

УДК 533.9.01

К ТЕОРИИ КОРОТКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ АНТЕННЫ В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

Ю. В. Чугунов^{1,2}, Е. А. Широков^{1*}, И. А. Фомина²

¹ Институт прикладной физики РАН;

² Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия

Предложен метод расчёта распределения заряда вдоль короткой (по сравнению с длиной волны излучения) цилиндрической антенны в анизотропной среде и импеданса такой антенны. Метод основан на решении соответствующего интегрального уравнения с использованием приближения «тонкой» антенны при различной её ориентации относительно осей анизотропии среды. Результаты расчётов совпадают с результатами, полученными ранее другими способами, если ось антенны не слишком близка к направлению асимптоты раскрытой поверхности волновых векторов. Детально рассмотрен случай ориентации антенны вдоль этой асимптоты, в окрестности которой резко меняется угловая зависимость реальной и мнимой частей импеданса.

ВВЕДЕНИЕ

Приём и излучение электромагнитных сигналов антеннами, установленными на космических аппаратах, широко применяются при исследованиях ионосферной и магнитосферной плазмы Земли, плазмы солнечного ветра, плазменных оболочек других планет. При таких измерениях важна частотная зависимость импеданса диагностирующей антенны, поскольку вид этой зависимости позволяет разделить вклад антенных эффектов и падающего излучения. Особенно эти вопросы актуальны в резонансных частотных интервалах (полосы гибридных и плазменных резонансов в магнитосферной плазме и полоса плазменного резонанса в солнечном ветре), в которых коэффициенты возбуждения волн сильно отличаются от их значений в вакууме. Вычисление импеданса антенны в таких средах является сложной электродинамической задачей. В то же время размеры антенных систем, используемых в космосе, как правило, меньше характерных длин волн принимаемых и излучаемых электромагнитных сигналов. Поэтому для таких коротких антенн можно использовать квазистатическое описание. Однако в наиболее интересных резонансных частотных интервалах ситуация сильно усложняется даже для коротких антенн из-за интенсивного возбуждения квазипотенциальных резонансных волн. В простейшем случае холодной плазмы и гармонического сигнала возбуждение таких волн описывается дифференциальным уравнением гиперболического типа, для которого необходимо решать краевую задачу. В такой постановке эта задача математической физики является некорректной, т. е. требуется её регуляризация. За последние 40 лет в решении таких задач были достигнуты существенные успехи (см., например, работу [1] и цитируемую в ней литературу, а также статью [2]). В настоящей работе решается интегральное уравнение для распределения заряда на поверхности короткой цилиндрической антенны в зависимости от её ориентации относительно резонансного конуса, в окрестности которого интенсивно возбуждаются резонансные волны, и вычисляется импеданс антенны. Под резонансным конусом понимается конус в пространстве волновых векторов, определяемый асимптотами волновой поверхности, которая не замкнута в резонансных частотных интервалах. Вид волновой поверхности определяется дисперсионным уравнением на данной частоте.

* eshirokov@yandex.ru

1. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАРЯДА ВДОЛЬ АНТЕННЫ

В приближении квазистатики можно ограничиться анализом уравнения для электрического потенциала $\varphi(\mathbf{r})$, которое в анизотропной среде (например, в магнитоактивной плазме) имеет вид [1]

$$\varepsilon_1(\omega) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \varepsilon_1(\omega) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \varepsilon_3(\omega) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (1)$$

Здесь $\varepsilon_1(\omega)$ и $\varepsilon_3(\omega)$ — диагональные компоненты тензора диэлектрической проницаемости среды, ось z декартовой системы координат (x, y, z) направлена вдоль внешнего магнитного поля, $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\omega = 2\pi f$, f — частота излучения.

На поверхности проводников, из которых состоит антенна (при $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$, электрический потенциал одинаков: $\varphi(\mathbf{r}_0) = \varphi_0 = \text{const}$, а на поверхности сферы бесконечного радиуса, внутри которой находится антенна, равен нулю: $\varphi(r \rightarrow \infty) = 0$. Кроме этого, на поверхности проводника нормальная компонента вектора электрической индукции \mathbf{D}_n параллельна вектору $\mathbf{E} = -\nabla\varphi(\mathbf{r})$ и равна

$$\mathbf{D}_n = - [\varepsilon_1(\omega) \sin^2 \beta + \varepsilon_3(\omega) \cos^2 \beta] \partial\varphi/\partial\mathbf{n}. \quad (2)$$

Здесь β — угол между внешней нормалью \mathbf{n} к поверхности проводника в данной точке и осью анизотропии среды.

