УДК 550.837+550.838

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ НИЗКОЧАСТОТНОЙ ДИАГНОСТИКИ ЗЕМНОЙ КОРЫ

К. П. Гайкович[1,3 *], *А. И. Смирнов*[2,3]

[1] Институт физики микроструктур РАН;
[2] Институт прикладной физики РАН;
[3] Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия

Применительно к задачам многочастотной электромагнитной диагностики структуры земной коры в диапазонах крайне низких и ультранизких частот развиты и апробированы в численном моделировании методы компьютерной томографии распределённых подповерхностных неоднородностей проводимости среды и голографии (т. е. восстановления формы) сплошных и однородных по своему составу подповерхностных объектов. В основе этих методов лежит решение обратной задачи рассеяния по данным многочастотных измерений распределения комплексных амплитуд электромагнитного поля на поверхности исследуемой среды.

ВВЕДЕНИЕ

Низкочастотное электромагнитное зондирование земной коры осуществляется на частотах от тысячных долей герца до сотен герц с использованием как естественных источников (геомагнитная активность), так и когерентных сигналов, излучаемых антеннами [1, 2], роль которых могут, в частности, выполнять трубопроводы и линии электропередач. Глубина проникновения электромагнитных волн в Землю зависит от частоты и может достигать в этом диапазоне нескольких километров, что и позволяет осуществить диагностику. На данных глубинах земная кора имеет, как правило, слоистую структуру, и измеренные на поверхности Земли частотные спектры электрического и магнитного полей являются исходными данными для восстановления профиля геоэлектрического разреза (проводимости), который представляет большой интерес при решении задач геофизики и геологии. Но даже такая одномерная обратная задача чрезвычайно сложна. Впервые она была сформулирована А. Н. Тихоновым в работе [3], где она решалась для многослойной среды методом минимизации функционала невязки. В дальнейшем теория и методы решения этой задачи получили развитие в его монографиях [4, 5].

В наших работах продолжено развитие алгоритмов, которые предназначены для решения некорректных обратных задач и основаны на математически строгих методах регуляризации. Так, в работе [6] одномерная обратная задача низкочастотного зондирования земной коры была поставлена на классе непрерывных функций. Также был предложен алгоритм решения нелинейного интегрального уравнения 1-го рода, получаемого из теории возмущений. В работах [7, 8] представлены результаты численного моделирования такой задачи на основе разработанного итерационного алгоритма с использованием метода обобщённой невязки Тихонова. Однако при моделировании сильноконтрастных неоднородностей данный алгоритм мог приводить к расходимости, начиная со второй–третьей итерации. Поэтому в работе [9] были начаты исследования возможностей нового в теории нелинейных некорректных обратных задач метода двойственной регуляризации [10], основанного на обобщении лагранжевого подхода в теории оптимизации. Его эффективность была продемонстрирована в численном моделировании [11].

* gai@ipm.sci-nnov.ru

Быстрое развитие вычислительных средств позволило применить идеи многочастотного электромагнитного зондирования земной коры для диагностики трёхмерных (объёмных) неоднородностей проводимости по данным многочастотного двумерного сканирования рассеянного электромагнитного поля над земной поверхностью. Были развиты методы восстановления параметров таких неоднородностей (методы компьютерной томографии) с применением различных подходов к решению обратной задачи рассеяния, которая формулировалась в рамках трёхмерных интегральных уравнений теории возмущений для электромагнитного поля (см. монографию [12]). При этом использовалось сведение этих уравнений к более простой системе с последующей регуляризацией по Тихонову [13, 14], параметризация [15], а также статистические [16] и нейросетевые [17] подходы.

Сложность решения трёхмерных нелинейных некорректных обратных задач состоит в принципиальных ограничениях на размерность дискретизации в алгоритмах и, как следствие, на достижимую разрешающую способность. Так, например, задавая размерность в 100 элементов по каждой координате, получаем, что для 6-мерного ядра решаемого трёхмерного уравнения в памяти компьютера необходимо хранить 10^{12} чисел, что делает необходимым использование суперкомпьютеров. Именно по этой причине во всех цитированных выше работах используются различные упрощающие приближения, применяются параметризация и моделирование, уменьшающие размерность искомого распределения, из различных соображений вводятся близкие к решению первые приближения и используются методы, не имеющие достаточного обоснования.

Ограничения на размерность дискретизации удаётся преодолеть с помощью развитого нами подхода [18, 19], основанного на сведении трёхмерных интегральных уравнений к уравнениям типа свёртки по поперечным координатам. Это позволяет путём двумерного преобразования Фурье свести задачу к многократному решению одномерного интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода для каждой пары компонент поперечного спектра в пространстве волновых векторов. В работах [8, 18, 19] было показано, что предложенное упрощение возможно в случаях, когда зондирующее поле представляет собой локально плоскую волну, что, в частности, имеет место в задаче геомагнитного зондирования, а также при сканировании жёстко связанной системой источник—приёмник. Такая схема реализована нами как метод ближнепольной многочастотной томографии на сверхвысоких частотах [20], эффективность которого была продемонстрирована экспериментально в случае диэлектрических неоднородностей в грунте, расположенных в ближней зоне антенной системы. Для сплошных внутренне однородных объектов, которые полностью определяются формой своей поверхности, в работах [20, 21] был развит метод визуализации этой поверхности, т. е. решена задача компьютерной голографии.

В данной работе опыт, накопленный при решении задач подповерхностного сверхвысокочастотного зондирования, используется нами в качестве основы для развития алгоритмов многочастотной томографии и голографии объёмных неоднородностей проводимости земной коры в диапазонах крайне низких (КНЧ) и ультранизких (УНЧ) частот. Кроме того, на случай сильно проводящих сред здесь обобщается предложенный в работе [20] способ селекции полей, рассеянных от поверхностных и подповерхностных неоднородностей, с помощью преобразования данных измерений на разных частотах в определённым образом синтезированный псевдоимпульс. Проведённое численное моделирование наглядно демонстрирует эффективность применяемых методов для решения обратной задачи низкочастотной диагностики земной коры.

1. ТОМОГРАФИЯ И ГОЛОГРАФИЯ СЛАБОКОНТРАСТНЫХ ТРЁХМЕРНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ ПРОВОДИМОСТИ ЗЕМНОЙ КОРЫ

Пусть сторонний источник тока, характеризуемый плотностью $\mathbf{j}(\mathbf{r})\exp(-i\omega t)$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, t — время, ω — круговая частота, расположен в вакууме $(z > 0)$ над полупространством $z < 0$, заполненным средой с комплексной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_- = \varepsilon_0+\varepsilon_1(\mathbf{r})$. Ось z декартовой системы координат (x, y, z) направлена вверх, причём точка $z = 0$ соответствует границе с вакуумом, а оси x, y направлены вдоль границы. Возбуждаемое таким источником электромагнитное поле удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = \frac{i\omega}{c}\,\mathbf{H}, \tag{1}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} + \frac{i\omega}{c}\,[\bar\varepsilon(z) + \varepsilon_1(\mathbf{r})]\,\mathbf{E} = \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}(\mathbf{r}), \tag{2}$$

где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — комплексные амплитуды напряжённости электрического и магнитного полей, c — скорость света в вакууме, при $z > 0$ величина $\varepsilon_1 = 0$ и $\bar\varepsilon = 1$, а при $z < 0$ плотность тока $\mathbf{j} = 0$ и $\bar\varepsilon = \varepsilon_0$.

