УДК 621.396

ОБНАРУЖЕНИЕ РАДИОСИГНАЛА С НЕИЗВЕСТНЫМИ ДЛИТЕЛЬНОСТЬЮ, АМПЛИТУДОЙ И НАЧАЛЬНОЙ ФАЗОЙ

А. П. Трифонов, Ю. Э. Корчагин, М. В. Трифонов*

Воронежский госуниверситет, г. Воронеж, Россия

Построен максимально правдоподобный алгоритм обнаружения радиосигнала с произвольной формой огибающей, наблюдаемого на фоне аддитивного гауссовского белого шума. При этом длительность, амплитуда и начальная фаза сигнала заранее неизвестны. Выполнен анализ построенного алгоритма в предположении достаточно больши́х отношений сигнал/шум. Найдены асимптотические выражения для вероятностей ошибок обнаружения. Посредством компьютерного моделирования проверена работоспособность построенного алгоритма, а также определены границы применимости найденных асимптотических выражений для характеристик алгоритма.

ВВЕДЕНИЕ

Для многих практических приложений радиолокации, навигации и сейсмологии актуальна задача обнаружения сигнала с неизвестной длительностью [1–4]. Алгоритмы обнаружения сигнала произвольной формы с неизвестной длительностью исследованы в работе [2]. В работе [4] рассмотрена задача обнаружения сигнала произвольной формы с неизвестными длительностью и амплитудой. Поскольку в ряде практических приложений используются сигналы с высокочастотным заполнением (радиосигналы), целесообразно рассмотреть алгоритмы обнаружения радиосигнала, начальная фаза, а также амплитуда которого в силу особенностей его распространения являются априори неизвестными. В данной работе построен и проанализирован алгоритм максимального правдоподобия для обнаружения радиосигнала с произвольной формой огибающей, неизвестными длительностью, амплитудой и начальной фазой.

Модель радиосигнала, который нужно обнаружить, запишем в виде

$$s(t,a,\varphi,\tau) = \begin{cases} af(t)\cos(\omega t - \varphi), & 0 \le t \le \tau; \\ 0, & t < 0, \quad t > \tau. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $f(t)$ — огибающая радиосигнала, ω, τ, a, φ — его частота, длительность, амплитуда и начальная фаза соответственно. Будем считать, что сигнал (1) наблюдается в течение времени $[0,T]$ на фоне аддитивного гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0. Длительность радиосигнала τ принимает значения

$$T_1 \le \tau \le T_2, \tag{2}$$

а начальная фаза $0 \le \varphi \le 2\pi$. При этом будет приниматься сигнал $\xi(t) = \gamma_0 s(t,a_0,\varphi_0,\tau_0) + n(t)$. Индекс «0» здесь и далее означает истинное значение соответствующего параметра. Параметр γ_0 является дискретным и принимает два значения: $\gamma_0 = 0$ (в наблюдаемой реализации сигнал отсутствует) и $\gamma_0 = 1$ (в наблюдаемой реализации сигнал присутствует). По наблюдаемой реализации $\xi(t)$ необходимо решить, какое значение принимает параметр γ_0.

* trifonov@phys.vsu.ru

1. АЛГОРИТМ ОБНАРУЖЕНИЯ И СВОЙСТВА РЕШАЮЩЕЙ СТАТИСТИКИ

При неизвестных параметрах сигнала имеет место априорная параметрическая неопределённость относительно его амплитуды, начальной фазы и длительности. В этом случае логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОП) зависит от четырёх неизвестных параметров [1, 5, 6] и может быть записан в виде

$$L(\gamma, a, \varphi, \tau) = \frac{2a\gamma}{N_0} \int\limits_0^{\tau} f(t) \cos(\omega t - \varphi)[\xi(t) - a f(t) \cos(\omega t - \varphi)/2] \, \mathrm{d}t. \tag{3}$$

В соответствии с алгоритмом максимального правдоподобия [5, 6], оценка дискретного параметра γ даётся формулой

$$\gamma_{\mathrm{m}} = \sup_{\gamma} \left[\sup_{a,\varphi,\tau} L(\gamma, a, \varphi, \tau) \right]. \tag{4}$$

Аналогично работам [4–6], вместо алгоритма (4) можно использовать обобщённый алгоритм обнаружения, основанный на сравнении абсолютного (наибольшего) максимума L логарифма ФОП с некоторым порогом h. Если выполнено соотношение

$$L > h,$$

то выносится решение о наличии сигнала ($\gamma_{\mathrm{m}} = 1$), если $L < h$ — о его отсутствии ($\gamma_{\mathrm{m}} = 0$). Пусть

$$L(a, \varphi, \tau) = L(\gamma = 1, a, \varphi, \tau). \tag{5}$$

Тогда для величины максимума логарифма ФОП можно записать

$$L = \sup_{\tau} L(\tau), \qquad L(\tau) = \sup_{a,\varphi} L(a, \varphi, \tau) = L(a_{\mathrm{m}}, \varphi_{\mathrm{m}}, \tau), \qquad (a_m, \varphi_m) = \arg \sup_{a,\varphi} L(a, \varphi, \tau).$$

Здесь $L(\tau)$ — логарифм ФОП (5), в который вместо неизвестных амплитуды и начальной фазы подставлены их максимального правдоподобные оценки a_{m} и φ_{m} соответственно, что равносильно максимизации ФОП по неизвестным амплитуде и начальной фазе. Максимизацию логарифма ФОП (5) по амплитуде и фазе можно выполнить аналитически. Для этого представим логарифм ФОП (5) в виде

$$L(a, \varphi, \tau) = a X_1(\tau) \cos\varphi + a Y_1(\tau) \sin\varphi - \frac{a^2}{2N_0} \int\limits_0^{\tau} f^2(t) \, \mathrm{d}t, \tag{6}$$

где

$$X_1(\tau) = \frac{2}{N_0} \int\limits_0^{\tau} \xi(t) f(t) \cos(\omega t) \, \mathrm{d}t, \tag{7}$$

$$Y_1(\tau) = \frac{2}{N_0} \int\limits_0^{\tau} \xi(t) f(t) \sin(\omega t) \, \mathrm{d}t. \tag{8}$$

В формуле (6) и далее отброшены интегралы от членов, осциллирующих с удвоенной частотой 2ω.

