

УДК 534.222

ОБ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ НЕЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И АКУСТИЧЕСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

С. Н. Гурбатов^{1*}, О. В. Руденко^{1,2,3,4,5}

¹ Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород;

² Московский госуниверситет им. М. В. Ломоносова, г. Москва;

³ Институт общей физики им. А. М. Прохорова РАН, г. Москва;

⁴ Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта РАН, г. Москва, Россия

⁵ Blekinge Institute of Technology, Karlskrona, Sweden

Рассмотрена задача о восстановлении параметров излучённого акустического сигнала по измеренному полю в некотором сечении нелинейной среды. На основе решения уравнения Бюргера при нулевой и исчезающе малой вязкости обсуждаются условия возможности решения обратной задачи для регулярных и случайных сигналов.

ВВЕДЕНИЕ

Одной из важных задач нелинейной акустики является восстановление параметров излучаемого сигнала по измеренному акустическому полю вдали от излучателя. В общем случае проблема состоит в восстановлении формы излучаемого сигнала или в определении амплитуды исходной волны при известной форме сигнала. К числу обратных нелинейных задач можно отнести задачи нелинейной диагностики сред. Этапы формирования соответствующего научного направления — нелинейной акустической диагностики — отражены в обзорах [1, 2]. Особую роль нелинейная диагностика приобрела в приложении к медицине [3].

В данной работе мы ограничимся одномерным случаем, когда распространение плоской акустической волны описывается нелинейным уравнением диффузии — уравнением Бюргера [4–7]:

$$\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\varepsilon}{c_0^3 \rho_0} p \frac{\partial p}{\partial \tau} = \frac{b}{2c_0^3 \rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2}. \quad (1)$$

Здесь $p(\tau, z)$ — акустическое давление, ε и b — параметры нелинейности и диссипации среды соответственно, z — координата вдоль оси пучка, $\tau = t - z/c_0$ — время в сопровождающей системе координат, движущейся со скоростью звука c_0 , ρ_0 — невозмущённая плотность среды. В безразмерных переменных это уравнение записывается как

$$\frac{\partial V}{\partial Z} - V \frac{\partial V}{\partial \theta} = \Gamma \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}. \quad (2)$$

Здесь

$$Z = \frac{\varepsilon P_0 z}{c_0^3 \rho_0 t_0}, \quad \theta = \frac{\tau}{t_0}, \quad V = \frac{p}{P_0}, \quad \Gamma = \frac{b}{2\varepsilon t_0 P_0}, \quad (3)$$

P_0 — характерная начальная амплитуда возмущения, t_0 — характерное время изменения входного сигнала.

* gurb@rf.unn.ru

Обратная задача нелинейной акустики заключается в восстановлении временного профиля поля на излучателе $p_0(\tau) = p(\tau, z = 0)$ по измеренному полю $p(\tau, z)$ на расстоянии z от излучателя. Нелинейное уравнение диффузии в классической форме

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (4)$$

было предложено Бюргерсом [8] как модельное уравнение теории турбулентности и описывало влияние инерционной нелинейности и вязкости на характеристики сильной гидродинамической турбулентности. Исследованию динамических и статистических свойств решений одномерного (а в последнее время — и трёхмерного) уравнения Бюргерса посвящено большое число работ (см., например, библиографию в монографиях и обзорах [4, 9–16]). Несмотря на то, что уравнение Бюргерса имеет точное решение (решение Хопфа—Коула), анализ детерминированных и в особенности случайных полей представляет собой весьма сложную математическую задачу. В этой связи первые серьёзные результаты [17] для случая броуновского начального потенциала были получены лишь 30 лет спустя после появления самого уравнения Бюргерса [8].

Очевидно, что тривиальной заменой переменных $V \rightarrow v$, $Z \rightarrow t$ и $\theta \rightarrow -x$ уравнение (2) сводится к классической форме (4). С точки зрения теории дифференциальных уравнений как уравнение (4) с начальным условием $v(x, t = 0) = v_0(x)$, так и уравнение (2) с начальным условием $V(\theta, Z = 0) = V_0(\theta)$ представляют собой задачу Коши для уравнения параболического типа. С точки зрения передачи информации в рамках данной задачи рассматривается влияние нелинейных эффектов на информационные параметры акустического сигнала. В частности, если на границе нелинейной среды задан модулированный сигнал с амплитудной и фазовой (частотной) модуляцией $p_0(\tau) = a(\tau) \sin[\omega_0 \tau + \varphi(\tau)]$, то обратная задача заключается в восстановлении параметров $a(\tau)$ и $\varphi(\tau)$ исходного сигнала по полю $p(\tau, z)$, измеренному в сечении z . Соответственно, для уравнения (4) данная проблема формулируется как восстановление параметров начального квазипериодического поля $v_0(x) = a(x) \sin[k_0 x + \varphi(x)]$ по полю $v(x, t)$ в момент времени t .

Для слабых возмущений, когда нелинейностью можно пренебречь, уравнение (4) переходит в линейное уравнение диффузии. В этом случае мы имеем классическую обратную задачу для уравнения теплопроводности [18].

В данной работе на основе классического уравнения Бюргерса (4) мы рассмотрим принципиальную возможность восстановления профиля $v_0(x)$ по полю, известному в момент времени t . Использование уравнения Бюргерса в форме (4) при рассмотрении обратных задач чрезвычайно удобно в связи с тем, что при исчезающе малой вязкости ($\mu \rightarrow 0$) его решение эквивалентно эволюции потока свободно движущихся частиц с абсолютно неупругими столкновениями [9, 10, 14, 15]. Интерпретация решения уравнения Бюргерса как потока слипающихся частиц делает очевидным невозможность полного решения обратной задачи на временах после образования разрыва в первоначально непрерывном поле. Во второй части работы мы обсудим обратную задачу для акустической турбулентности — решение уравнения Бюргерса при случайных начальных условиях.

1. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ПРИ НУЛЕВОЙ ВЯЗКОСТИ

При нулевой вязкости уравнение Бюргерса (4) переходит в уравнение Римана

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (5)$$

которое известно также как уравнение Хопфа или уравнение простой волны [4, 19]. Для рассмотрения обратных задач нелинейной акустики очень полезной является интерпретация уравнения

(5) как закона эволюции эйлеровой скорости потока невзаимодействующих частиц. В лагранжевом представлении уравнение (5) эквивалентно системе характеристик

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial t} = V, \quad (6)$$

решение которой

$$V(y, t) = v_0(y), \quad X(y, t) = y + tv_0(y) \quad (7)$$

описывает свободное движение частиц с постоянной скоростью. Здесь y — лагранжевая координата частицы (т. е. начальная координата частицы при $t = 0$). Уравнения (7) задают поле скорости в параметрическом виде. Для нахождения эйлеровой скорости необходимо решить нелинейное уравнение

$$x = y + v_0(y)t, \quad (8)$$

тогда поле скорости можно представить в виде

$$v(x, t) = \frac{x - y(x, t)}{t}. \quad (9)$$

Здесь $y(x, t)$ — лагранжевая координата частицы, которая в момент времени t попала в точку x . Из уравнений (8) и (9) следует известное неявное решение уравнения (5):

$$v(x, t) = v_0[x - tv(x, t)]. \quad (10)$$

Решение обратной задачи также можно представить в параметрическом виде. Из формул (7)–(9) следует, что при известном поле $v(x, t)$ в точке x в момент времени t начальное поле скорости $v_0(y)$ определяется соотношениями

$$v_0 = v(x, t), \quad y = x - tv(x, t). \quad (11)$$

Уравнение (5) описывает акустические волны лишь на ограниченных временах, пока его решение однопотокное. На более поздних временах необходимо учитывать высокочастотное затухание и переходить от уравнения (5) к уравнению Бюргера (4).

2. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ПРИ ИСЧЕЗАЮЩЕ МАЛОЙ ВЯЗКОСТИ

Уравнение Бюргера (4) заменой Хопфа–Коула сводится к линейному уравнению диффузии и, следовательно, имеет точное решение. В пределе исчезающе малой вязкости $\mu \rightarrow 0$ интегралы в точном решении можно вычислить методом перевала. В результате асимптотическое решение уравнения Бюргера по-прежнему записывается в виде (9):

$$v_w(x, t) = \frac{x - y_w(x, t)}{t}. \quad (12)$$

Теперь, однако, $y_w(x, t)$ — координата абсолютного минимума функции

$$G(y, x, t) = s_0(y) + \frac{(x - y)^2}{2t}, \quad (13)$$

где

$$s_0(y) = \int_{-\infty}^y v_0(y') dy',$$

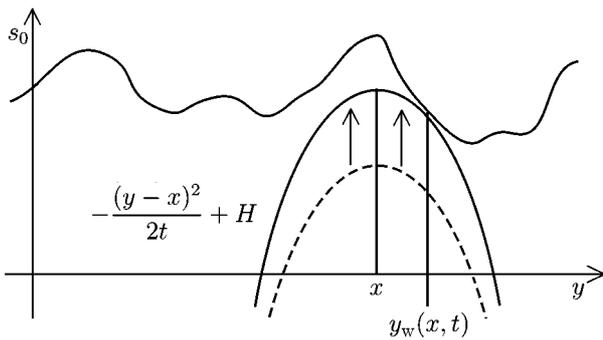


Рис. 1. Графическая иллюстрация процедуры отыскания координаты $y_w(x, t)$ абсолютного минимума функции $G(y, x, t)$ по координате y ; минимум достигается в точке касания параболы $P(y, x, t)$ и начального потенциала $s_0(y)$

по лагранжевой координате y [9, 10, 14, 15]. Учитывая, что точки экстремума функции $G(y, x, t)$ по переменной y определяются из уравнения

$$\partial G / \partial y = v_0(y) + (y - x) / t = 0,$$

видно, что асимптотическое решение уравнения Бюргера при $\mu \rightarrow 0$ состоит из ветвей решения уравнения Римана (5) и, таким образом, является слабым решением уравнения Римана.

Для построения качественной картины эволюции поля скорости удобно воспользоваться графической процедурой отыскания абсолютного минимума функции $G(y, x, t)$ по переменной y . Очевидно, что положение указанной точки экстремума совпадает с координатой первой точки

$$P(y, x, t) = H - \frac{(x - y)^2}{2t} \tag{14}$$

при росте величины H от очень больших по модулю отрицательных значений (см. рис. 1). Подставляя координату точки касания $y_w(x, t)$ в формулу (12), мы получим поле скорости $v_w(x, t)$ в точке x в момент времени t . Заметим, что зависимость $v_w(x, t)$ при разных значениях x получится при изменении координаты x вершины параболы, скользящей по начальному потенциалу $s_0(y)$.

Характер касания параболы и начального потенциала зависит от соотношения их кривизны, равной $1/t$ и $\partial v_0(y) / \partial y$ соответственно. Если при всех y выполнено условие $1 + t \partial v_0(y) / \partial y > 0$, парабола непрерывно скользит по кривой $s_0(y)$. При этом $y_w(x, t)$, а следовательно, и $v_w(x, t)$ являются непрерывными функциями x , и асимптотическое решение уравнения Бюргера совпадает с решением уравнения Римана. Решение (11) обратной задачи при этом существует и однозначно.

С ростом величины t парабола $P(y, x, t)$ становится всё более пологой, в результате появятся такие значения $x = x_k$, при которых парабола касается начального профиля потенциала $s_0(y)$ сразу в двух точках, $y_k^+(x_k, t)$ и $y_k^-(x_k, t)$, $y_k^+ > y_k^-$. В дальнейшем такую параболу будем называть критической. При переходе координаты вершины параболы через точку $x = x_k$ координаты точки касания параболы и начального профиля потенциала, а следовательно, поле $v_w(x, t)$ претерпевают разрыв (см. рис. 2).

Как уже отмечалось, асимптотическое решение уравнения Бюргера можно интерпретировать как закон эволюции потока невзаимодействующих частиц с абсолютно неупругими столкновениями. При этом образование разрыва соответствует слипанию частиц, заполняющих с единичной начальной плотностью интервал $[y_k^+(x_k, t), y_k^-(x_k, t)]$, и образованию тяжёлой макрочастицы с массой $m_k = y_k^+(x_k, t) - y_k^-(x_k, t)$, координата и скорость которой совпадают с координатой и скоростью разрыва. Таким образом, очевидно, что в результате образования разрыва происходит потеря информации о тонкой структуре начального поля скорости в интервале $[y_k^+(x_k, t), y_k^-(x_k, t)]$. Отметим, что такая же ситуация имеет место и в средах с другими типами нелинейности [20, 21].