Перенесём в правую часть слагаемое, пропорциональное $\varepsilon_1(\mathbf{r})$, и будем рассматривать его в качестве эффективного источника рассеянного излучения с плотностью тока $\mathbf{j}_{\rm eff} = -i\omega\varepsilon_1(\mathbf{r})\mathbf{E}/(4\pi)$:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} + \frac{i\omega}{c}\,\bar\varepsilon(z)\mathbf{E} = -\,\frac{i\omega}{c}\,\varepsilon_1\mathbf{E} + \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j} = \frac{4\pi}{c}\,(\mathbf{j}_{\rm eff} + \mathbf{j}). \tag{3}$$

Используя формализм функций Грина, рассчитанных для среды с диэлектрической проницаемостью $\bar\varepsilon(z)$, можно записать интегральные соотношения, связывающие между собой напряжённость электрического поля в вакууме $\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r})$ при $z > 0$ и напряжённость электрического поля в среде $\mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r})$ при $z < 0$ [19]:

$$\begin{aligned} E_i^{(1)}(\mathbf{r}) &= E_{0i}^{(1)}(\mathbf{r}) + E_{1i}^{(1)}(\mathbf{r}) = E_{0i}^{(1)}(\mathbf{r}) - \frac{i\omega}{4\pi}\int\limits_{V'} \varepsilon_1(\mathbf{r}')E_j^{(2)}(\mathbf{r}')G_{ji}^{21}(x-x', y-y', z, z')\,\mathrm{d}^3r',\\ E_i^{(2)}(\mathbf{r}) &= E_{0i}^{(2)}(\mathbf{r}) + E_{1i}^{(2)}(\mathbf{r}) = E_{0i}^{(2)}(\mathbf{r}) - \frac{i\omega}{4\pi}\int\limits_{V'} \varepsilon_1(\mathbf{r}')E_j^{(2)}(\mathbf{r}')G_{ji}^{22}(x-x', y-y', z, z')\,\mathrm{d}^3r', \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$\begin{aligned} E_{0i}^{(2)}(\mathbf{r}) &= \int\limits_{V'} j_j(\mathbf{r}')G_{ji}^{12}(x-x', y-y', z, z')\,\mathrm{d}^3r',\\ E_{0i}^{(1)}(\mathbf{r}) &= -\,\frac{i\omega}{4\pi}\int\limits_{V'} j_j(\mathbf{r}')G_{ji}^{11}(x-x', y-y', z, z')\,\mathrm{d}^3r'. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь предполагается суммирование по повторяющимся индексам i и j, принимающим значения x, y или z, $G_{ji}^{kl}(x-x', y-y', z, z')$ — компоненты тензорной функции Грина, каждая из которых равна значению в точке $\mathbf{r} = (x, y, z)$ i-й проекции электрического поля, созданного в среде с диэлектрической проницаемостью $\bar\varepsilon(z)$ j-й компонентой плотности тока точечного стороннего источника $j_j \propto \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$, верхние индексы k, l принимают два значения и идентифицируют среды, в которых расположен источник и создаваемое им поле (полупространство $z > 0$ отвечает индексу 1, $z < 0$ отвечает индексу 2). Поля $\mathbf{E}_1^{(1)}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{E}_1^{(2)}(\mathbf{r})$ — поля рассеяния в средах 1 и 2 соответственно.

Выражения (5) определяют соответствующую заданному распределению плотности тока $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ структуру невозмущённого зондирующего поля $\mathbf{E}_0^{(1)}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{E}_0^{(2)}(\mathbf{r})$. Нас интересует обратная задача восстановления неоднородной поправки $\varepsilon_1(\mathbf{r})$ к диэлектрической проницаемости по полю рассеяния в вакууме $\mathbf{E}_1^{(1)}(\mathbf{r})$, которое согласно уравнению (4), равно

$$E_{1i}^{(1)}(\mathbf{r}) = -\frac{i\omega}{4\pi}\int\limits_{V'} \varepsilon_1(\mathbf{r}')E_j^{(2)}(\mathbf{r}')G_{ji}^{21}(x-x', y-y', z, z')\,\mathrm{d}^3r'. \tag{6}$$

При этом так же, как и в работах [18–20], будем считать известными данные многочастотных измерений компонент поперечного распределения рассеянного поля $E_{1i}^{(1)}(x,y,z_0,\omega)$ в плоскости $z = z_0 > 0$ над поверхностью зондируемой среды.

Решение обратной задачи (6) естественно начать с так называемого борновского приближения, когда в интеграл вместо $E_j^{(2)}$ подставляется невозмущённое зондирующее поле $E_{0j}^{(2)}$ из (5):

$$E_{1i}^{(1)}(x,y,z_0,\omega) = -\frac{i\omega}{4\pi}\int\limits_{V'} \varepsilon_1(\mathbf{r}',\omega)E_{0j}^{(2)}(\mathbf{r}',\omega)G_{ji}^{21}(x-x', y-y', z_0, z',\omega)\,\mathrm{d}^3r'. \tag{7}$$

Как уже отмечалось выше, численное решение данной трёхмерной задачи имеет серьёзные ограничения на размерность дискретизации и, тем самым, на достижимую разрешающую способность. В работах [17, 19] были предложены методы сведения интегрального уравнения (7) к свёртке по поперечным координатам. Один из таких методов основан на предположении, что зондирующее поле представляет собой плоскую волну. В среде это поле разлагается на сумму компонент с параллельной и перпендикулярной по отношению к плоскости падения поляризацией электрического поля

$${}^{\alpha}E_{0i}^{(2)}(\mathbf{r}') = {}^{\alpha}E_{0i}^{(2)}\,{}^{\alpha}T^{12}(\kappa_x,\kappa_y)\exp\Big(i\kappa_x x' + i\kappa_y y' - i\sqrt{k^2-\kappa_\perp^2}\,z'\Big), \tag{8}$$

где ${}^{\alpha}T^{12}$ — коэффициенты прохождения волны из вакуума в среду при параллельной ($\alpha = \|$) и перпендикулярной ($\alpha = \perp$) поляризациях [19], $k = \omega\sqrt{\varepsilon_0}/c$, ${}^{\alpha}E_{0i}$ — значение невозмущённого поля в начале координат в проекции на ось i. Используя формулу свёртки произведения функции на экспоненту, получаем из (6) одномерное уравнение для глубинного профиля поперечного спектра неоднородности

$$E_{1i}^{(2)}(k_x,k_y,z_0,\omega) = -i\pi\omega\int\limits_{z'} \varepsilon_1(k_x-\kappa_x, k_y-\kappa_y, z',\omega)E_{0j}^{(2)}(\kappa_x,\kappa_y,z',\omega)G_{ji}^{21}(k_x,k_y,z_0,z',\omega)\,\mathrm{d}z', \tag{9}$$

где компоненты тензорной функции Грина в пространстве волновых векторов (k-пространстве) получены в явном виде для произвольной многослойной среды путём разложения поля источника по плоским волнам с использованием формализма метода входных импедансов [19]. Здесь и далее для краткости для поперечных спектров за немногими исключениями используются те же обозначения, что и для самих функций; их идентификация осуществляется по соответствующим аргументам. Многократное решение (9) для каждой пары k_x, k_y даёт решение задачи в k-пространстве, из которого путём обратного фурье-преобразования получается искомое трёхмерное распределение $\varepsilon_1(x,y,z,\omega)$.

Описанная выше ситуация имеет место при КНЧ и УНЧ геомагнитном зондировании земной коры с использованием поля удалённых источников естественного происхождения. Тогда для низкочастотных радиоволн выполняются граничные условия Леонтовича и зондирующее поле в проводящей среде можно считать локально плоской волной, распространяющейся вглубь по нормали к земной поверхности, а земную кору — проводником с чисто мнимой диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon'' \approx 4\pi i\sigma_0/\omega$, определяемой проводимостью σ_0. В случае однородной среды точное решение уравнений Максвелла с граничными условиями

$$E_x(z=0,\omega) = E_{0y}(\omega), \qquad H_y(z=0,\omega) = H_{0y}(\omega) \tag{10}$$

на поверхности $z = 0$ имеет вид

$$E_x(\omega,z) = E_{0x}(\omega)\exp(z/\delta - iz/\delta), \tag{11}$$

$$H_y(\omega,z) = -\,\frac{c\,(i+1)}{\omega\delta}\,E_x(\omega,z) = -\,\frac{1}{Z}\,E_x(\omega,z) = H_{0y}(\omega)\exp(z/\delta - iz/\delta), \tag{12}$$

где $\delta = c/\sqrt{2\pi\omega\sigma_0}$ — толщина скин-слоя, Z — импеданс среды, который в случае однородной среды определяется её проводимостью. Отклонение импеданса от значения, рассчитанного для поверхностной проводимости, является индикатором наличия подповерхностной неоднородности и входным параметром в большинстве методов геомагнитного зондирования одномерно неоднородных геологических структур. Выражения (11) и (12) используются и при решении интегральных уравнений (4) и (7) в борновском приближении.