Получим уравнение правдоподобия для оценки φ_m, приравнивая нулю производную функции (6) по φ:

$$\left.\frac{\mathrm{d}L(a,\varphi,\tau)}{\mathrm{d}\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_\mathrm{m}} = -aX_1(\tau)\sin\varphi_\mathrm{m} + aY_1(\tau)\cos\varphi_\mathrm{m} = 0.$$

Отсюда

$$\varphi_\mathrm{m} = \mathrm{arctg}[Y_1(\tau)/X_1(\tau)]. \tag{9}$$

Подставляя найденное решение в (6), получим

$$L(a,\tau) = \sup_{\varphi} L(a,\varphi,\tau) = a\,\sqrt{X_1^2(\tau)+Y_1^2(\tau)} - \frac{a^2}{2N_0}\int\limits_0^\tau f^2(t)\,\mathrm{d}t. \tag{10}$$

Выполним теперь максимизацию логарифма ФОП (10) по амплитуде. Приравняв нулю производную функции (10) по переменной a

$$\left.\frac{\mathrm{d}L_\varphi(a,\tau)}{\mathrm{d}a}\right|_{a=a_\mathrm{m}} = \sqrt{X_1^2(\tau)+Y_1^2(\tau)} - \frac{a_\mathrm{m}}{N_0}\int\limits_0^\tau f^2(t)\,\mathrm{d}t,$$

получим

$$a_\mathrm{m} = N_0\,\sqrt{X_1^2(\tau)+Y_1^2(\tau)}\Bigg/\int\limits_0^\tau f^2(t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{11}$$

Подставляя оценку максимального правдоподобия (11) в выражение (10) вместо априори неизвестной амплитуды a, получим

$$L(\tau) = \sup_{a,\varphi} L(a,\varphi,\tau) = \frac{N_0}{2}\left[X_1^2(\tau)+Y_1^2(\tau)\right]\Bigg/\int\limits_0^\tau f^2(t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{12}$$

Выражение (12) определяет структуру приёмного устройства. Приёмник должен формировать случайный процесс (12) для всех возможных значений длительности, находить величину его наибольшего максимума и сравнивать её с порогом. На рис. 1 изображена блок-схема соответствующего алгоритма обнаружения, где введены следующие обозначения: И — интеграторы на интервале времени $[0,t]$, $T_1 \le t \le T_2$, ПД — пиковый детектор, РУ — решающее устройство, осуществляющее сравнение выходного сигнала пикового детектора в момент времени $t = T_2$ с порогом.

Исследуем решающую статистику (12), формируемую алгоритмом обнаружения, основанном на оценках максимально правдоподобия. Подставив выражения (7) и (8) в формулу (12) и отбрасывая интегралы от функций, осциллирующих с удвоенной частотой, перепишем логарифм функционала отношения правдоподобия $L(\tau)$ в виде

$$L(\tau) = \frac{[\gamma_0 G(\tau_0,\tau)\cos\varphi_0 + N_\mathrm{c}(\tau)]^2 + [\gamma_0 G(\tau_0,\tau)\sin\varphi_0 + N_\mathrm{s}(\tau)]^2}{2q(\tau)}\,. \tag{13}$$

Здесь

$$G(\tau_0,\tau) = q[\min(\tau_0,\tau)], \tag{14}$$

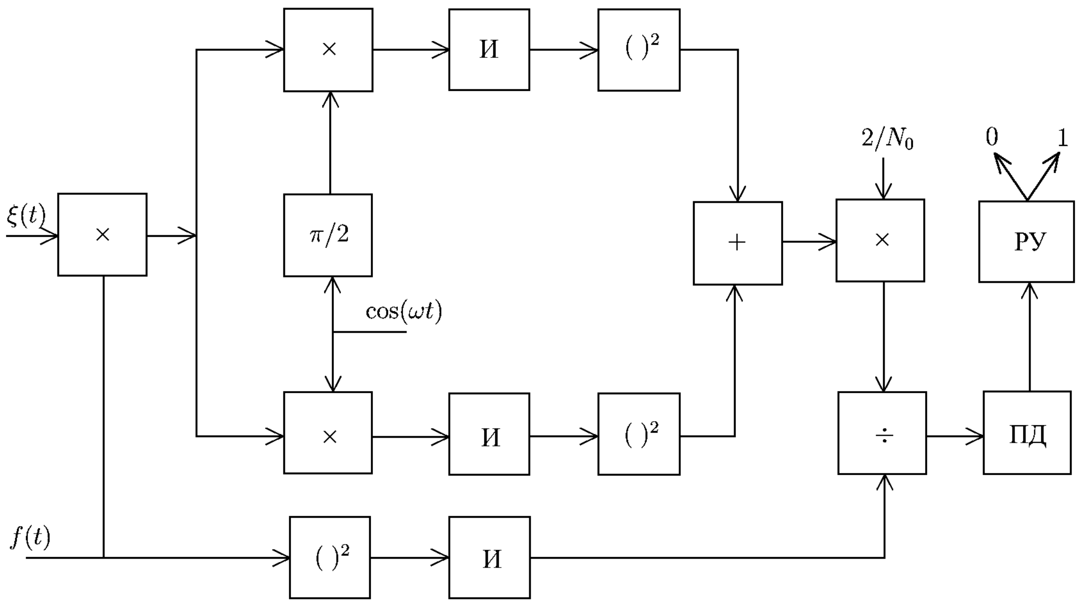

Рис. 1

$$N_{\mathrm{c}}(\tau) = \frac{2a_0}{N_0}\int\limits_0^{\tau} n(t)f(t)\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t, \qquad N_{\mathrm{s}}(\tau) = \frac{2a_0}{N_0}\int\limits_0^{\tau} n(t)f(t)\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t, \tag{15}$$

$$q(\tau) = \frac{a_0^2}{N_0}\int\limits_0^{\tau} f^2(\tau)\,\mathrm{d}t \tag{16}$$

Величина $q(\tau)$ есть отношение сигнал/шум (ОСШ) на выходе приёмника максимального правдоподобия для сигнала с длительностью τ. Шумовые составляющие $N_{\mathrm{c}}(\tau)$ и $N_{\mathrm{s}}(\tau)$ представляют собой линейные преобразования гауссовского случайного процесса и поэтому также являются гауссовскими. Они обладают нулевыми математическими ожиданиями и следующими корреляционными функциями:

$$\langle N_{\mathrm{c}}(\tau_1)N_{\mathrm{c}}(\tau_2)\rangle = \langle N_{\mathrm{s}}(\tau_1)N_{\mathrm{s}}(\tau_2)\rangle = q[\min(\tau_1,\tau_2)], \qquad \langle N_{\mathrm{c}}(\tau_1)N_{\mathrm{s}}(\tau_2)\rangle = 0. \tag{17}$$