Обсудим, какие характеристики начального поля $v_0(x)$ можно восстановить по известным характеристикам поля $v_w(x, t)$ на стадии разрыва. Если $v_w(x_k - 0, t)$ и $v_w(x_k + 0, t)$ — значения поля скорости $v_w(x, t)$ слева и справа от разрыва с координатой x_k , то границы интервала $[y_k^+, y_k^-]$ начального поля $v_0(x)$, из которого образовался разрыв, определяются уравнениями

$$y_k^- = x_k - t v_w(x_k - 0, t), \quad y_k^+ = x_k - t v_w(x_k + 0, t). \tag{15}$$

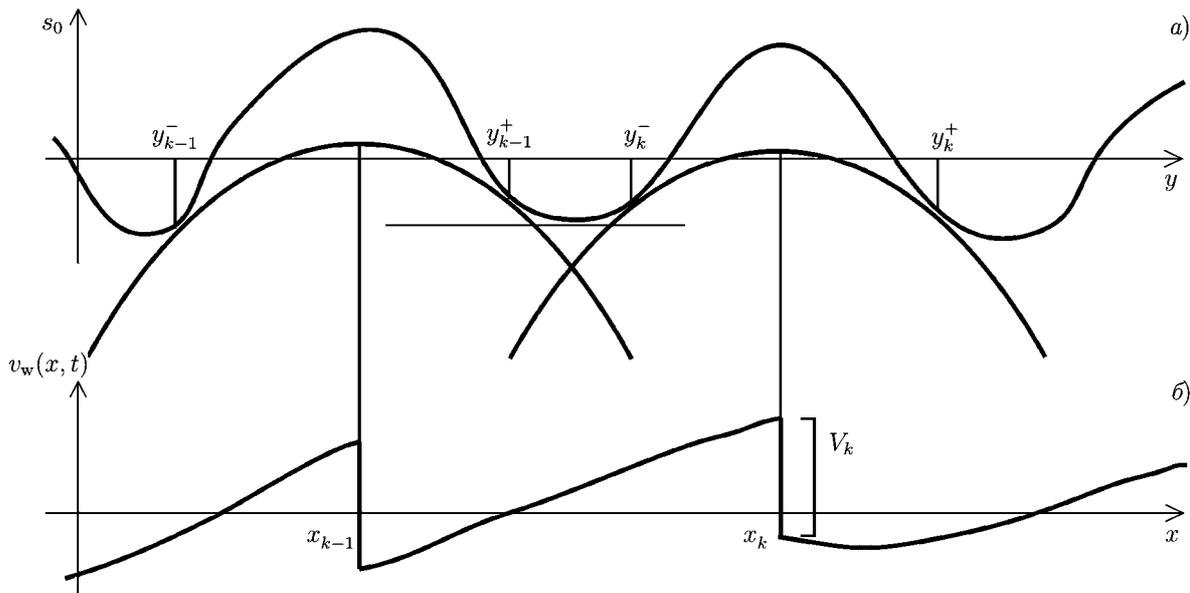


Рис. 2. Графики начального распределения потенциала и двух критических парабол (а) и график асимптотического решения уравнения Бюргера при $\mu \rightarrow 0$, координаты разрывов которого совпадают с координатами вершин критических парабол (б)

Длина интервала при этом определяется амплитудой разрыва:

$$y_k^+ - y_k^- = tV_k = t[v_w(x_k - 0, t) - v_w(x_k + 0, t)]. \tag{16}$$

Как следует из рис. 2, произвольное изменение начального поля скорости $v_0(x)$ в интервале $[y_k^+, y_k^-]$, ограниченное условием, что начальный потенциал $s_0(y)$ в этом интервале находится выше критической параболы $P(y, x_k, t)$, не меняет поле скорости в момент времени t . Таким образом, после образования разрывов принципиально невозможно решить обратную задачу на всём пространственном интервале. Легко показать, что параметры разрыва несут информацию лишь об интегральных характеристиках начального поля на интервале $[y_k^+, y_k^-]$. Из условия двойного касания критической параболой $P(y, x_k, t)$ начального распределения потенциала $s_0(y)$ следует, что координата разрыва равна

$$x_k(t) = \frac{y_k^+ + y_k^-}{2} + t \frac{s_0(y_k^+) - s_0(y_k^-)}{y_k^+ - y_k^-}. \tag{17}$$

Сравнивая формулу (17) с выражением (15), получаем, что по скорости разрыва

$$U_k(t) = \frac{v_w(x_k + 0, t) - v_w(x_k - 0, t)}{2} = \frac{s_0(y_k^+) - s_0(y_k^-)}{y_k^+ - y_k^-} \tag{18}$$

можно восстановить интеграл начального поля скорости $v_0(x)$ по интервалу $[y_k^+, y_k^-]$:

$$\int_{y_k^-}^{y_k^+} v_0(x) dx = U_k(t)(y_k^+ - y_k^-). \tag{19}$$

Заметим, что при использовании аналогии решения уравнения Бюргера с эволюцией потока слипающихся частиц соотношение (19) есть ни что иное, как закон сохранения импульса. При

этом надо учесть, что, хотя в уравнении (17) координаты зависят от времени, выполняется равенство $U_k(t) = dx_k(t)/dt$.

На интервалах между разрывами восстановление начального поля определяется формулами (11) для римановой волны. При этом на достаточно больших временах «выживают» лишь расширяющиеся участки начального профиля. В окрестности минимума начального потенциала $x = y_k$ поле скорости $v_0(x)$ можно аппроксимировать как

$$v_0(x) \approx \frac{\partial v_0(y)}{\partial y} \Big|_{y=y_k} (x - y_k) = \alpha_k(x - y_k), \quad (20)$$

и, соответственно, на больших временах поле скорости на интервалах между разрывами имеет вид

$$v_0(x) = \frac{\alpha_k(x - y_k)}{1 + t\alpha_k} = \alpha_k(t)(x - y_k). \quad (21)$$

Из формулы (21) видно, что при $t\alpha_k \gg 1$ градиент $\alpha_k(t) \approx 1/t$ практически не зависит от начального значения градиента α_k . Оценим возможность определения начального градиента поля скорости. Если измерен градиент поля $\alpha_k(t)$ в момент времени t , то начальный градиент α_k определяется соотношением

$$\alpha_k = \frac{\alpha_k(t)}{1 - t\alpha_k(t)}. \quad (22)$$

Если градиент поля в момент времени t измерен с относительной погрешностью δ , т. е. $\alpha_k^*(t) = \alpha_k(t)(1 + \delta)$, то из формулы (22) для относительной ошибки ε оценки начального градиента $\alpha_k^* = \alpha_k(1 + \varepsilon)$ имеем

$$\varepsilon = \delta \left[1 + \frac{t\alpha_k(1 + \delta)}{1 - t\alpha_k\delta} \right]. \quad (23)$$

Из соотношения (23) следует, что при $\delta > 0$ ошибка ε растёт с течением времени, а при $t \rightarrow \rightarrow 1/(\alpha_k\delta)$ ошибка стремится к бесконечности и, следовательно, определение начального значения градиента невозможно. Для одномасштабных входных сигналов с пространственным периодом L по начальному градиенту α_k можно оценить амплитуду a_0 начального возмущения поля $v_0(x)$ как $a_0 \approx \alpha_k L$.