Если методом двумерного сканирования измеряются вариации компоненты E_x электрического поля на поверхности грунта ($z = 0$) в зависимости от частоты падающей волны в УНЧ диапазоне, то при выполнении граничных условий Леонтовича интегральное уравнение (9) для задачи томографии проводимости земной коры в борновском приближении записывается как

$$E_{1x}(\kappa_x,\kappa_y,\omega) =$$
$$= \frac{E_{0x}}{2i\sigma_0}\,\frac{\kappa_z\kappa_x^2\,{}^{\parallel}T^{21} + \kappa_y^2 k^{2\,\perp}T^{21}/\kappa_z}{\kappa_\perp^2}\int\limits_{-\infty}^{0}\sigma_1(\kappa_x,\kappa_y,z')\exp\Big(\frac{z'}{\delta} - \frac{iz'}{\delta}\Big)\exp\Big(-i\sqrt{k^2-\kappa_\perp^2}\,z'\Big)\,\mathrm{d}z', \tag{13}$$

где $\sigma_1(\kappa_x,\kappa_y,z')$ — глубинный профиль поперечного спектра неоднородности проводимости, ${}^{\alpha}T^{21}$ — коэффициенты прохождения электромагнитного поля из среды в вакуум при параллельной ($\alpha = \parallel$) и перпендикулярной ($\alpha = \perp$) поляризациях.

Аналогичное уравнение получается для y-компоненты магнитного поля H_{1y}:

$$H_{1y}(\kappa_x,\kappa_y,\omega) =$$
$$= H_{0y}\,\frac{\kappa_x^{2\,\parallel}T^{21} + \kappa_y^{2\,\perp}T^{21}}{\kappa_\perp^2}\,\frac{(1+i)\,\omega\delta}{c^2}\int\limits_{-\infty}^{0}\sigma_1(\kappa_x,\kappa_y,z')\exp\Big(\frac{z'}{\delta} - \frac{iz'}{\delta}\Big)\exp\Big(-i\sqrt{k^2-\kappa_\perp^2}\,z'\Big)\,\mathrm{d}z'. \tag{14}$$

Уравнения (13) и (14) являются уравнениями Фредгольма 1-го рода для глубинного распределения поперечных спектральных компонент неоднородности проводимости. Можно видеть, что вклад неоднородностей среды в возмущение поля экспоненциально спадает на масштабе скин-слоя δ, величина которого зависит от частоты, возрастая с уменьшением последней. Этот факт и лежит в основе метода глубинного УНЧ зондирования. Вместе с тем в подынтегральной функции уравнений (13) и (14) есть ещё один экспоненциально затухающий при удалении в глубь среды множитель, который проявляется для больших поперечных волновых чисел и связан ближнепольными компонентами поперечного спектра поля рассеяния.

Для зондирования с использованием искусственных источников зондирующего поля трёхмерное уравнение (7) в общем случае уже не является уравнением типа свёртки и не может быть сведено к одномерному уравнению (9). Но в работе [19] показано, что для схемы измерений с жёстко связанной системой источник—приёмник, расстояние между которыми задано вектором $\delta\mathbf{r} = (\delta x, \delta y, \delta z)$, интегральное уравнение для электромагнитного поля в борновском приближении также имеет вид свёртки по поперечным координатам x и y, что позволяет путём двумерного преобразования Фурье получить одномерное интегральное уравнение для каждой пары компонент k_x, k_y поперечного спектра рассеянного поля. Данный подход был реализован в эксперименте как метод подповерхностной ближнепольной томографии неоднородностей в грунте на сверхвысоких частотах [20]. Его можно обобщить и на случай низкочастотного зондирования земной коры, когда соответствующее интегральное уравнение для электрического поля имеет вид

$$E_{1i}(k_x, k_y, z_0, \omega, z, \delta\mathbf{r}) = 16\pi^4 \int\limits_{z'} \sigma_1(k_x, k_y, z') \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\kappa_x \delta x - \kappa_y \delta y) \int\limits_{z'} \left[j_i(\kappa_x, \kappa_y, z'' - z - \delta z, \omega) \times \right.$$
$$\left. \times\, G_{ij}^{12}(\kappa_x, \kappa_y, z'', z', \omega) \right] G_{ji}^{21}(\kappa_x + k_x, \kappa_y + k_y, z', z, \omega) \,\mathrm{d}\kappa_x \,\mathrm{d}\kappa_y \,\mathrm{d}z'' \,\mathrm{d}z'. \quad (15)$$

В такой постановке зондирующее поле сильно локализовано вблизи источника, что обеспечивает лучшую разрешающую способность. Однако трудно создать системы сканирования для источников, имеющих большие размеры. Например, линии электропередач и трубопроводы, зачастую используемые в качестве низкочастотных антенн, заведомо не годятся для этой цели. Поэтому описанный подход можно применить лишь для зондирования подповерхностных неоднородностей на сравнительно небольших глубинах.

Здесь же, рассматривая задачу электромагнитной диагностики земной коры, мы подробно исследуем метод, основанный на решении уравнения (14) по данным многочастотных измерений магнитного поля, которое вблизи проводящей поверхности существенно превосходит электрическое.

Представим уравнение Фредгольма 1-го рода (14) в компактной форме

$$H(k_x, k_y, \omega) = \int\limits_{z'} \sigma_1(k_x, k_y, z') K(k_x, k_y, z', \omega) \,\mathrm{d}z', \quad (16)$$

где $K(k_x, k_y, z', \omega)$ — ядро уравнения.

В принципе, решение обратной задачи на основе этого уравнения вполне возможно, однако опыт использования аналогичного уравнения для подповерхностной диагностики в диапазоне сверхвысоких частот [20] показал, что полезный сигнал от подповерхностного объекта плохо различим на фоне шума, обусловленного рассеянием на поверхностных неоднородностях. Трудность удалось преодолеть путём трансформации многочастотных данных в синтезированный комплексный псевдоимпульс, в котором некоррелированная погрешность шума и полезный сигнал эффективно разделялись, и этот сигнал приобретал глубинную селективность:

$$H_1(x, y, t) = \int\limits_{\Delta\omega} H_1(x, y, \omega) \exp(i\omega t) \,\mathrm{d}\omega, \quad (17)$$

где $\Delta\omega$ — анализируемая полоса частот. В (17) удобно перейти от временно́го параметра к параметру эффективной глубины рассеивающего элемента z_{s} (с учётом скорости распространения в среде на пути до рассеивающего элемента и обратно) согласно равенству

$$H_1(x, k_y, z', z_{\mathrm{s}}) = H_1[k_x, k_y, z', z_{\mathrm{s}} = -ct/(2\,\mathrm{Re}\sqrt{\varepsilon_0})]. \quad (18)$$

В отличие от настоящего импульса, введённая в работе [20] величина (псевдоимпульс) является комплексной и описывается интегралом по ограниченной области частот $\Delta\omega$. Вместе с тем псевдоимпульс сохраняет такое важное свойство настоящего импульса, как селективность по дальности (в данном случае по глубине). На нём отчётливо видно положение поверхности, а в некотором интервале значений $z_{\rm s}$ — вклад зондируемого объекта. Это свойство позволяет локализовать и визуализировать область рассеяния от объекта в координатах $(x, y, z_{\rm s})$. Такая область, естественно, шире самого объекта, её границы размыты, но среднее глубинное положение объекта по координате z примерно соответствует положению визуализированного псевдоимульса по $z_{\rm s}$. Информация, полученная путём простой предварительной обработки данных измерений, позволяет радикально сузить область, в которой ищется решение задачи, что критически важно при решении некорректных уравнений рассматриваемого типа [19].

Чтобы воспользоваться указанными преимуществами, нужно применять трансформированное уравнение, связывающее глубинный профиль поперечного спектра неоднородности с поперечным спектром комплексного псевдоимпульса, которое сохраняет свой тип. В нём преобразуется только ядро:

$$H(k_x, k_y, z_{\rm s}) = \int\limits_{z'} \sigma_1(k_x, k_y, z') K_1(k_x, k_y, z', z_{\rm s})\, {\rm d}z', \tag{19}$$

$$K_1(k_x, k_y, z', z_{\rm s}) = \int\limits_{\Delta\omega} K(k_x, k_y, z', \omega) \exp(-2i\omega z_{\rm s} \,{\rm Re}\sqrt{\varepsilon_0}\,/c)\, {\rm d}\omega. \tag{20}$$

Его решение для каждой пары компонент поперечного спектра неоднородности проводимости получается с помощью алгоритма [19], основанного на методе обобщённой невязки Тихонова для комплекснозначных функций в гильбертовом пространстве Соболева W_2^1. Далее, используя для решения (19) обратное преобразование Фурье в k-пространстве, найдём искомое трёхмерное распределение

$$\sigma_1(x, y, z) = \iint \sigma_1(k_x, k_y, z) \exp(ik_x x + ik_y y)\, {\rm d}k_x\, {\rm d}k_y. \tag{21}$$

Это распределение можно визуализировать в сечении любой плоскостью, т. е. выполнить томографический анализ.