Перейдём в выражении (13) к переменной $\lambda = q(\tau)$, $\Lambda_1 \le \lambda \le \Lambda_2$, $\Lambda_1 = q(T_1)$, $\Lambda_2 = q(T_2)$. Тогда решающая статистика (13) как функция переменной λ может быть представлена выражением

$$L(\lambda) = \frac{\gamma_0 G^2(\lambda_0,\lambda) + 2\gamma_0 G(\lambda_0,\lambda)N_1(\lambda) + N_{\mathrm{c}}^2(\lambda) + N_{\mathrm{s}}^2(\lambda)}{2\lambda}\,, \tag{18}$$

где $G(\lambda_0,\lambda) = \min(\lambda_0,\lambda)$, а $N_{\mathrm{c}}(\lambda)$ и $N_{\mathrm{s}}(\lambda)$ — гауссовские статистически независимые случайные процессы с нулевыми математическими ожиданиями и корреляционными функциями

$$\langle N_{\mathrm{c}}(\lambda_1)N_{\mathrm{c}}(\lambda_2)\rangle = \langle N_{\mathrm{s}}(\lambda_1)N_{\mathrm{s}}(\lambda_2)\rangle = \min(\lambda_1,\lambda_2), \tag{19}$$

а

$$N_1(\lambda) = N_{\mathrm{c}}(\lambda)\cos\varphi_0 + N_{\mathrm{s}}(\lambda)\sin\varphi_0 \tag{20}$$

— гауссовский случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией (19).

2. ХАРАКТЕРИСТИКИ ОБНАРУЖЕНИЯ

Основными характеристиками качества обнаружения являются вероятность ложной тревоги и вероятность пропуска сигнала [6]. Для нахождения вероятности ложной тревоги обнаружителя, основанного на алгоритме максимального правдоподобия, необходимо найти функцию распределения абсолютного максимума случайного процесса

$$L_0(\lambda) = L(\lambda|\gamma_0 = 0) = \frac{N_\mathrm{c}^2(\lambda) + N_\mathrm{s}^2(\lambda)}{2\lambda}\,. \tag{21}$$

Введём обозначения

$$X_\mathrm{c}(\lambda) = \frac{N_\mathrm{c}(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\,, \qquad X_\mathrm{s}(\lambda) = \frac{N_\mathrm{s}(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \tag{22}$$

и перепишем выражение (21) как

$$L_0(\lambda) = \left[X_\mathrm{c}^2(\lambda) + X_\mathrm{s}^2(\lambda)\right]/2. \tag{23}$$

Случайные процессы (22) являются статистически независимыми гауссовскими случайными процессами с нулевыми математическими ожиданиями, единичными дисперсиями и коэффициентами корреляции

$$\langle X_\mathrm{c}(\lambda_1) X_\mathrm{c}(\lambda_2)\rangle = \langle X_\mathrm{s}(\lambda_1) X_\mathrm{s}(\lambda_2)\rangle = \frac{\min(\lambda_1, \lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}\,. \tag{24}$$

Выполним в формулах (22) и (23) замену переменных $m = \ln(\lambda/\Lambda_1)$, $0 \le m \le \tilde{m}$, $\tilde{m} = \ln(\Lambda_2/\Lambda_1)$, $\lambda = \Lambda_1 \exp(m)$. При такой замене случайные процессы $X_\mathrm{c}(\lambda)$ и $X_\mathrm{s}(\lambda)$ как функции переменной m обладают корреляционной функцией

$$\langle X_\mathrm{c}(m_1) X_\mathrm{c}(m_2)\rangle = \langle X_\mathrm{s}(m_1) X_\mathrm{s}(m_2)\rangle = \frac{\min[\exp(m_1), \exp(m_2)]}{\exp[(m_1 + m_2)/2]} = \exp\left[-|m_2 - m_1|/2\right]. \tag{25}$$

Следовательно, случайные процессы $X_\mathrm{c}(m)$ и $X_\mathrm{s}(m)$ являются статистическим независимыми стационарными гауссовскими и марковскими процессами [7]. Тогда решающая статистика (23) как функция переменной m представляет собой случайный процесс с математическим ожиданием

$$\langle L_0(m)\rangle = 1, \tag{26}$$

корреляционной функцией

$$K(m_1, m_2) = \exp(-|m_2 - m_1|) \tag{27}$$

и одномерной плотностью вероятности

$$W(x) = \exp(-x). \tag{28}$$

Согласно работе [6] процесс $L_0(m)$ является марковским с коэффициентами сноса и диффузии $k_1 = 1 - L_0$ и $k_2 = 2L_0$ соответственно. Приближённое выражение для распределения величины абсолютного максимума случайного процесса $L(m)$ можно записать как (см. [6], с. 85)

$$P\{L_0(m) < h\} \approx \begin{cases} \exp\left[-\tilde{m} h \exp(-h)\right], & h \ge 1, \\ 0, & h < 1. \end{cases} \tag{29}$$

Возвращаясь к переменной λ, а затем к переменной τ, получаем

$$P\{L_0(\tau) < h\} \approx \begin{cases} \left[\dfrac{q(T_1)}{q(T_2)}\right]^{h\exp(-h)}, & h \geq 1, \\ 0, & h < 1. \end{cases} \tag{30}$$

Точность этого выражения возрастает с увеличением параметра h и отношения $q(T_2)/q(T_1)$. Вероятность ложной тревоги α по определению равна вероятности превышения порога решающей статистикой (13) при отсутствии сигнала в принятой реализации. Следовательно,

$$\alpha = 1 - P\{L_0(\tau) < h\} \approx \begin{cases} 1 - \left[\dfrac{q(T_1)}{q(T_2)}\right]^{h\exp(-h)}, & h \geq 1, \\ 1, & h < 1. \end{cases} \tag{31}$$

Перейдём к определению вероятности пропуска β. При наличии сигнала в наблюдаемой реализации решающая статистика (18) принимает вид

$$L_1(\lambda) = L(\lambda|\gamma_0 = 1) = \frac{[\min(\lambda_0, \lambda)]^2}{2\lambda} + \frac{\min(\lambda_0, \lambda) N_1(\lambda)}{\lambda} + \frac{N_{\rm c}^2(\lambda) + N_{\rm s}^2(\lambda)}{2\lambda}\,. \tag{32}$$