Оценим возможность восстановления параметров квазигармонического сигнала $v_0(x) = a_0(x) \sin[k_0x + \varphi(x)]$ с амплитудной и частотной модуляцией. По расстоянию между соседними нулями сигнала $L_k = y_{k+1} - y_k$ (здесь $k_0y_k + \varphi(y_k) = 2\pi k$) можно оценить частоту входного сигнала: $k(y_k) \approx 2\pi/L_k$. Градиент поля в точке нуля поля равен $\alpha_k \approx a_0(y_k)k(y_k)$. Следовательно, по измерению градиента поля в момент времени t можно восстановить начальную амплитуду $a_0(y_k) = \alpha_k/k(y_k)$ и энергию входного сигнала. При этом относительная ошибка определения амплитуды по-прежнему определяется соотношением (23), где $\alpha_k = 1/t_{nl}$, t_{nl} — время образования разрыва гармонического сигнала.

Одной из важных обратных задач нелинейной акустики является определение формы исходного сигнала, минимизирующей потери энергии сигнала при распространении до некоторой фиксированной точки. Для периодического сигнала энергия волны $E(t) = \int_0^L v_2(x, t) dx$ согласно уравнению Бюргера изменяется как

$$\frac{dE(t)}{dt} = -\gamma(t), \quad \gamma(t) = \mu \int_0^L \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx, \quad (24)$$

где L — период волны. В случае исчезающе малой вязкости темп убывания энергии определяется только амплитудой разрыва [4, 5, 14, 15]:

$$\gamma(t) = \frac{2}{3} U^3(t). \quad (25)$$

Таким образом, максимальное поглощение энергии акустической волны происходит в точке, где амплитуда разрыва максимальна. Для гармонического сигнала время образования разрыва равно t_{nl} , а максимум величины $U(t)$ равен удвоенной амплитуде начальной волны.

Как уже отмечалось, при исчезающе малой вязкости решение уравнения Бюргера можно интерпретировать как поток невзаимодействующих частиц с абсолютно неупругими столкновениями. При этом образование разрыва соответствует слипанию частиц и образованию тяжёлой макрочастицы, положение и скорость которой совпадают с положением и скоростью разрыва, а масса пропорциональна амплитуде разрыва. Используя аналогию решения уравнения Бюргера с потоком частиц, легко видеть, что максимальная амплитуда разрыва достигается в тот момент, когда все частицы слипаются одновременно. Из уравнения (7) следует, что расстояние между соседними частицами меняется как

$$J(y, t) = \frac{\partial X(y, t)}{\partial y} = 1 + t \partial v_0(y) / \partial y. \quad (26)$$

Здесь $J(y, t)$ — якобиан преобразования от лагранжевых координат к эйлеровым. Из формулы (26) видно, что все частицы сталкиваются в один момент времени, если начальный профиль скорости имеет инверсный пилообразный вид на периоде $-L/2 < x < L/2$:

$$v_0(x) = -\beta x. \quad (27)$$

Для такого профиля $v(x, t) = -\beta x / (1 - t\beta)$, разрыв образуется при $t_{\text{nl}} = 1/\beta$, его амплитуда максимальна в этот момент времени и равна βL . Особенностью обратной пилообразной волны является образование разрыва конечной амплитуды и универсальность профиля волны до и после образования разрыва. В работе [22] на основе этих свойств была построена модель акустической турбулентности как суперпозиции обратных пилообразных волн, имеющих разные масштабы с пространственным спектром Вейерштрасса—Мандельброта.

3. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ШУМОВЫХ СИГНАЛОВ

Ниже мы обсудим обратную задачу для случайных полей, удовлетворяющих уравнению Бюргера, а именно выясним, какие статистические характеристики исходного поля $v_0(x)$ можно восстановить по известной статистике поля $v(x, t)$ в момент времени t . Такие случайные поля часто называют турбулентностью Бюргера (в англоязычной литературе иногда употребляют термин Burgulence) [23, 24] или же, имея в виду приложения к эволюции интенсивных акустических шумов, акустической турбулентностью. Как уже отмечалось, исследованию статистических свойств решений уравнения Бюргера посвящено большое число работ (см., например, библиографию в монографиях и обзорах [4, 9–16]). Здесь мы ограничимся случаем нулевой и исчезающе малой вязкости.

На начальном этапе распространение волны описывается уравнением Римана (5), которое эквивалентно уравнению Бюргера (4) при нулевой вязкости ($\mu = 0$). В лагранжевом представлении уравнение (5) эквивалентно системе характеристик (6), решение (7) которой описывает свободное движение частиц с постоянной скоростью. Таким образом, статистическое описание

движения частиц в лагранжевом представлении тривиально: плотность вероятности скорости отдельной частицы не меняется с течением времени. Используя формулы связи лагранжевой и эйлеровой статистик, удаётся дать исчерпывающее описание эйлеровой статистики поля римановой волны $v(x, t)$, т. е. найти эволюцию вероятностных распределений, корреляционных функций и энергетических спектров [9, 10, 14, 15]. Для нахождения эйлеровой статистики поля скорости решение для скорости и координаты (7) необходимо дополнить уравнением (26) для якобиана преобразования от лагранжевых координат к эйлеровым.