Поскольку проводимость земной коры лежит в широком интервале значений $10^{-5}\div 10^{-1}$ См/м, частотный интервал $\Delta\omega$ при решении обратной задачи (19) должен выбираться с учётом оценки толщины скин-слоя δ, которая должна соответствовать предполагаемой глубине зондирования. Так, для томографии неоднородностей на глубинах от 0,2 до 5÷7 км необходимо выполнение условия 0,1 км $< \delta <$ 10 км, которое требует проводить измерения при проводимости $\sigma_0 = 10^{-2}$ См/м в диапазоне частот 0,25 Гц $< f <$ 2 500 Гц, а при $\sigma_0 = 2\cdot 10^{-4}$ См/м — в интервале 12 Гц $< f <$ $<$ 125 000 Гц.

1.1. Томография распределённых неоднородностей

Нами был разработан алгоритм численной реализации метода компьютерной томографии подповерхностных неоднородностей, т. е. восстановления трёхмерного распределения неоднородности проводимости $\sigma_1(x, y, z)$ в зондируемой среде, основанного на решении уравнения (19), и выполнено соответствующее численное моделирование. В качестве входных данных при анализе использовались многочастотные «измерения» распределения комплексных амплитуд рассеянного поля $H_{1y}(x,y,\omega)$ в двумерной области над поверхностью среды с неоднородностью. Для использования этих данных в уравнении (19) их частотная зависимость преобразовывалась в поперечный спектр синтезированного псевдоимпульса $H_{1y}(x,y,z_{\rm s})$.

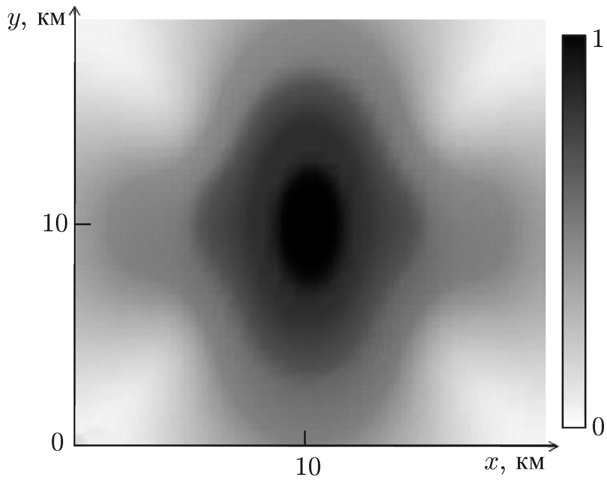

Рис. 1. Распределение нормированной амплитуды псевдоимпульса $|H_{1y}(x,y,z_{\rm s}=-4\text{ км})|/H_{\max}$

На рис. 1 показано поперечное распределение амплитуды псевдоимпульса для гауссовой неоднородности проводимости $\sigma_1(x,y,z) = \sigma_1^0 \exp[-(x-x_{\rm t})^2/\Delta x^2 - (y-y_{\rm t})^2/\Delta y^2 - (z-z_{\rm t})^2/\Delta z^2]$ с параметрами $\Delta x = 2$ км, $\Delta y = 3$ км, $\Delta z = 1$ км, расположенной на глубине $z_{\rm t} = -3{,}5$ км в среде с проводимостью $\sigma_1^0 = 0{,}01$ См/м в масштабе, нормированном на максимальное значение амплитуды $H_{\max}$.

Численное моделирование, основанное на решении уравнения (19), выполнялось по замкнутой схеме: для заданной неоднородности рассчитывалось двумерное распределение рассеянного поля у поверхности среды на частотах в выбранном диапазоне; добавлялась нормально распределённая случайная «ошибка измерений» с заданной дисперсией; вычислялись входные данные в уравнении (19) (поперечный спектр псевдоимпульса); методом Тихонова решалась обратная задача для каждой пары спектральных компонент; обратным фурье-преобразованием (21) вычислялось искомое трёхмерное распределение неоднородности проводимости, которое сравнивалось с исходным. В приведённых ниже результатах томографии хорошее восстановление обеспечивал уровень случайной погрешности 10 % в интегральной метрике, причём результат слабо зависел от вариаций уровня ошибки в пределах ±5 %.

На примере описанной выше гауссовой неоднородности продемонстрируем преимущество преобразования частотного спектра сигнала в синтезированный псевдоимпульс. На рис. 2 показаны поперечные распределения (по оси x в сечении $y = y_{\rm t}$) частотной зависимости падающего на поверхность поля для двух значений глубины неоднородности: $z_{\rm t} = -3{,}5$ и -7 км.

Можно видеть, что при уменьшении частоты неоднородность, лежащая ближе к поверхности (при $z_{\rm t} = -3{,}5$ км), начинает проявляться в сигнале раньше, чем расположенная глубже (при $z_{\rm t} = -7$ км), причём сигнал от последней приходит существенно более ослабленным. Очевидно, что по этим распределениям трудно судить о глубинной локализации зондируемого объекта.

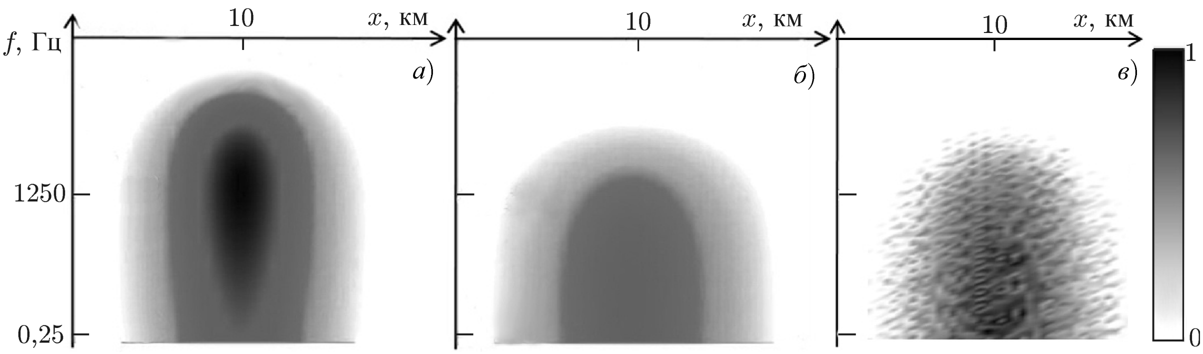

Рис. 2. Распределение нормированной амплитуды рассеянного поля $|H_{1y}(x,y,y_{\rm t},f)|/H_{\max}$ для гауссовой неоднородности на глубине $z_{\rm t} = -3{,}5$ км (*а*), на глубине $z_{\rm t} = -7$ км (*б*) и на глубине $z_{\rm t} = -7$ км с внесённой случайной ошибкой (*в*)

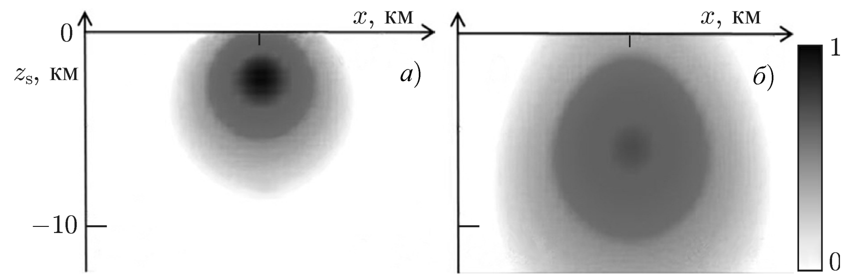

Рис. 3. Распределение нормированной амплитуды $|H_{1y}(x, y = y_t, f)|/H_{max}$ для гауссовой неоднородности на глубине $z_t = -3{,}5$ км ($а$) и на глубине $z_t = -7$ км ($б$)