Перейдём в последнем выражении к новой переменной $l = \lambda/\lambda_0$, $\Lambda_1/z_0^2 \leq l \leq \Lambda_2/z_0^2$. Тогда

$$L_1(l) = z_0^2\, \frac{[\min(1, l)]^2}{2l} + z_0\, \frac{\min(1, l) N_1(l)}{l} + \frac{N_{\rm c}^2(l) + N_{\rm s}^2(l)}{2l}\,, \tag{33}$$

где $z_0^2 = \lambda_0$ — отношение сигнал/шум на выходе приёмника для принятого сигнала. При достаточно бо́льших отношениях сигнал/шум последним слагаемым можно пренебречь по сравнению с предыдущими и, возвращаясь к переменной λ, записать приближённо

$$L_1(\lambda) \approx \frac{[\min(\lambda_0, \lambda)]^2}{2\lambda} + \frac{\min(\lambda_0, \lambda)}{\lambda}\, N_1(\lambda). \tag{34}$$

Эта функция представляет собой гауссовский случайный процесс с математическим ожиданием

$$S_1(\lambda) = \frac{[\min(\lambda, \lambda_0)]^2}{2\lambda} \tag{35}$$

и корреляционной функцией

$$K_1(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\min(\lambda_1, \lambda_0) \min(\lambda_2, \lambda_0)}{\lambda_1 \lambda_2} \min(\lambda_1, \lambda_2). \tag{36}$$

Как показано в работе [4], коэффициент корреляции решающей статистики (34)

$$R(\lambda_1, \lambda_2) = \min(\lambda_1, \lambda_2)/\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}$$

удовлетворяет условию [7, 8]

$$R(x, y) = R(x, t) R(t, y), \qquad x > t > y.$$

Следовательно, случайный процесс (34) является марковским с коэффициентами сноса и диффузии [7]

$$k_1(\lambda) = \frac{1}{2} \begin{cases} 1, & \lambda < \lambda_0, \\ -\lambda_0^2/\lambda^2, & \lambda \geq \lambda_0, \end{cases} \qquad k_2(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda < \lambda_0, \\ \lambda_0^2/\lambda^2, & \lambda \geq \lambda_0. \end{cases}$$

При бо́льших отношениях сигнал/шум максимум решающей статистики (34) располагается в малой окрестности положения максимума её математического ожидания [1]. Математическое ожидание (35) достигает максимального значения при $\lambda = \lambda_0$. Введём величину $\varepsilon = (\lambda - \lambda_0)/\lambda_0$, абсолютное значение которой уменьшается с ростом отношения сигнал/шум $\lambda_0 = z_0^2$, и перепишем коэффициенты сноса и диффузии в виде

$$k_1(\lambda) = \frac{1}{2}\begin{cases} 1, & \lambda < \lambda_0, \\ -(1+\varepsilon)^{-2}, & \lambda \geq \lambda_0, \end{cases} \qquad k_2(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda < \lambda_0, \\ (1+\varepsilon)^{-2}, & \lambda \geq \lambda_0. \end{cases}$$

Поскольку $\varepsilon \to 0$ при $z_0 \to \infty$, то при бо́льших отношениях сигнал/шум решающую статистику (34) в окрестности точки $\lambda = \lambda_0$ можно аппроксимировать гауссовским марковским случайным процессом $\mu_1(\lambda)$ с коэффициентами сноса и диффузии

$$k_1(\lambda) = \frac{1}{2}\begin{cases} 1, & \lambda < \lambda_0, \\ -1, & \lambda \geq \lambda_0. \end{cases} \qquad k_2(\lambda) = 1.$$

Будем использовать эту аппроксимацию на всём интервале возможных значений параметра $\Lambda_1 \leq \leq \lambda \leq \Lambda_2$.

Вероятность пропуска сигнала по определению равна вероятности непревышения порога h случайным процессом $\mu_1(\lambda)$:

$$\beta = P\{-\infty < \mu_1(\lambda) < h, \quad \Lambda_1 \leq \lambda \leq \Lambda_2\}. \tag{37}$$

Для нахождения вероятности (37) воспользуемся методикой, приведённой в работах [1, 2]. Введём вспомогательный случайный процесс $y(\lambda) = h - \mu_1(\lambda)$, который является гауссовским марковским процессом с коэффициентами сноса и диффузии

$$k_1(\lambda) = \frac{1}{2}\begin{cases} -1, & \lambda < \lambda_0, \\ 1, & \lambda \geq \lambda_0. \end{cases} \qquad k_2(\lambda) = 1. \tag{38}$$

Тогда вероятность пропуска (37)

$$\beta = P\{y(\lambda) > 0, \quad \Lambda_1 \leq \lambda \leq \Lambda_2\}$$

представляет собой вероятность недостижения границ $y = 0$ и $y = +\infty$ марковским случайным процессом $y(\lambda)$ на отрезке $\Lambda_1 \leq \lambda \leq \Lambda_2$. Согласно [7] для искомой вероятности можно записать

$$\beta = \int\limits_0^\infty W(y, \Lambda_2)\,\mathrm{d}y. \tag{39}$$

Здесь $W(y, \lambda)$ — решение уравнения Фоккера—Планка—Колмогорова [1, 7]

$$\frac{\partial W(y,\lambda)}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial y}\,[k_1 W(y,\lambda)] - \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial y^2}\,[k_2 W(y,\lambda)] = 0 \tag{40}$$

при граничных условиях $W(y = 0, \lambda) = W(y = \infty, \lambda) = 0$ и начальном условии

$$W(y,\lambda)|_{\lambda=\Lambda_1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Lambda_1}}\exp\left[-\frac{(y - h + \Lambda_1/2)^2}{2\Lambda_1}\right].$$

Применяя метод отражения с переменой знака [7], находим решение уравнения (40) с коэффициентами (38) отдельно для случаев $\Lambda_1 \le \lambda \le \lambda_0$ и $\lambda_0 \le \lambda \le \Lambda_2$. Подставляя найденные решения в формулу (39), получаем выражение для вероятности пропуска сигнала в виде