Прежде всего отметим, что нелинейное искажение статистически однородного случайного поля $v(x, t)$ не сказывается на форме его одноточечной плотности вероятностей:

$$w_{\mathfrak{S}}(v; t) = w_0(v). \tag{28}$$

Это, на первый взгляд, неожиданное утверждение легко понять, пользуясь известной взаимосвязью между плотностью вероятностей статистически однородной случайной функции и поведением её реализаций [14, 15, 25]. Как известно, плотность вероятностей статистически однородного и эргодического по x поля $v(x, t)$ можно выразить через предел относительной длины пребывания реализации $v(x, t)$ в зазоре $[v, v + dv]$:

$$w_{\mathfrak{S}}(v; t) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \sum_k dx_k \frac{1}{\ell dv},$$

где dx_k — длины интервалов на оси x , внутри которых значения поля $v(x, t)$ лежат в интервале $[v, v + dv]$. Вследствие линейной зависимости от времени лагранжева поля $X(y, t)$ (26) длина каждого из интервалов dx_k с течением времени меняется по закону $dx_k(t) = dx_k(0) \pm t dv$, где знак минус соответствует интервалам на укрупняющихся участках профиля поля $v(x, t)$, а знак плюс — на становящихся более пологими участках. Очевидно, что пока решение уравнения Римана (1) однопотокное, сумма длин любых двух соседних интервалов сохраняется: $dx_k + dx_{k+1} = \text{const}$, относительная длина пребывания поля $v(x, t)$ в любом заданном зазоре $[v, v + dv]$ не меняется, а значит остаётся неизменной и одноточечная плотность вероятностей статистически однородного поля. Таким образом, решение обратной задачи для плотности вероятности тривиально: плотность вероятности римановой волны в начальный момент $w_0(v)$ совпадает с плотностью вероятности $w_{\mathfrak{S}}(v; t)$ в момент времени t . Следует, однако, отметить, что данное утверждение справедливо лишь в случае, если во всех реализациях поля скорости $v(x, t)$ выполняется условие $J(x, t) \geq 0$ для якобиана (26). Отметим, что для гауссовой статистики начального поля данное условие нарушается при сколь угодно малых временах. Тем не менее, использование приближения римановой волны возможно, пока число разрывов на единицу длины мало.

Гораздо больше информации об эволюции пространственно-временных свойств случайных полей содержит их пространственный спектр. На начальной стадии, когда распространение акустической волны описывается уравнением Римана, пространственный спектр статистически однородного поля скорости

$$E(k, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} B(s, t) \exp(-iks) ds, \quad B(s, t) = \langle v(x, t)v(x + s, t) \rangle, \tag{29}$$

где угловые скобки обозначают статистическое усреднение, равен [9, 10, 14, 15]

$$E(k, t) = \frac{1}{2\pi(kt)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-iks) [\theta_2(kt, -kt, s) - \theta_1(kt)\theta_1(-kt)] ds. \tag{30}$$

Здесь

$$\theta_2(k_1, k_2, s) = \langle \exp\{i[k_1 v_0(x) + k_2 v_0(x + s)]\} \rangle, \quad \theta_1(k) = \langle \exp[ik v_0(x)] \rangle \quad (31)$$

— двухточечная и одноточечная характеристические функции начального поля $v_0(x)$ соответственно. Очевидно, что решение обратной задачи, а именно восстановление по спектру наблюдаемого поля характеристической функции входного сигнала, невозможно.

Если начальное поле $v_0(x)$ имеет гауссову статистику с нулевым средним и заданной корреляционной функцией $B_0(s)$, $B_0(0) = \sigma_0^2$, то спектральная плотность (30) принимает вид [9, 10, 14, 15, 26, 27]

$$E(k, t) = \frac{1}{2\pi(kt)^2} \exp[-(\sigma_0 kt)^2] \int_{-\infty}^{+\infty} \{\exp[B_0(s)k^2 t^2] - 1\} \exp(-iks) ds. \quad (32)$$

Даже в этом случае общее решение обратной задачи — восстановление начальной корреляционной функции $B_0(x)$ по спектру поля $E(k, t)$ в момент времени t — невозможно. Тем не менее, возможно частичное восстановление информации о характеристиках начального спектра. Заметим, что из (32) следует соотношение

$$E(0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} B_0(s) ds = \text{const}, \quad (33)$$

т. е. пространственный спектр в точке $x = 0$ сохраняется и, следовательно, данная интегральная характеристика начального поля может быть восстановлена по измеренной величине $E(0, t)$ в момент времени t . Этот инвариант играет особую роль в теории турбулентности Бюргерса, поскольку на разрывной стадии эволюция её спектрально-корреляционных и вероятностных свойств качественно различна при $E(0, t) \neq 0$ и при $E(0, t) = 0$.

Отметим также, что темп нелинейного самовоздействия и генерации новых гармоник поля $v(x, t)$ зависит от пространственной частоты k : чем меньше k , тем медленнее идут эти процессы. С этой точки зрения инвариант (33) является следствием бесконечного характерного времени самовоздействия и генерации гармоники на нулевой частоте. При $\sigma_0 kt \ll 1$ можно разложить экспоненты в (32) в ряд Тейлора и ограничиться учётом нескольких первых слагаемых:

$$E(k, t) = E_0(k) + \frac{1}{2} (kt)^2 [E_0(k) \otimes E_0(k) - 2\sigma_0^2 E_0(k)] + \dots, \quad (34)$$

где $E_0(k)$ — спектр начального поля $v_0(x)$, знак \otimes обозначает операцию свёртки. Учёт только первого слагаемого в правой части (34) соответствует пренебрежению нелинейными эффектами, двух слагаемых — учёту нелинейного взаимодействия пар гармоник начального поля, приводящего к появлению спектральных составляющих с разностными и суммарными волновыми числами (однократное взаимодействие), и так далее.

На начальной стадии выражение (34) описывает эволюцию спектра практически во всём частотном диапазоне. Но даже с учётом только однократного взаимодействия восстановление начального спектра $E_0(k)$ по спектру $E(k, t)$ в момент времени t требует решения нелинейного интегрального уравнения. В работах [28, 29] был предложен способ восстановления начального спектра, основанный на использовании биспектров. Уравнение для корреляционной функции $B(s, t) = \langle v(x, t)v(x + s, t) \rangle$ статистически однородного поля скорости, удовлетворяющего уравнению Римана (5), является аналогом уравнения Кармана—Ховарта [30] в теории турбулентности и содержит третьи моменты случайного поля $v(x, t)$. Соответственно, уравнение для спектральной плотности поля имеет вид

$$\frac{\partial E(k, t)}{\partial t} = T(k, t), \quad (35)$$

где функция $T(k, t)$ описывает перекачку энергии по спектру и выражается через биспектры поля скорости. Биспектр $S_2(k_1, k_2, t)$ связан с фурье-образом $c(k, t)$ поля $v(x, t)$ соотношением

$$S_2(k_1, k_2, t)\delta(k_1 + k_2 - k_3) = \langle c(k_1, t)c(k_2, t)c^*(k_3, t) \rangle, \quad (36)$$