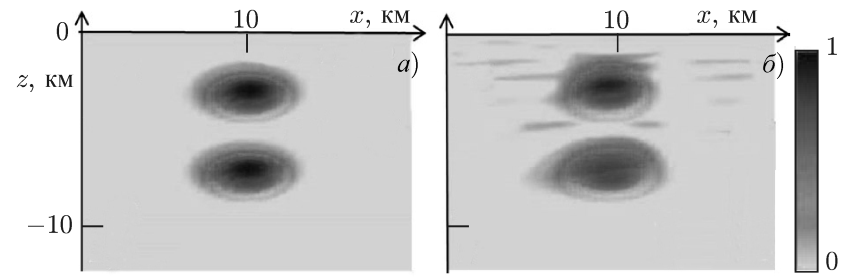

Рис. 4. Моделируемые ($а$) и восстановленные ($б$) распределения гауссовых неоднородностей проводимости (вертикальные сечения) через их центр

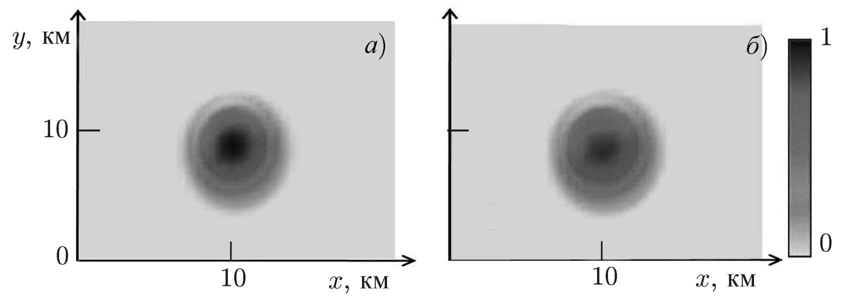

Рис. 5. Моделируемые ($а$) и восстановленные ($б$) распределения гауссовых неоднородностей проводимости (горизонтальные сечения через их центр)

На рис. 3 представлено распределение амплитуды псевдоимпульса по координатам (x, z_s) в сечении $y = y_t$, которое демонстрирует возможность приближенной локализации глубинного положения неоднородностей. Положения максимумов псевдоимпульса на оси параметра эффективной глубины рассеяния z_s приблизительно соответствуют глубинам зондируемых неоднородностей z_t. Такая визуализация позволяет выбрать информативные интервалы $\Delta x, \Delta y, \Delta z_s$, определяющие область используемых для анализа значений псевдоимпульса, а также интервалы $\Delta x, \Delta y, \Delta z = = \Delta z_s$, определяющие область, в которой ищется решение. Они представляют собой весьма важную априорную информацию для решения рассматриваемой некорректной задачи.

На рис. 4 показаны результаты численного моделирования решения обратной задачи, полученного по замкнутой схеме для описанной выше гауссовой неоднородности на глубинах $z_t = -3{,}5$ и -7 км в вертикальном сечении $y = y_t$. Восстановленные распределения получались путём обратного преобразования Фурье (21) решения обратной задачи (19). Результаты представлены в нормированном на максимум виде ($\sigma_1^0 = 1$).

Видно, что форма и положение восстановленных неоднородностей хорошо соответствует моделируемым распределениям. Для неоднородности на глубине $-3{,}5$ км погрешность значения проводимости в максимуме составляет около 10 %, а для неоднородности на глубине -7 км — около 20 %. Видно также, что с увеличением глубины происходит расплывание восстановленного распределения, что вполне естественно для решаемой некорректной задачи. На рис. 5 показаны результаты томографии в горизонтальном разрезе $z = z_t$ для гауссовой неоднородности на глубине $z_t = -3{,}5$ км.

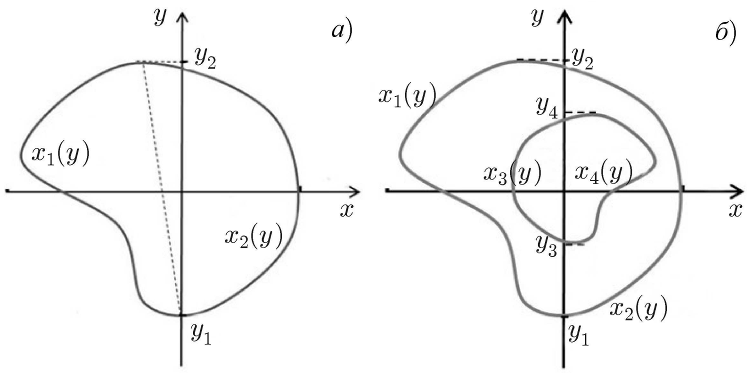

Рис. 6. Сечения $z' = \mathrm{const}$ сплошного объекта (*а*) и объекта с включением (*б*)

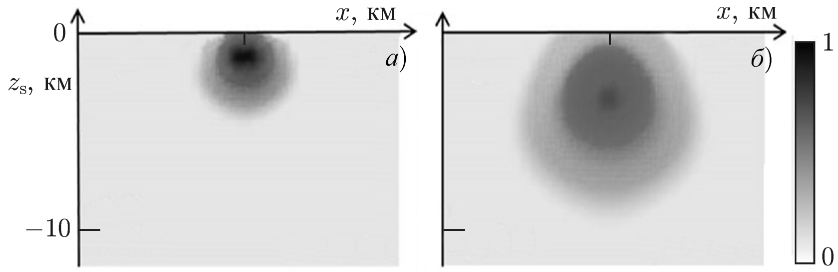

Рис. 7. Распределение нормированной амплитуды псевдоимпульса рассеянного поля $|H_{1y}(x, y = 10\ \text{км}, z_\mathrm{s})|/H_\mathrm{max}$ для гауссовой неоднородности на глубине $z_\mathrm{t} = -2$ км (*а*) и на глубине $z_\mathrm{t} = -4{,}5$ км (*б*)

1.2. Голография сплошных неоднородностей

Поскольку на практике большинство неоднородностей имеют внутренне однородную структуру, актуальным представляется решение задачи восстановления формы поверхности таких неоднородностей. Это позволяет визуализировать неоднородность в любом ракурсе, т. е. решить задачу компьютерной голографии. Для этого необходимо ввести в алгоритм дополнительную априорную информацию о постоянстве диэлектрических параметров внутри диагностируемого объекта. Здесь примени́м подход, развитый нами в работах [20, 21] для односвязных объектов в приложении к сверхвысокочастотному (СВЧ) зондированию. Он непосредственно использует восстановленный из решения уравнения (19) профиль поперечного спектра неоднородности в k-пространстве.

В декартовой системе координат, связанной с поверхностью среды, зададим форму поверхности однородного объекта ($\sigma_1 = \sigma_1^0 = \mathrm{const}$) функциями $x_1(y,z)$ и $x_2(y,z)$ (см. рис. 6*а*). Тогда для обратного фурье-преобразования этого спектра по k_y имеем уравнение, равносильное системе двух уравнений для его действительной и мнимой частей

$$\sigma_1(k_x, y, z) = \frac{\sigma_1^0}{2\pi i k_x} \Big\{ \exp[-ik_x x_1(y,z)] - \exp[-ik_x x_2(y,z)] \Big\}, \tag{22}$$

решение которого даёт функции $x_1(y,z)$, $x_2(y,z)$, задающие искомую форму поверхности объекта. Это уравнение в принципе разрешимо для любого значения k_x и является переопределённым. Численное моделирование показало, что лучшие результаты получаются при выборе $k_x \approx 2\pi/L$, где L — оценка поперечного размера неоднородности по визуализированному изображению псевдоимпульса.