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_0}} \int\limits_0^\infty \exp\left[-\frac{(\xi+\lambda_0/2)^2 + h^2 - h\lambda_0}{2\lambda_0}\right] \left[\Phi\left(\frac{\sqrt{\Lambda_2-\lambda_0}}{2} + \frac{\xi}{\sqrt{\Lambda_2-\lambda_0}}\right) - \right.$$
$$\left. - \exp(-\xi)\Phi\left(\frac{\sqrt{\Lambda_2-\lambda_0}}{2} - \frac{\xi}{\sqrt{\Lambda_2-\lambda_0}}\right)\right] \left[\Phi\left(h\sqrt{\frac{\lambda_0-\Lambda_1}{\lambda_0\Lambda_1}} + \xi\sqrt{\frac{\Lambda_1}{\lambda_0(\lambda_0-\Lambda_1)}}\right) \times \right.$$
$$\left. \times \exp\left(\frac{h\xi}{\lambda_0}\right) - \Phi\left(h\sqrt{\frac{\lambda_0-\Lambda_1}{\lambda_0\Lambda_1}} - \xi\sqrt{\frac{\Lambda_1}{\lambda_0(\lambda_0-\Lambda_1)}}\right)\exp\left(-\frac{h\xi}{\lambda_0}\right)\right] \mathrm{d}\xi, \quad (41)$$

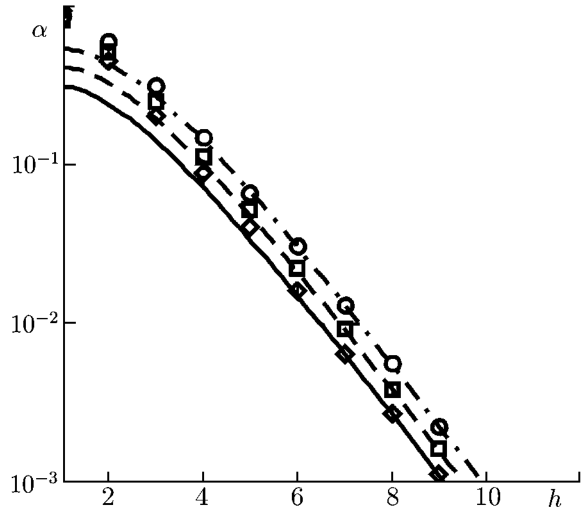

Рис. 2

где $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \exp(-t^2/2)\,\mathrm{d}t/\sqrt{2\pi}$ — интеграл вероятности. Выражение (41) совпадает с выражением для вероятности пропуска сигнала, найденном в работе [2] для алгоритма обнаружения сигнала с неизвестной длительностью и априори известными амплитудой и фазой. Следовательно, при больши́х отношениях сигнал/шум вероятность пропуска инвариантна к отсутствию априорной информации об амплитуде и фазе сигнала.

В качестве примера конкретизируем полученные выражения для прямоугольного радиоимпульса со скошенной вершиной огибающей [9]. Форму огибающей, запишем в виде

$$f(t) = [1 + (d-1)t/T_2]\sqrt{3/(d^2+d+1)}\,. \quad (42)$$

Параметр $d = f(T_2)/f(0)$ характеризует наклон скошенной вершины. Множитель $\sqrt{3/(d^2+d+1)}$ введён для того, чтобы энергия нормированного сигнала с максимальной длительностью

$$E = \int\limits_0^{T_2} f^2(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{T_2} 3\,\frac{[1+(d-1)t/T_2]^2}{d^2+d+1}\,\mathrm{d}t = T_2$$

не зависела от наклона вершины импульса. Это даёт возможность сравнивать эффективность обнаружения сигналов с разным наклоном вершины, но одинаковой энергией.

Вычислим функцию (16) применительно к сигналу (42):

$$q(\tau) = \lambda = \frac{3a_0^2\tau}{N_0}\,\frac{1+(d-1)\tau/T_2+(d-1)^2\tau^2/(3T_2^2)}{d^2+d+1}\,.$$

Введём нормированную длительность $\eta = \tau/T_2$, $1/k \le \eta \le 1$, где $k = T_2/T_1$ — динамический диапазон возможных значений длительности. Далее получим

$$\Lambda_1 = q(T_1) = \frac{3z_{\mathrm{r}}^2}{k}\,\frac{1+(d-1)/k+(d-1)^2/(3k^2)}{d^2+d+1}\,,$$

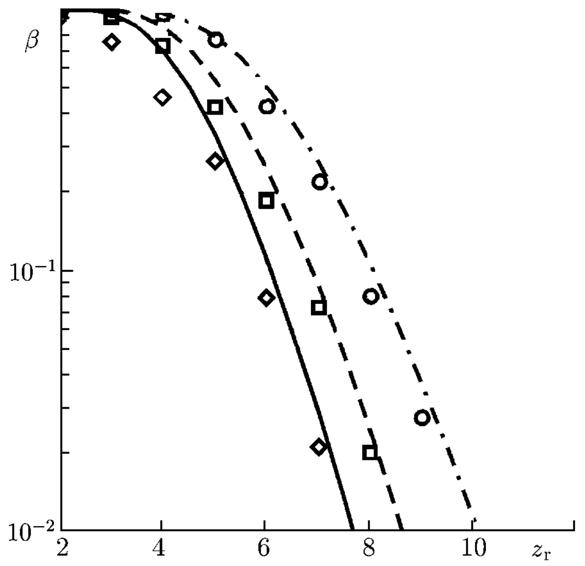

Рис. 3

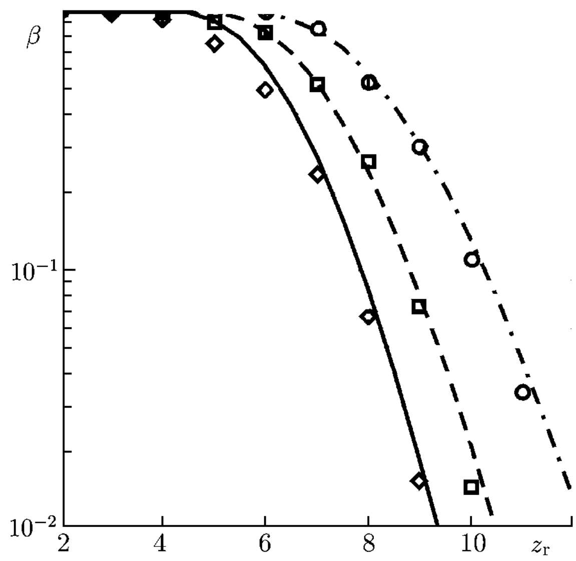

Рис. 4

$$\lambda_0 = q(\tau_0) = z_0^2 = 3 z_{\rm r}^2 \eta_0 \, \frac{1 + (d-1)\eta_0 + (d-1)^2 \eta_0^2/3}{d^2 + d + 1}\,,$$
$$\Lambda_2 = q(T_2) = z_{\rm r}^2.$$

Здесь $\eta_0 = \tau_0/T_2$, $z_{\rm r}^2 = a_0^2 T_2/N_0$ — отношение сигнал/шум для сигнала с максимальной длительностью.