где $\delta(k)$ — дельта-функция Дирака. Для гауссова поля все биспектры равны нулю. Из определения биспектра (36) видно, что он естественным образом отражает нелинейное трёхволновое взаимодействие пространственных гармоник. На начальном этапе эволюции можно рассчитать изменение биспектров и, соответственно, найти функцию $T(k, t)$, которая на этом этапе растёт пропорционально времени t . Это позволяет решить обратную задачу восстановления начальной спектральной плотности поля скорости. По измеренному спектру и биспектрам поля скорости $v(x, t)$ в момент времени t исходя из уравнения (35) мы можем восстановить начальную спектральную плотность поля [29]:

$$E_0(k) = E(k, t) - tT(k, t)/2. \quad (37)$$

Рассмотрим теперь поведение спектральной плотности поля $v(x, t)$ при больших волновых числах k . В этом случае при вычислении интеграла (32) можно воспользоваться методом перевала. Ограничившись первыми членами разложения корреляционной функции $B_0(s)$ в ряд Тейлора по степеням s , $B_0(s) = \sigma_0^2(1 - k_1^2 s^2/2! + \dots)$, получим, что спектральная плотность риманова поля при $k \rightarrow \infty$ спадает по универсальному степенному закону:

$$E(k, t) = \frac{\sigma_0^2}{k_1 \sqrt{2\pi} (\kappa\tau)^3} \exp\left(-\frac{1}{2\tau^2}\right), \quad \tau = \sigma_0 k_1 t, \quad \kappa = k/k_1. \quad (38)$$

Подобная асимптотика спектра обусловлена наличием в реализациях поля $v(x, t)$ особенностей типа $v(x, t) \propto \sqrt{x}$. Многопоточные решения уравнения Римана действительно обладают такими особенностями. Поэтому асимптотика (38) формально свидетельствует о появлении многопоточности, а экспоненциальный множитель $\exp[-1/(2\tau^2)]$ пропорционален среднему числу участков многопоточности на единицу длины. На самом деле это выражение описывает спектр однозначного поля, сконструированного неким образом из многозначного решения Римана. Выражения для спектра (30), (32) были получены переходом к лагранжевым координатам в выражениях для фурье-образов поля скорости с последующим усреднением статистически однородного по x начального поля скорости $v_0(x)$. Именно поэтому выражение (32) описывает спектр однозначной функции, которая получается суммированием ветвей многозначного риманова решения с соответствующими знаками [31]. Соответственно, и энергия римановой волны, вычисленная как интеграл по пространственным частотам от (32), убывает с течением времени. В работе [32] было показано, что выражение (32) качественно правильно описывает затухание случайной волны из-за образования разрывов.

Обсудим поведение акустической турбулентности на временах, много больших характерного времени образования разрывов. На больших временах парабола в уравнении (13) становится плавной функцией по сравнению с начальным распределением потенциала $s_0(x)$, а координаты её глобальных максимумов практически совпадают с координатами некоторых локальных минимумов зависимости $s_0(x)$ — нулями поля скорости $v_0(x)$ с положительной производной. Следовательно, на больших временах непрерывное случайное поле трансформируется в случайную пилообразную волну — последовательность ячеек с универсальным поведением поля внутри ячейки $v(x, t) = (x - y_k)/t$, но со случайным положением разделяющих их разрывов (рис. 3).

Таким образом, в результате формирования разрывов теряется вся информация о тонкой структуре поля, а по скорости разрыва можно определить лишь интегральную характеристику начального поля — интеграл начального поля скорости по интервалу $[y_k^+, y_k^-]$ между нулями

начального поля (см. (19)). Многократное слияние ячеек ведёт к росту общего масштаба турбулентности $L(t)$ (средней массы макрочастицы) и потере информации о тонкой структуре спектра. Темп слияния разрывов определяется статистическими характеристиками скоростей разрывов, которые, в свою очередь, зависят от начального потенциала (см. (18)). Общим свойством турбулентности на больших временах является установление статистической автомодельности [9, 10, 14, 15, 33]. В частности, для энергетического спектра имеет место соотношение

$$E(k, t) = \frac{L^3(t)}{t^2} \tilde{E}[kL(t)]. \quad (39)$$

Для энергии турбулентности из формулы (39) получаем

$$E(t) = \langle v^2(x, t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} E(k, t) dk = c^* \frac{L^2(t)}{t^2}, \quad (40)$$

где c^* — постоянная, определяемая интегралом от безразмерной функции $\tilde{E}(z)$, которая описывает форму спектра поля скорости. Таким образом, на стадии развитых разрывов свойства турбулентности определяются единственным параметром — внешним масштабом турбулентности $L(t)$. Ниже мы обсудим, какие статистические характеристики начального поля можно восстановить по характеристикам турбулентности в некоторый момент времени t .

Из решения уравнения Бюргера видно, что на больших временах свойства турбулентности определяются статистическими свойствами приращений $\Delta s_0 = s_0(x+L) - s_0(x)$ при больших разнесениях L . При гауссовой статистике начального поля свойства акустической турбулентности определяются асимптотическим поведением структурной функции $D_{0s}(x) = \langle [s_0(x+y) - s_0(y)]^2 \rangle$ начального потенциала. Таким образом, сценарий развития турбулентности определяется поведением крупномасштабной части начального энергетического спектра поля скорости. Будем считать, что спектральная плотность на больших масштабах (т. е. при малых волновых числах k) имеет степенной характер:

$$E_0(k) = \alpha^2 |k|^n b_0(k), \quad (41)$$

где n — показатель степени, функция $b_0(k) \approx 1$ в области волновых чисел $k < k_0$ и достаточно быстро спадает при $k > k_0$. Поведение структурной функции на больших расстояниях определяется низкочастотной частью спектра поля скорости. При $n > 1$ начальный потенциал $s_0(x)$, входящий в формулу (13), статистически однороден и обладает конечной дисперсией:

$$\sigma_s^2 \equiv \langle s_0^2(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{E_0(k)}{k^2} dk. \quad (42)$$

Если же $n < 1$, то дисперсия потенциала неограничена, а сам он характеризуется статистически однородной структурной функцией, которая существует только при $n > -1$:

$$D_{0s}(x) \approx \alpha^2 |x|^{1-n}, \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (43)$$