Данный подход можно обобщить для случая, когда объект содержит односвязное включение с проводимостью $\sigma_1 = \sigma_1^{02} = \mathrm{const}$. Если искать форму включения, заданную функциями $x_3(y,z)$ и $x_4(y,z)$, в каждом сечении $z = \mathrm{const}$, как изображено на рис. 6*б*, то получаем систему комплексных

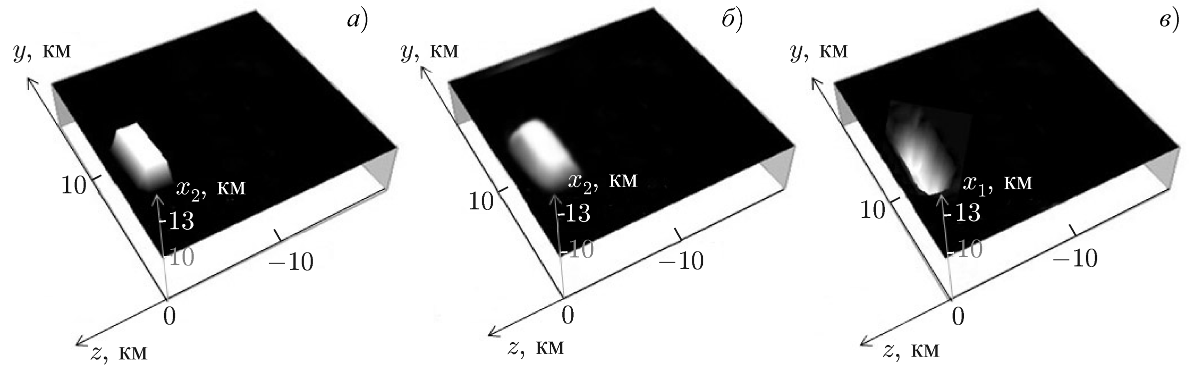

Рис. 8. Панель (*а*) — форма моделируемой неоднородности проводимости на глубине $z_{\rm t} = -2$ км (её часть, заданная функцией $x_2(y,z)$, по аналогии с рис. 6*а*), панели (*б*), (*в*) — соответствующие результаты голографического анализа, заданные в виде функций $x_2(y,z)$ и $x_1(y,z)$

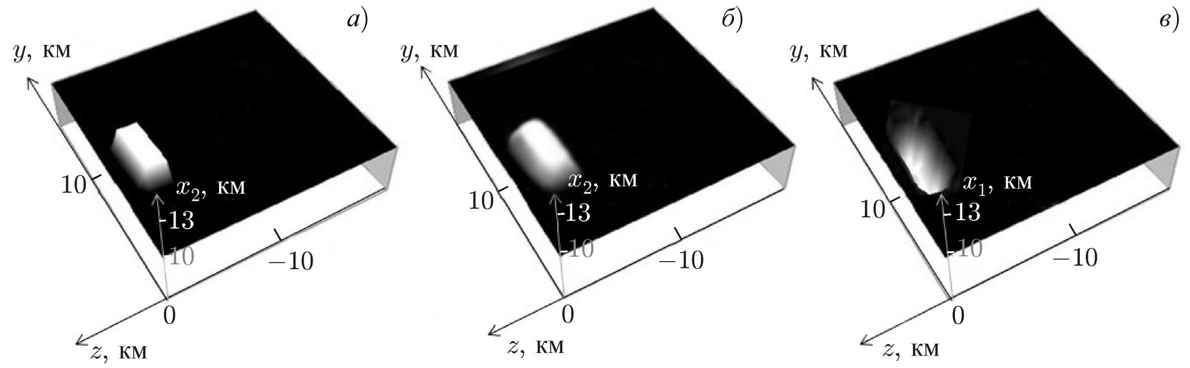

Рис. 9. Панель (*а*) — форма моделируемой неоднородности проводимости на глубине $z_{\rm t} = -4{,}5$ км (её часть, заданная функцией $x_2(y,z)$) и соответствующие результаты голографического анализа, заданные в виде функций $x_2(y,z)$ (панель *б*) и $x_1(y,z)$ (панель *в*)

уравнений для двух или более значений k_x:

$$\sigma_1(k_x,y,z) = \frac{\sigma_1^0}{2\pi i k_x}\Big\{\exp[-ik_x x_1(y,z)] - \exp[-ik_x x_2(y,z)]\Big\} + \\ + \frac{\sigma_1^{02}-\sigma_1^0}{2\pi i k_x}\Big\{\exp[-ik_x x_3(y,z)] - \exp[-ik_x x_4(y,z)]\Big\}. \qquad (23)$$

Следует отметить, что результаты томографического анализа нельзя использовать непосредственно для нахождения границ сплошного объекта как из-за расплывания резких особенностей при решении некорректной задачи с учётом погрешности данных, так и из-за принципиальных ограничений, связанных с тем, что для функций со скачками нарушается признак Дини поточечной сходимости рядов Фурье, которыми представляется численное решение (21), что приводит к искажению результата из-за эффекта Гиббса. Предложенный подход является последовательным решением рассматриваемой задачи.

Ниже представлены результаты численного моделирования «голографического» метода для неоднородности в форме параллелепипеда с размером $4 \times 4 \times 2$ км, расположенной на глубинах $z_{\rm t} = -2$ км и $-4{,}5$ км.

На рис. 7 изображены распределения амплитуды псевдоимпульса рассеянного поля. Видно, что положения максимумов псевдоимпульса на оси параметра эффективной глубины рассеяния $z_{\rm s}$ приблизительно соответствуют глубинам зондируемых неоднородностей. На рис. 8 и 9 представлены результаты голографического анализа, т. е. форма объекта, полученная из решения уравнения (22) и заданная в виде двух функций, как показано на рис. 6*a*. Видно, что восстановленная форма объекта на глубине $z_{\rm t} = -2$ км узнаваемым образом воспроизводит форму исходного параллелепипеда, хорошо соответствуя ей по положению и размерам. При более глубоком залегании объекта (рис. 9) происходит расплывание его контуров, но восстановленная форма в целом неплохо соответствует форме моделируемого объекта, его положению и размерам.

Сопоставляя приведённые на рис. 8, 9 результаты голографического анализа с результатами ближнепольной голографии на сверхвысоких частотах [20, 21], нетрудно заметить, что в рассматриваемом здесь случае существенно сложнее добиться сравнимой (в масштабе длин волн в среде) разрешающей способности. Это связано с использованием при СВЧ зондировании поля локализованного источника, а не плоской волны.

На рис. 10 представлено поперечное распределение псевдоимпульса для объекта той же формы, что и на рис. 1, с размерами $4\times4\times3$ км и полостью с размерами $2\times2\times1{,}5$ км для параметров $\sigma_0 = 5\cdot10^{-4}$ См/м, $\sigma_1^0 = 2\cdot10^{-3}$ См/м и $\sigma_1^{02} = 0$. На этом распределении можно различить слабоконтрастную светлую область в центральной части, которая соответствует положению полости.

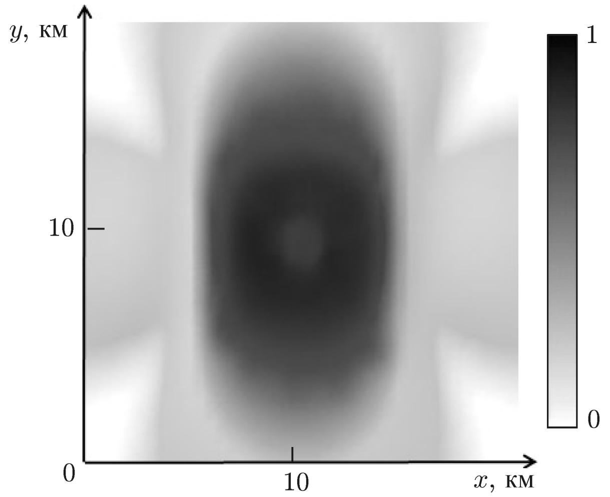

Рис. 10. Поперечное распределение нормированной амплитуды псевдоимпульса $|H_{1y}(x,y,z_{\rm s} = -2\text{ км})|/H_{\max}$

На рис. 11, 12 приведены томограммы распределения проводимости объекта в вертикальном и горизонтальном сечениях, полученные на основе решения уравнения (19) при уровне моделируемой случайной погрешности 3 %, т. е. более высоком, чем в рассмотренных выше примерах. Существенное повышение требований к точности данных для распределений с более сложной структурой типично для обратных задач, описываемых уравнением Фредгольма 1-го рода [16]. На рисунках можно видеть полость в полученных томографических изображениях, однако имеет место существенное расплывание и заглаживание её формы.

На рис. 13 приведены результаты голографического анализа на основе решения уравнения (23).

Таким образом, голографический анализ может быть эффективен для объектов с относительно неглубоким залеганием и простым односвязным включением. Он позволяет лучше судить о структуре объекта, чем томографические изображения, такие, как на рис. 11 и 12. Для более заглублённых объектов с включениями задача усложняется и требует такой высокой точности входных данных, которую трудно реализовать на практике.

Важно обсудить вопрос о влиянии погрешности борновского приближения, использованного при выводе (19), на результаты анализа. Известно, что борновское приближение выполняется, когда поле рассеяния мало по сравнению с зондирующим полем. Это имеет прямое отношение к применимости описанной методики.