На рис. 2 показаны зависимости вероятности ложной тревоги (31) от порога h для сигнала (42). Сплошные кривые соответствуют убывающему импульсу с наклоном $d = 0{,}5$, штриховые — прямоугольному $d = 1$, штрих-пунктирные — возрастающему импульсу $d = 2$. Динамический диапазон возможных значений длительности $k = 4$. На рис. 3 и 4 изображены зависимости вероятности пропуска сигнала (41) от отношения сигнал/шум $z_{\rm r}$ при заданных уровнях вероятности ложной тревоги $\alpha = 10^{-3}$ и $\alpha = 10^{-6}$ соответственно. При расчёте вероятности пропуска предполагалось, что $k = 4$, истинная длительность сигнала была выбрана в середине априорного интервала, т. е.

$$\tau_0 = (T_1 + T_2)/2, \ \text{и} \ \eta_0 = (1 + 1/k)/2 = (k+1)/2k.$$

Порог h находился из формулы (31) в соответствии с критерием Неймана—Пирсона [6]. Обозначения кривых на рис. 3 и 4 такие же, как на рис. 2. Как видно из рис. 2–4, увеличение скачка огибающей в неизвестный момент окончания сигнала приводит к росту вероятностей ошибок.

Поскольку вероятность пропуска сигнала (41) инвариантна к отсутствию априорной информации об амплитуде и фазе сигнала, влияние априорного незнания начальной фазы радиосигнала на вероятность ложной тревоги при неизменной вероятности пропуска сигнала можно количественно охарактеризовать величиной

$$\zeta = \alpha(h_a)/p, \tag{43}$$

где h_a — порог, найденный из решения уравнения $\alpha_a(h_a) = p$,

$$\alpha_a(h) = \begin{cases} 1 - \left[\dfrac{q(T_1)}{q(T_2)}\right]^{\sqrt{h/\pi}\,\exp(-h)}, & h \geq 1/2; \\ 1, & h < 1/2 \end{cases} \tag{44}$$

— заимствована из работы [4] формула для вероятности ложной тревоги в алгоритме обнаружения сигнала с неизвестными амплитудой и длительностью при априори известной начальной фазе. Величина ζ (43) показывает, во сколько раз увеличивается вероятность ложной тревоги в алгоритме обнаружения вследствие априорного незнания начальной фазы сигнала при неизменной вероятности пропуска. На рис. 5 показаны зависимости проигрыша (43) от величины p для динамического диапазона значений длительности $k = 4$ и различных наклонов скошенной вершины огибающей: $d = 0{,}1$ (сплошная кривая, убывающий импульс), $d = 1$ (штриховая кривая, прямоугольный импульс), $d = 10$ (штрих-пунктирная кривая, возрастающий импульс). Как следует из кривых рис. 5, проигрыш в величине вероятности ложной тревоги вследствие априорного незнания начальной фазы радиосигнала возрастает с уменьшением требуемого уровня ложной тревоги и с увеличением величины скачка огибающей в неизвестный момент окончания сигнала.

Рассмотрим далее, как изменяется вероятность пропуска сигнала вследствие отсутствия информации о его амплитуде и начальной фазе при одинаковых вероятностях ложной тревоги. Для этого аналогично работе [4] введём в рассмотрение величины проигрышей в эффективности обнаружения

$$\chi_1 = \beta(h_{a\varphi}, z_\mathrm{r})/\beta(h_0, z_\mathrm{r}), \qquad \chi_2 = \beta(h_a, z_\mathrm{r})/\beta(h_0, z_\mathrm{r}), \tag{45}$$

$$\chi = \beta(h_{a\varphi}, z_\mathrm{r})/\beta(h_a, z_\mathrm{r}). \tag{46}$$

Здесь $h_{a\varphi}$ — порог, найденный из решения уравнения $\alpha(h_{a\varphi}) = p$ (31), h_a — порог, определённый из решения уравнения $\alpha_a(h_a) = p$, где $\alpha_a(h_a)$ определяется формулой (44), а h_0 — из решения уравнения $\alpha_0(h_0, z_\mathrm{r}) = p$. Величина $\alpha_0(h, z_\mathrm{r})$ определяется выражением

$$\alpha_0(h, z_r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Lambda_1}} \int\limits_0^\infty \exp\left[-\frac{(\xi - c - \Lambda_1/2)^2}{2\Lambda_1}\right] \left[\Phi\left(\frac{\sqrt{\Lambda_2 - \Lambda_1}}{2} + \frac{\xi}{\sqrt{\Lambda_2 - \Lambda_1}}\right) - \right.$$
$$\left. - \exp(-\xi)\Phi\left(\frac{\sqrt{\Lambda_2 - \Lambda_1}}{2} - \frac{\xi}{\sqrt{\Lambda_2 - \Lambda_1}}\right)\right] \mathrm{d}\xi$$

и представляет собой вероятность ложной тревоги при обнаружении сигнала с априори известной амплитудой и неизвестной длительностью, заимствованную из работы [2], p — заданный согласно критерию Неймана—Пирсона уровень ложной тревоги.

Проигрыш χ_1 представляет собой отношение вероятности пропуска сигнала с неизвестными длительностью, амплитудой и начальной фазой к вероятности пропуска сигнала с неизвестной длительностью и априори известными амплитудой и фазой. Он показывает, во сколько раз изменяется вероятность пропуска сигнала вследствие незнания амплитуды и начальной фазы. Проигрыш χ_2 рассмотрен в работе [4] и показывает, во сколько раз вероятность пропуска сигнала с неизвестной амплитудой больше вероятности пропуска сигнала с известной амплитудой.

