx 0,3$ .

4) Полученные результаты количественно обосновывают проводившееся ранее на уровне оценок сопоставление результатов применения модели ЛОВ для описания генерации хоровых излучений с данными наблюдений [10, 11].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект 15–12–20005).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Burtis W. J., Helliwell R. A. // Planet. Space Sci. 1976. V. 24, No. 5. P. 1 007.
2. Сажин С. С., Титова Е. Е. // Космические исслед. 1977. Т. 5, № 5. С. 791.
3. Titova E. E., Kozelov B. V., Jiricek F., et al. // Ann. Geophys. 2003. V. 21, No. 5. P. 1073.
4. Santolík O., Gurnett D. A., Pickett J.S., et al. // J. Geophys. Res. 2003. V. 108, No. A7. P. 1 278.
5. Trakhtengerts V. Yu. // J. Geophys. Res. 1995. V. 100, No. 9. P. 17 205.
6. Trakhtengerts V. Yu. // Ann. Geophys. 1999. V. 17, No. 1. P. 95.
7. Демехов А. Г., Трахтенгерц В. Ю. // Изв. вузов. Радиофизика. 2008. Т. 51, № 11. С. 977.
8. Демехов А. Г. // Изв. вузов. Радиофизика. 2010. Т. 53, № 11. С. 679.
9. Trakhtengerts V. Yu., Demekhov A. G., Titova E. E., et al. // Phys. Plasmas. 2004. V. 11, No. 4. P. 1 345.
10. Macúšová E., Santolík O., Décréau P., et al. // J. Geophys. Res. 2010. V. 115. Art. no. A12257.
11. Titova E. E., Demekhov A. G., Kozelov B. V., et al. // J. Geophys. Res. 2012. V. 117. Art. no. A08210.
12. Трахтенгерц В. Ю. Релаксация плазмы с анизотропным распределением по скоростям. Основы физики плазмы / под ред. А. А. Галеева, Р. Н. Судана. М.: Энергоатомиздат, 1984. С. 498.
13. Демехов А. Г., Трахтенгерц В. Ю. // Изв. вузов. Радиофизика. 2005. Т. 48, № 9. С. 719.
14. Беспалов А. А., Демехов А. Г. // Изв. вузов. Радиофизика. 2009. Т. 52, № 11. С. 845.
15. Demekhov A. G., Nunn D., Trakhtengerts V. Yu. // Phys. Plasmas. 2003. V. 10, No. 11. P. 4 472.
16. Hikishima M., Yagitani S., Omura Y., Nagano I. // J. Geophys. Res. 2009. V. 114, No. A01. Art. no. A01203.

Поступила в редакцию 25 ноября 2015 г.; принята в печать 9 декабря 2015 г.

**RELATIONSHIP BETWEEN THE PARAMETERS OF THE LINEAR  
AND NONLINEAR WAVE GENERATION STAGES IN A MAGNETOSPHERIC  
CYCLOTRON MASER IN THE BACKWARD-WAVE OSCILLATOR REGIME**

*A. G. Demekhov*

By using numerical simulations we generalize certain relationships between the parameters of quasi-monochromatic whistler-mode waves generated at the linear and nonlinear stages of the cyclotron instability in the backward-wave oscillator regime. One of these relationships is between the wave amplitude at the nonlinear stage and the linear growth rate of the cyclotron instability. It was obtained analytically by V. Yu. Trakhtengerts (1984) for a uniform medium under the assumption of constant frequency and amplitude of the generated wave. We show that a similar relationship also holds for the signals generated in a nonuniform magnetic field and having a discrete structure in the form of short wave packets (elements) with fast frequency drift inside each element. We also generalize the formula for the linear growth rate of absolute cyclotron instability in the nonuniform medium and analyze the relationship between the frequency drift rate in the discrete elements and the wave amplitude. These relationships are important for analyzing the links between the parameters of chorus emissions in the Earth's and planetary magnetospheres and the characteristics of the energetic charged particles generating these signals.