На рис. 14 представлен пример результатов вычисления распределения электрического и магнитного полей для объекта почти той же структуры, что и на рис. 11–13, т. е. неоднородности с размерами $4\times4\times3$ км с полостью с размером $2\times2\times1$ км, заполненной материалом внешней среды. На рис. 14*a* приведены расчёты для среды с относительно высоким значением проводимости $\sigma_0 = 10^{-2}$ См/м на частотах 1 и 10 Гц, на которых показатель затухания δ^{-1} составлял 5,0 и 1,6 км$^{-1}$ соответственно. Проводимость неоднородности принята равной проводимости среды

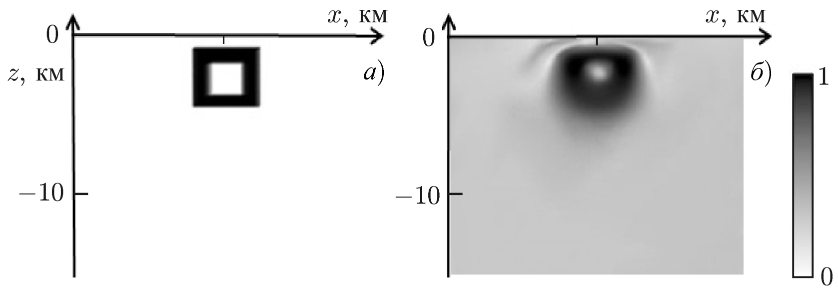

Рис. 11. Панель (а) — моделируемые распределения неоднородностей проводимости (вертикальный разрез через центр неоднородностей), панель (б) — результат восстановления из решения задачи томографии

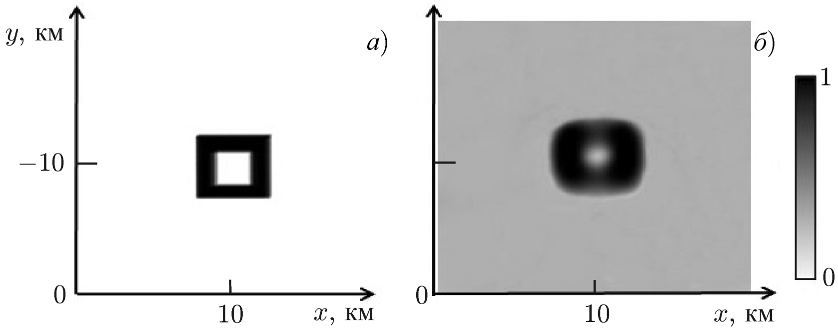

Рис. 12. Панель (а) — моделируемые распределения неоднородностей проводимости (горизонтальный разрез через центр неоднородностей) и панель (б) — результат восстановления из решения задачи томографии при $z = -2$ км

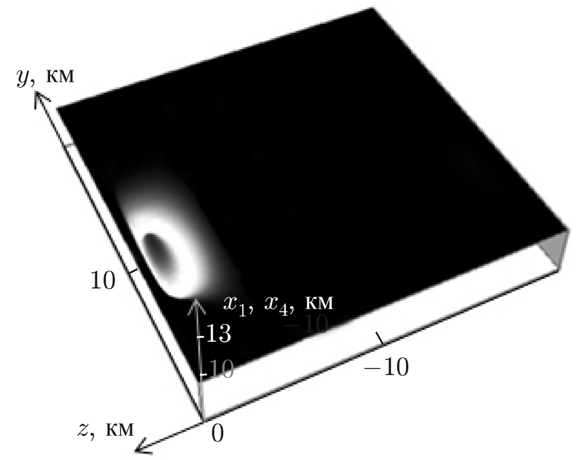

Рис. 13. Голографическое изображение неоднородности с полостью. Скомбинированы изображения внешней границы объекта, описываемой функцией $x_1(y,z)$, и внутренней границы полости, описываемой функцией $x_4(y,z)$

($\sigma_1 = \sigma_0$). Видно, что рассеянные поля внутри неоднородности слабо возмущают внешние поля, что позволяет обоснованно использовать борновское приближение при решении задачи. На рис. 14*б* показаны результаты для сравнительно слабопроводящей среды ($\sigma_0 = 2\cdot 10^{-4}$ См/м), но с объектом, имеющим на порядок большую проводимость $\sigma_1 = 2\cdot 10^{-3}$ См/м. В этом случае целесообразно использовать более высокие частоты (на рис. 14 приведены результаты для частот 10 и 100 Гц с масштабами затухания 11,2 и 3,6 км$^{-1}$ соответственно). Несмотря на меньшее по сравнению с используемым на рис. 14*а* значение проводимости среды, на частоте 100 Гц внутри объекта имеет место заметное возмущение магнитного поля, т. е. в данном случае возможна некоторая погрешность при вычислениях в борновском приближении.

Несмотря на указанные возможности оптимизации параметров измерения, проводимость неоднородностей земной коры меняется в столь широких пределах, что не всегда можно обеспечить выполнение условий применимости борновского приближения. В связи с этим актуальна задача разработки алгоритмов, не связанных с таким ограничением.

2. РЕШЕНИЕ ЗА ПРЕДЕЛАМИ БОРНОВСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Наиболее последовательным подходом представляется решение исходной трёхмерной нелинейной задачи на основе метода двойственной регуляризации [9–11], который был с успехом применён при решении более простой задачи для сред с одномерным распределением неоднородности. Од-

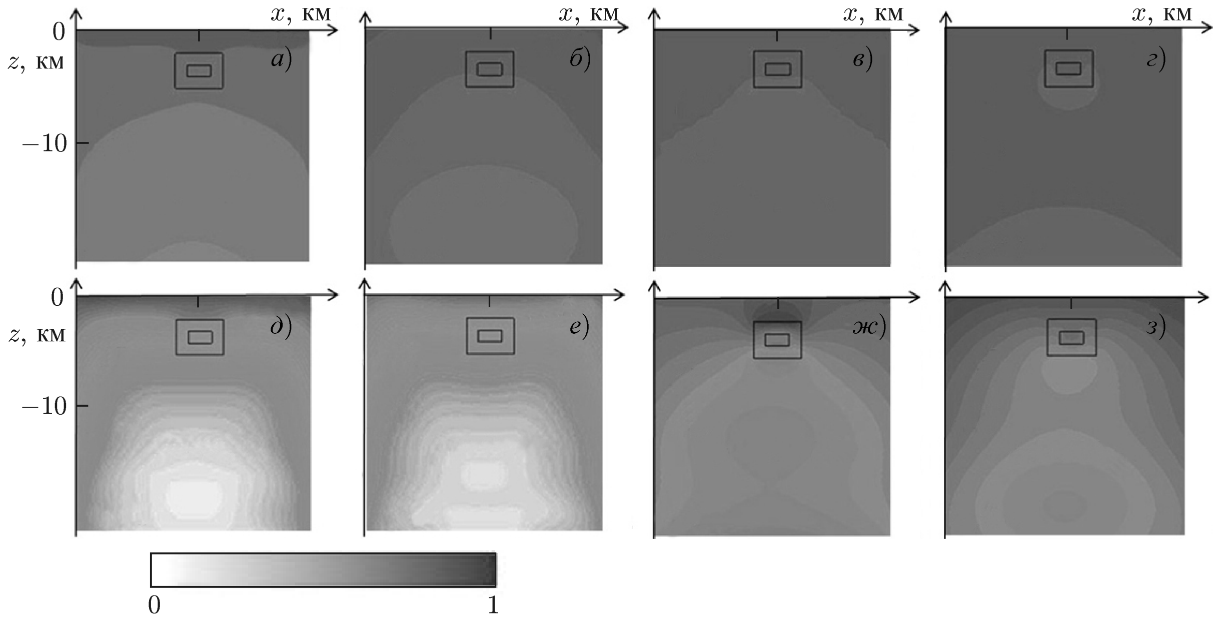

Рис. 14. Нормированные на максимальное значение амплитуды электрического (панели *б*, *г*, *е*, *з*) и магнитного (панели *а*, *в*, *д*, *ж*) полей плоской волны в среде с проводимостью σ_0 и объектом с проводимостью σ_1. Панели (*а*, *б*, *д*, *е*) соответствуют случаю $\sigma_0 = \sigma_1 = 10^{-2}$ См/м, панели (*в*, *г*, *ж*, *з*) — случаю $\sigma_0 = 2\cdot 10^{-4}$ См/м, $\sigma_1 = 2\cdot 10^{-3}$ См/м. Частота излучения f равна 1 Гц (*а*, *б*), 10 Гц (*в*–*е*) или 100 Гц (*ж*, *з*)

нако такой подход подразумевает вычисление десятков тысяч трёхмерных распределений поля, аналогичных показанным на рис. 14.