На рис. 6 показаны зависимости проигрышей (45) в эффективности обнаружения сигнала (42) вследствие незнания его амплитуды и начальной фазы от отношения сигнал/шум z_r при $k = 4$. Сплошными линиями построены зависимости проигрыша χ_2, штриховыми — проигрыша χ_1. Кривые *1* соответствуют возрастающему импульсу с наклоном вершины $d = 2$, кривые *2* — убывающему импульсу с наклоном $d = 0{,}5$. Уровень ложной тревоги был выбран равным $p = 10^{-2}$. Как видно из рис. 6, проигрыш в эффективности обнаружения из-за незнания амплитуды и начальной фазы сигнала может быть достаточно большим и растёт с уменьшением скачка заднего фронта огибающей.

Сравнить эффективность алгоритма обнаружения радиосигнала с неизвестной амплитудой с эффективностью алгоритма обнаружения радиосигнала с неизвестными амплитудой и начальной

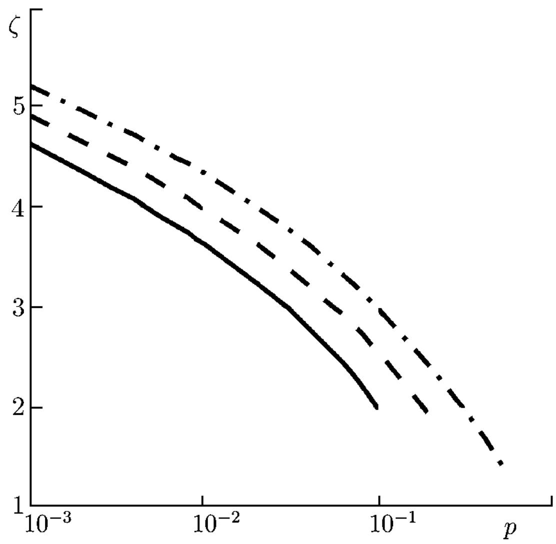

Рис. 5

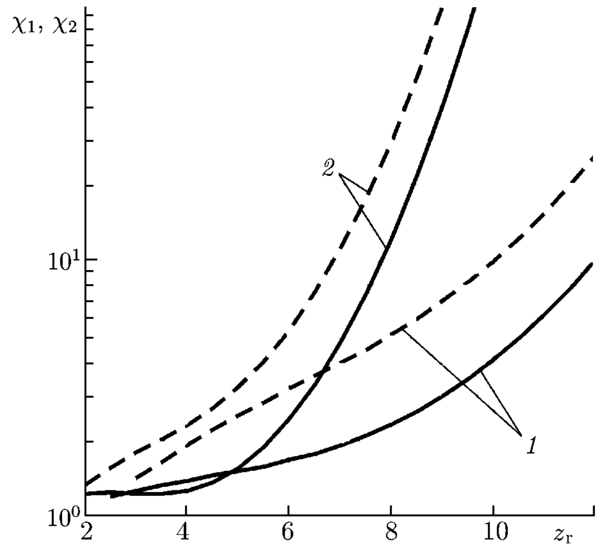

Рис. 6

фазой позволяет величина проигрыша χ (46). Она характеризует увеличение вероятности пропуска радиосигнала вследствие априорного незнания его начальной фазы. На рис. 7 показаны зависимости проигрыша (46) в эффективности обнаружения сигнала (42) вследствие незнания его начальной фазы от отношения сигнал/шум z_{r} при $k = 4$. Сплошными линиями построены графики для убывающего импульса с наклоном вершины $d = 0{,}5$, штриховыми — для возрастающего импульса с наклоном $d = 2$. Кривые *1* соответствуют вероятности ложной тревоги $p = 10^{-2}$, кривые *2* — вероятности $p = 10^{-3}$. Как видно из рис. 7, проигрыш в эффективности обнаружения из-за незнания начальной фазы сигнала может быть достаточно большим и растёт с уменьшением скачка заднего фронта сигнала.

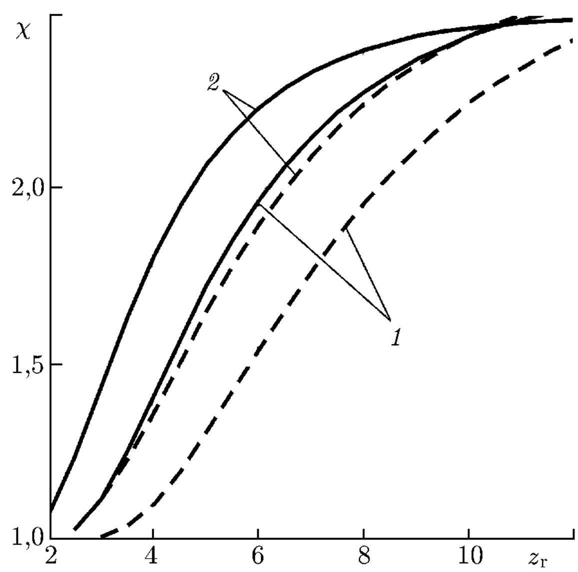

Рис. 7

3. РЕЗУЛЬТАТЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

С целью проверки работоспособности синтезированного алгоритма обнаружения, а также определения границ применимости найденных асимптотических выражений для вероятностей ошибок было выполнено статистическое моделирование алгоритма обнаружения прямоугольного радиоимпульса со скошенной вершиной огибающей (42). Логарифм ФОП (13) представлялся в виде

$$L_i(\eta) = \frac{[z_{\mathrm{r}} iS(\eta,\eta_0)\cos\varphi_0 + N_{\mathrm{c}}(\eta)]^2 + [z_{\mathrm{r}} iS(\eta,\eta_0)\sin\varphi_0 + N_{\mathrm{s}}(\eta)]^2}{2S(\eta,\eta)\sqrt{(d^2+d+1)/3}}\,,$$

$$S(\eta,\eta_0)=\sqrt{3}\,\min(\eta,\eta_0)[1+(d-1)\min(\eta,\eta_0)+(d-1)^2\min(\eta,\eta_0)^2/3]/\sqrt{d^2+d+1}\,,$$

$$N_\mathrm{c}(\eta)=\sqrt{\frac{T_2}{N_0}}\int\limits_0^\eta n(T_2x)[1+(d-1)x]\cos(\omega T_2x)\,\mathrm{d}x,$$

$$N_\mathrm{s}(\eta)=\sqrt{\frac{T_2}{N_0}}\int\limits_0^\eta n(T_2x)[1+(d-1)x]\sin(\omega T_2x)\,\mathrm{d}x,$$