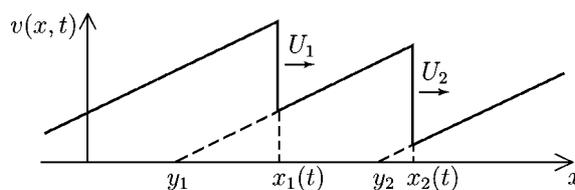


Рис. 3. Структура поля скорости на стадии развитых разрывов

Оценим качественно законы роста внешнего масштаба турбулентности $L(t)$, исходя из асимптотического решения уравнения Бюргера (12) и (13). Приращение потенциала s_0 может быть оценено как корень из структурной функции (43), а характерный масштаб $L(t) \approx |x - y|$. При фиксированной координате x максимум в уравнении (13) соответствует точке $y(x, t)$, для которой приращения потенциала $s_0(y)$ сравнимы с изменением параболического слагаемого $(x - y)^2/(2t)$. Это приводит к следующему соотношению для масштаба турбулентности $L(t)$:

$$\sqrt{D_{0s}(L)} \sim L^2/t. \quad (44)$$

Таким образом, в зависимости от показателя степени n начального спектра (41) для больших времён имеем два качественно разных закона роста пространственного масштаба $L(t)$ и, соответственно, затухания энергии $E(t)$. При $n > 1$ имеем соотношения

$$L(t) \approx (\sigma_s t)^{1/2}, \quad E(t) \approx \sigma_s/t. \quad (45)$$

В этом случае по измерениям масштаба $L(t)$ или энергии $E(t)$ в момент времени t мы можем оценить дисперсию σ_s^2 начального потенциала. В этом случае спектр поля скорости имеет универсальную асимптотику как в области низких пространственных частот ($E(k, t) \propto k^2 t^{1/2}$), так и в области высоких пространственных частот ($E(k, t) \propto k^{-2} t^{-3/2}$), и информация о форме начального спектра полностью теряется. Начальная стадия процесса установления автомодельной стадии наблюдалась в экспериментах по распространению интенсивного акустического шума в трубах [34]. Отметим, что для одномерной турбулентности Бюргера с ограниченной дисперсией начального распределения потенциала (а также трёхмерного уравнения Бюргера, которое используется для модельного описания крупномасштабной структуры Вселенной) при этом удаётся дать практически исчерпывающее статистическое описание [9, 10, 14, 15, 35]. В частности, найдены одноточечные и двухточечные вероятностные распределения поля скорости, N -точечные вероятностные распределения, а соответственно, и многоточечные моментные функции поля скорости. Такой анализ удаётся провести, поскольку на больших временах парабола в уравнении (13) становится плавной функцией по сравнению с начальным распределением потенциала $s_0(x)$, и за право быть абсолютным минимумом в этом уравнении (13) конкурирует большое число локальных минимумов зависимости $s_0(x)$. Это позволило использовать для анализа турбулентности Бюргера на больших временах статистическую теорию больших выбросов [36]. Строгое рассмотрение приводит к появлению в выражениях для внешнего масштаба турбулентности и её энергии (45) медленно меняющегося логарифмического множителя.

При неограниченной начальной дисперсии ($n < 1$) из формулы (44) имеем соотношения

$$L(t) \approx (\alpha t)^{2/(3+n)}, \quad E(t) \approx \alpha^{4/(3+n)} t^{-2(n+1)/(3+n)}. \quad (46)$$

Таким образом, как рост пространственного масштаба турбулентности $L(t)$ (уменьшение ширины k^* пространственного спектра $E(k, t)$, $k^*(t) \approx 1/L(t)$), так и затухание энергии происходят с ростом t по степенному закону. Следовательно, по этим зависимостям, в принципе, можно определить, какой тип начальных условий соответствует данным законам роста масштаба $L(t)$ и затухания энергии $E(t)$, а при $n < 1$ найти как показатель степени n начального спектра, так и «амплитуду» начального спектра α^2 . Следовательно, в этом случае мы имеем информацию только о низкочастотной части спектра и спектр $E(k, t)$ в области низких пространственных частот повторяет начальный спектр $E_0(k)$. Более того, при $n < 1$ высокочастотная часть спектра практически не влияет на эволюцию турбулентности на больших временах [37], и, таким образом, сохраняется не только энергетический спектр в области низких пространственных частот, но и сами низкочастотные компоненты. В работе [37] было показано, что на больших временах

два сигнала с одинаковой низкочастотной частью спектра, но существенно различными высокочастотными компонентами (так что их взаимный коэффициент корреляции $r_{12}(0) \approx 0$) преобразуются в пилообразные волны с взаимным коэффициентом корреляции $r_{12}(t) \approx 1$. Это значит, что после фильтрации пилообразной волны можно восстановить низкочастотную составляющую исходного поля.

Более строгое рассмотрение показывает [38], что при $1 < n < 2$ складывается нетривиальная ситуация. При $n < 2$ имеет место сохранение начального спектра $E(k, t)$ в области малых волновых чисел k , что является спектральной формой принципа «permanence of large eddies» (PLE) [23, 38]. В пространстве Фурье предположение об автомодельности (39) совместно с PLE дают те же самые законы роста внешнего масштаба и затухания энергии турбулентности, которые следуют из формул (46). Однако применимость этого закона ограничена условием $n \leq 1$. Таким образом, при $1 < n < 2$ при больших, но конечных временах мы имеем частичную потерю автомодельности: рост внешнего масштаба $L(t)$ и затухание энергии $E(t)$ турбулентности по-прежнему определяются выражением (45) и основная часть спектра ведёт себя так же, как при $n \geq 2$. Однако низкочастотная часть спектра при этом сохраняется, $E(k, t) = E_0(k) = \alpha^2 |k|^n$, и переходит в универсальный закон $E(k, t) \propto k^2 t^{1/2}$. С течением времени граница излома спектра сдвигается в сторону всё более низких пространственных частот быстрее, чем уменьшается координата максимума спектра $k_m(t) \propto 1/L(t) \propto 1/t$. Таким образом, и в этом случае асимптотически устанавливается автомодельный режим и, следовательно, по законам роста внешнего масштаба и убывания энергии турбулентности можно восстановить лишь дисперсию начального распределения потенциала $s_0(x)$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрены обратные задачи нелинейной акустики и акустической турбулентности. На основе одномерного уравнения Бюргера при нулевой и исчезающе малой вязкости обсуждается принципиальная возможность восстановления параметров исходного сигнала по измерениям сигнала вдали от источника. На начальной стадии, когда поле описывается уравнением Римана, возможно полное восстановление исходной волны. На разрывной стадии по полю можно восстановить лишь интегральные характеристики начального поля, т. е. происходит потеря информации о тонкой структуре исходной волны. Для шумовых сигналов общим свойством является установление статистической автомодельности и, в частности, потеря информации о тонкой структуре начального спектра. Показано, что если в исходном сигнале отсутствовали крупномасштабные компоненты спектра, то по законам роста внешнего масштаба и убывания энергии турбулентности можно восстановить лишь дисперсию начального распределения потенциала — интеграла от поля скорости. Если же в исходном поле крупномасштабные компоненты были достаточно интенсивными, то, несмотря на сильное нелинейное искажения профиля волны и образование разрывов, возможно восстановление крупномасштабных компонент исходного сигнала.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 14-12-00882).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Руденко О. В. // Дефектоскопия. 1993. Т. 29, № 8. С. 24.
2. Руденко О. В. // Успехи физ. наук. 2006. Т. 176, № 1. С. 77.
3. Руденко О. В. // Успехи физ. наук. 2007. Т. 177, № 7. С. 374.

4. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 287 с.
5. Rudenko O. V., Soluyan S. I. Theoretical foundations of nonlinear acoustics. New York, Plenum, Consultants Bureau, 1977. 274 p.
6. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. М.: Наука, 1979. 383 с.
7. Rudenko O. V., Gurbatov S. N., Hedberg C. M. Nonlinear acoustics through problems and examples. Victoria, BC, Trafford, 2010. 178 p.
8. Burgers J. M. // Kon. Ned. Akad. Wet. Verh. 1939. V. 17. P. 1.
9. Гурбатов С. Н., Малахов А. Н., Саичев А. И. Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии / Сер. «Современные проблемы физики». М.: Наука, 1990. 216 с.
10. Gurbatov S. N., Malakhov A. N., Saichev A. I. Nonlinear random waves and turbulence in nondispersive media: Waves, rays, particles. Manchester Univ. Press, 1991. 308 p.
11. Руденко О. В. // Успехи физ. наук. 1995. Т. 165. С. 1011.
12. Woyczynski W. A. Burgers–KPZ turbulence Gottingen Lectures. Berlin: Springer-Verlag, 1998. 318 p.
13. Вес J., Khanin K. // Phys. Reports. 2007. V. 447. P. 1.
14. Гурбатов С. Н., Руденко О. В., Саичев А. И. Волны и структуры в нелинейных средах без дисперсии. Приложения к нелинейной акустике. М.: Физматлит, 2008. 496 с.
15. Gurbatov S. N., Rudenko O. V., Saichev A. I. Waves and structures in nonlinear nondispersive media. General theory and applications to nonlinear acoustics. Berlin: Springer-Verlag and НЕР, 2012. 472 p.
16. Гурбатов С. Н., Саичев А. И., Шандарин С. Ф. // Успехи физ. наук. 2012. Т. 182, № 3. С. 233.
17. Burgers J. M. The nonlinear diffusion equation. Dordrecht: D. Reidel, 1974. 185 p.
18. Тихонов А. Н., Арсеньев В. Я. Методы решения некорректно поставленных задач. М.: Наука, 1974. 224 с.
19. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
20. Руденко О. В. // Успехи физ. наук. 2013. Т. 183, № 3. С. 719.
21. Назаров В. Е., Кияшко С. Б. // Изв. вузов. Радиофизика. 2015. Т. 58, № 1. С. 31.
22. Gurbatov S. N., Troussov A. V. // Phys. D. 2000. V. 145, № 1–2. P. 47.
23. Frisch U. Turbulence. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1995. 296 p.
24. Frisch U., Вес J. Burgulence. In: M. Lesieur, A. Yaglom, and F. Davyd (Eds), Les Houches 2000: New trends in turbulence. P. 341. Springer EDP-Sciences. 2001.
25. Webster D. A., Blackstock D. T. // J. Acoust. Soc. Am. 1979. V. 65. P. 1053.
26. Руденко О. В., Чиркин А. С. // Докл. АН. 1974. Т. 214, № 5. С. 1045.
27. Саичев А. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1974. Т. 17, № 7. С. 1025.
28. Гурбатов С. Н., Малахов А. Н., Прончатов—Рубцов Н. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29, № 6. С. 691.
29. Гурбатов С. Н., Малахов А. Н., Прончатов—Рубцов Н. В. // Акуст. журн. 1987. Т. 33, № 5. С. 944.
30. Monin A. S., Yaglom A. M. Statistical fluid mechanics: Mechanics of turbulence. New York: Dover Publ., 1987. 1643 p.
31. Gurbatov S. N., Saichev A. I. // Chaos. 1993. V. 3, № 3. P. 333.
32. Gurbatov S. N., Rudenko O. V. // Phys. Rev. E. 2014. V. 90. Art. no. 032924.
33. Noullez A., Gurbatov S. N., Aurel E., Simdyankin S. I. // Phys. Rev. E. 2005. V. 71. Art. no. 056305.
34. Бьерно Л., Гурбатов С. Н. // Акуст. журн. 1985. Т. 31, № 3. С. 303.
35. Molchanov S. A., Surgailis D., Woyczynski W. A. // Comm. Math. Phys. 1995. V. 168, № 1. P. 209.
36. Leadbetter M. R., Lindgren G., Rootzen H. Extremes and Related Properties of Random Sequences

and Processes. Berlin: Springer, 1983. 336 p.

37. Гурбатов С. Н., Пасманик Г. В. // Журн. exper. теор. физ. 1999. Т. 115, № 2. С. 564.

38. Gurbatov S., Simdyankin S., Aurell E., et al. // J. Fluid Mech. 1997. V. 344. P. 349.

Поступила в редакцию 1 июня 2015 г.; принята в печать 30 июня 2015 г.

ON THE INVERSE PROBLEMS OF NONLINEAR ACOUSTICS AND ACOUSTIC TURBULENCE

S. N. Gurbatov and O. V. Rudenko

We consider the problem of retrieval of the radiated acoustic signal parameters from the measured wave field in some cross section of the nonlinear medium. The possibilities of solving regular and statistical inverse problems are discussed on the basis of the solution of the Burgers equation for zero and infinitesimal viscosities.