Вместе с тем во многих случаях можно получить поправку к борновскому приближению на основе итерационного решения нелинейного уравнения, которое начинается с распределения величины σ_1^0, полученного в борновском приближении. Электрическое поле на n-м шаге итерационного процесса имеет вид

$$E_1(\mathbf{r}) = \int\limits_{V'} \sigma_1^n(\mathbf{r}') \Biggl\{ \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp[i\kappa_x (x-x') + i\kappa_y (y-y')] \times \\ \times [E_{0j}^{(2)}(\mathbf{r}') + E_{1j}^{(2)}(\varepsilon_1^{n-1}, \mathbf{r}') G_{ji}^{21}(\kappa_x, \kappa_y, z, z')\, \mathrm{d}\kappa_x\, \mathrm{d}\kappa_y \Biggr\}\, \mathrm{d}\mathbf{r}', \quad (24)$$

где σ_1^n — проводимость на n-й итерации, а ε_1^{n-1} — диэлектрическая проницаемость на $(n-1)$-й итерации. Если перейти к спектру по поперечным координатам, получим уравнение

$$E_{1i}(\kappa_x, \kappa_y, z) = 4\Biggl\{ \int\limits_{z'} \Bigl\{ \sigma_1^n(\kappa_x - k_x, \kappa_y - k_y, z') E_{0j}^{(2)}(k_x, k_y, z') + \\ + \frac{16\pi^2}{\omega} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \sigma_1^n(\kappa_x - k_x, \kappa_y - k_y, z') \int\limits_{z'} \sigma_1^{n-1}(\kappa_x' - k_x, \kappa_y' - k_y, z'') E_{0k}^{(2)}(k_x, k_y, z'') \times \\ \times G_{kj}^{22}(\kappa_x', \kappa_y', z', z'')\, \mathrm{d}\kappa_x'\, \mathrm{d}\kappa_y'\, \mathrm{d}z'' G_{ji}^{21}(\kappa_x, \kappa_y, z, z') \Bigr\}\, \mathrm{d}z'' \Biggr\}, \quad (25)$$

которое является одномерным лишь в начальном, борновском, приближении, когда оно включает только первое слагаемое. В принципе, решение трёхмерных уравнений (24) или (25) на каждом шаге требует меньше вычислений, чем при применении методов типа двойственной регуляризации [11], но при этом не гарантируется абсолютная сходимость такой итерационной процедуры, да и в случае сходимости количество шагов, необходимых для её реализации, может быть очень велико. Однако есть путь, всё же позволяющий получить поправку к борновскому приближению на основе (25), оставаясь в рамках решения одномерного уравнения. Для этого во втором слагаемом в уравнении (25) надо сделать подстановку $\sigma_1^n \to \sigma_1^{n-1}$. Тогда оно становится просто поправкой к рассеянному полю в левой части (25):

$$E_{1i}(\kappa_x,\kappa_y,z) = 4\Big\{ \int\limits_{z'} \Big[\sigma_1^n(\kappa_x - k_x, \kappa_y - k_y, z')E_{0j}^{(2)}(k_x,k_y,z') + \\ + \frac{16\pi^2}{\omega} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \sigma_1^{n-1}(\kappa'_x - k_x, \kappa'_y - k_y, z') \int\limits_{z'} \sigma_1^{n-1}(\kappa'_x - k_x, \kappa'_y - k_y, z'')E_{0k}^{(2)}(k_x,k_y,z'') \times \\ \times G_{kj}^{22}(\kappa'_x,\kappa'_y,z',z'')\,\mathrm{d}\kappa'_x\,\mathrm{d}\kappa'_y\,\mathrm{d}z''\Big] G_{ji}^{21}(\kappa_x,\kappa_y,z,z')\,\mathrm{d}z'\Big\}. \quad (26)$$

Уравнение (26) является уравнением Фредгольма 1-го рода вида (19) и может решаться аналогично для каждой пары спектральных компонент. Такой способ может дать адекватные поправки к борновскому приближению без использования высокопроизводительных компьютеров.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе разработаны и протестированы с помощью численного моделирования методы компьютерной томографии распределённых неоднородностей проводимости и голографии (определения формы поверхности) сплошных неоднородностей. Эти методы основаны на математически последовательном подходе, в котором не используются модельные представления и параметризация. Основная часть результатов получена с помощью теории рассеяния электромагнитных волн в борновском приближении. Предложены также подходы, позволяющие выйти за пределы этого приближения.

Исследования были выполнены при поддержке РФФИ (гранты 13–07–97028_р_поволжье и 13–02–12155_офи_м), программы ОФН РАН IV.13, а также частично были поддержаны МОН РФ (соглашение 02.B.49.21.0003 от 27 августа 2013 года между МОН РФ и ННГУ им. Н. И. Лобачевского).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Терещенко Е. Д., Григорьев В. Ф., Сидоренко А. Е. и др. // Геомагнетизм и аэрономия. 2007. Т. 47, № 6. С. 855.
2. Поляков С. В., Ермакова Е. Н., Поляков А. С. и др. // Геомагнетизм и аэрономия. 2003. Т. 42, № 2. С. 240.
3. Тихонов А. Н. // Докл. АН СССР. Нов. серия. 1950. Т. 73, № 2. С. 295.
4. Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. М.: Наука, 1983. 200 с.
5. Дмитриев В. И. // Некорректные задачи естествознания. М.: Изд-во МГУ, 1987. 299 с.
6. Gaikovich K. P. Inverse problems in physical diagnostics. New York: Nova Science Publishers Inc., 2004. 372 p.

7. Gaikovich K. P. // Phys. Rev. Lett. 2007. V. 98, No. 18. Art. no. 183902.
8. Гайкович К. П., Смирнов А. И. // Вестник Нижегород. ун-та им. Н. И. Лобачевского. 2007. Т 2. С. 73.
9. Гайкович К. П., Кутерин Ф. А., Смирнов А. И., Сумин М. И. // Вестник Нижегород. ун-та им. Н. И. Лобачевского. 2009. Т. 1. С. 47.
10. Sumin M. I. // Advances in mathematics research. V. 11. New York: Nova Science Publishers Inc., 2010. P. 103.
11. Гайкович К. П., Гайкович П. К., Галкин О. Е. и др. // Вестник Нижегород. ун-та им. Н. И. Лобачевского. 2013. Т. 1, № 1. С. 57.
12. Zhdanov M. S. Geophysical inverse theory and regularization problems. Elsevier, 2002. 628 p.
13. Zhdanov M. S., Chernyavskiy A. // Inverse Probl. 2004. V. 20. P. 233.
14. Cox L. H., Zhdanov M. S. // Comm. Comput. Phys. 2008. V. 3, No. 1. P. 160.
15. Zhdanov M. S., Tolstaya E. // Inverse Probl. 2004. V. 20, N. 3. P. 937.
16. Спичак В. В., Сизов Ю. П. // Физика Земли. 2006. Т. 4. С. 64.
17. Спичак В. В., Попова И. В. // Физика Земли. 1998. Т. 1. С. 39.
18. Gaikovich K. P. // Phys. Rev. Lett. 2007. V. 98, No. 18. Art. no. 183902.
19. Gaikovich K. P., Gaikovich P. K. // Inverse Probl. 2010. V. 26, No. 12. Art. no. 125013.
20. Gaikovich K. P., Gaikovich P. K., Maksimovitch Ye. S., Badeev V. A. // Phys. Rev. Lett. 2012. V. 108, No.16. Art. no. 163902.
21. Гайкович К. П., Максимович Е. С., Бадеев В. А. // Журнал радиоэлектроники. 2012. Т. 6. С. 1.

Поступила в редакцию 16 сентября 2014 г.; принята в печать 1 февраля 2014 г.

INVERSE PROBLEMS OF LOW-FREQUENCY DIAGNOSTICS OF THE EARTH'S CRUST

K. P. Gaikovich and A. I. Smirnov

We develop and test (in numerical simulation) the methods of computer tomography of distributed under-surface inhomogeneities in the conductivity of a medium and holography (i.e., reconstruction of the shape) of solid and uniformly composed subsurface objects in the context of the problems of multifrequency electromagnetic diagnostics of the structure of the Earth's core in the extremely low and ultra-low frequency bands. The methods are based on solving of the inverse scattering problem basing on the results provided by multifrequency measurements of the scattering of complex amplitudes of the electromagnetic field on the surface of the medium under consideration.