где $\eta=\tau/T_2$, $i=0$ соответствует отсутствию сигнала в принятой реализации, а $i=1$ — наличию сигнала. При компьютерном моделировании вместо $N_\mathrm{c}(\eta)$ и $N_\mathrm{s}(\eta)$ использовались статистически эквивалентные им случайные процессы

$$\tilde{N}_\mathrm{c}(\eta)=\sqrt{\frac{T_2}{2N_0}}\int\limits_0^\eta n(T_2x)[1+(d-1)x]\,\mathrm{d}x,$$

$$\tilde{N}_\mathrm{s}(\eta)=\sqrt{\frac{T_2}{2N_0}}\int\limits_0^\eta n(T_2x)[1+(d-1)x]\,\mathrm{d}x.$$

В процессе моделирования с шагом $\Delta\eta=10^{-6}$ вычислялись отсчёты функций $\tilde{N}(\eta)$ и $\tilde{N}(\eta)$, на основе которых логарифм ФОП аппроксимировался ступенчатой функцией с максимальной относительной среднеквадратической погрешностью $\varepsilon=0{,}1$, а истинное значение начальной фазы φ_0 было выбрано равным нулю. Соответственно дискретные отсчёты логарифма ФОП представлялись в виде

$$L_i(n\Delta\eta)=\frac{\left[z_\mathrm{r}iS(n\Delta\eta,n_0\Delta\eta)+\sqrt{\Delta\eta}\sum\limits_{m=1}^{n}|1+(d-1)m\Delta\eta|x_m\right]^2}{2n\Delta[1+(d-1)n\Delta\eta+(d-1)^2n^2\Delta\eta^2/3]}+{}$$
$$+\frac{\left[\sqrt{\Delta\eta}\sum\limits_{m=1}^{n}|1+(d-1)m\Delta\eta|x_m\right]^2}{2n\Delta[1+(d-1)n\Delta\eta+(d-1)^2n^2\Delta\eta^2/3]}\,. \qquad (47)$$

Здесь x_m — гауссовские статистически независимые случайные величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, $n=\overline{n_1,n_2}$, $n_1=1/k\Delta\eta$, $n_2=1/\Delta\eta$, $n_0=\eta_0/\Delta\eta$.

Для моделирования алгоритма обнаружения на основе отсчётов (47) вычислялись величины

$$L_i=\max_n L_i(n\Delta\eta).$$

Затем они сравнивались с порогом. Если при $i=0$ порог был превышен, то фиксировалась ложная тревога. Аналогичным образом, если порог не был превышен при $i=1$, то фиксировалась ошибка пропуска сигнала. В качестве оценок вероятностей ложной тревоги и пропуска использовались относительные частоты появления соответствующих ошибок. В процессе моделирования было реализовано 10^5 циклов испытаний для каждого z_r. Следовательно, с вероятностью 0,9 границы доверительных интервалов отклоняются от экспериментальных значений вероятностей ложной тревоги и пропуска сигнала не более чем на 15 % при $\alpha,\beta>10^{-3}$.

Результаты моделирования приведены на рис. 2–4. На рис. 2 ромбиками (для $d=0{,}5$), квадратиками (для $d=1$) и кружками (для $d=2$) нанесены экспериментальные значения вероятности ложной тревоги. Как видно из этих рисунков, точность асимптотического выражения (31) для вероятности ложной тревоги возрастает с ростом порога. Формула (31) удовлетворительно описывает экспериментальные данные при $k \geq 4$.

На рис. 3, 4 ромбиками (для $d = 0{,}5$), квадратиками (для $d = 1$) и кружками (для $d = 2$) нанесены экспериментальные значения вероятности пропуска сигнала при $k = 4$. Порог при моделировании вычислялся из заданного уровня вероятности ложной тревоги $\alpha(h) = p$ с использованием асимптотического выражения (31). Результаты, показанные на рис. 3, соответствуют вероятности $p = 10^{-3}$, на рис. 4 — $p = 10^{-6}$. Из этих рисунков видно, что асимптотические выражения для вероятности пропуска сигнала удовлетворительно описывают экспериментальные данные для величин отношения сигнал/шум $z_{\mathrm{r}} \geq 4{\div}5$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Априорное незнание амплитуды и начальной фазы радиосигнала с произвольной формой огибающей и неизвестной длительностью приводит к усложнению структуры обнаружителя. Показано, что форма сигнала может оказывать существенное влияние на эффективность обнаружения. Относительный проигрыш в эффективности обнаружения вследствие априорного незнания амплитуды и начальной фазы возрастает с уменьшением скачка заднего фронта огибающей радиосигнала.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания вузам в сфере научной деятельности на 2014–2016 годы (проект 978).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Трифонов А. П., Шинаков Ю. С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. М.: Радио и связь, 1986. 264 с.
2. Трифонов А. П., Корчагин Ю. Э. // Изв. вузов. Радиофизика. 2002. Т. 45, № 7. С. 625.
3. Мальцев А. А., Силаев А. М. // Радиотехника и электроника. 1987. Т. 32, № 6. С. 1 241.
4. Трифонов А. П., Корчагин Ю. Э., Кондратович П. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 2011. Т. 54, № 5. С. 391.
5. Тихонов В. И. Оптимальный приём сигналов. М.: Радио и связь, 1983. 320 с.
6. Акимов П. С., Бакут П. А., Богданович В. А. и др. Теория обнаружения сигналов. М.: Радио и связь, 1984. 440 с.
7. Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы. М.: Радио и связь, 1977. 488 с.
8. Сосулин Ю. Г. Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов. М.: Сов. радио, 1978. 304 с.
9. Грязнов М. И., Гуревич М. Л., Рябинин Ю. А. Измерение параметров импульсов. М.: Радио и связь, 1991. 216 с.

Поступила в редакцию 7 июля 2014 г.; принята в печать 24 февраля 2015 г.

DETECTION OF RADIO SIGNALS WITH UNKNOWN DURATION, AMPLITUDE, AND INITIAL PHASE

A. P. Trifonov, Yu. E. Korchagin, and M. V. Trifonov

The maximum-likelihood algorithm for detecting a radio signal with an arbitrary envelope shape, which is observed against a background of additive Gaussian white noise is developed. The signal duration, amplitude, and initial phase are unknown. The developed algorithm is analyzed on the assumption of sufficiently large signal-to-noise ratios. Asymptotic expressions for the detection-error probabilities are obtained. The developed-algorithm efficiency is checked by computer simulation and the applicability range of the obtained asymptotic expressions is determined for the algorithm characteristics.