С учётом этих граничных условий решение уравнения (1) можно записать в следующем виде:

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi} \iint D_n(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}') dS'. \quad (3)$$

Здесь $D_n(\mathbf{r}')/(4\pi) = \sigma(\mathbf{r}')$, $\sigma(\mathbf{r}')$ — поверхностная плотность заряда, интегрирование в (3) проводится по поверхности антенны S_0 , $G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}')$ — функция Грина уравнения (1).

Интегральное уравнение (3) при произвольной геометрии антенной системы чрезвычайно сложно для анализа. Однако для стандартной геометрии тонкой цилиндрической антенны с длиной $2L$ и радиусом провода a ($L \gg a$), на которую подаётся напряжение $U_0 \exp(-i\omega t)$, ориентированную под углом α к оси анизотропии, можно воспользоваться большим параметром теории тонких антенн $\ln(L/a) \gg 1$, модифицировав его на случай анизотропной среды [1]. В этом приближении можно построить решение уравнения (3), т. е. найти распределение заряда по поверхности проводников и, следовательно, импеданс антенны. При этом на всей длине тонкой цилиндрической антенны, за исключением её концов, соотношение (2) сохраняет свой вид с заменой угла β на угол $(\pi/2 - \alpha)$, где α — угол между осью антенны и вектором магнитного поля \mathbf{H}_0 (см. рис. 1).

Введём функцию Грина $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ уравнения (1) следующим образом:

$$\frac{\partial^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial y^2} + \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} \frac{\partial^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial z^2} = -\frac{4\pi}{\varepsilon_1} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (4)$$

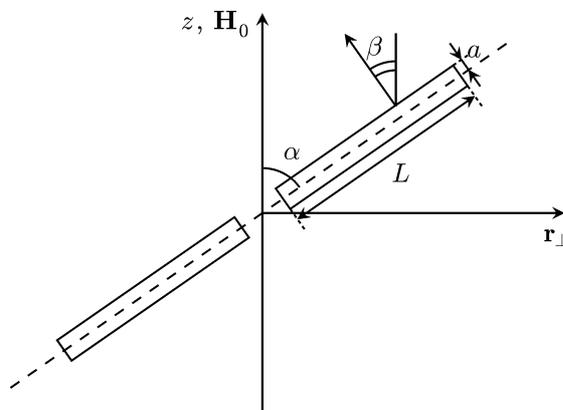


Рис. 1. Расположение антенны относительно оси анизотропии среды (т. е. направления внешнего магнитного поля \mathbf{H}_0). Здесь $\mathbf{r}_\perp = (x, y)$

Здесь \mathbf{r} и \mathbf{r}_0 — векторы текущей точки пространства и точки нахождения единичного заряда соответственно.

Перепишем уравнения (1) и (4) в следующем виде:

$$\Delta\varphi - q \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad (5)$$

$$\Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) - q \frac{\partial^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial z^2} = -\frac{4\pi}{\varepsilon_1} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (6)$$

где $q = 1 - \varepsilon_3/\varepsilon_1$, Δ — оператор Лапласа.

Далее, умножим уравнение (5) на $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$, а уравнение (6) — на $\varphi(\mathbf{r})$ и вычтем полученные уравнения друг из друга. Интегрируя разностное уравнение по объёму вне поверхности антенны (проводника), с использованием интегральных теорем векторного анализа получаем уравнение для распределения потенциала вблизи поверхности антенны:

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{\varepsilon_1}{4\pi} \oint\!\!\!\oint G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') (q \cos^2 \beta - 1) \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS'. \quad (7)$$

Если теперь учесть соотношение (2) и связь между поверхностной плотностью заряда и нормальной компонентой вектора электрической индукции на этой поверхности, уравнение (7) запишется в виде

$$\varphi(\mathbf{r}) = \oint\!\!\!\oint \sigma(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS'. \quad (8)$$

На поверхности проводника в данный момент времени потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ постоянен, поэтому из (8) получаем интегральное уравнение для распределения поверхностной плотности заряда:

$$\varphi(\mathbf{r}_0) = \varphi_0 = \oint\!\!\!\oint \sigma(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}') dS'. \quad (9)$$

Отметим, что функция Грина $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ принципиально отличается на частотных интервалах, в которых произведение диагональных компонент тензора диэлектрической проницаемости $\varepsilon_1\varepsilon_3$ имеет разный знак. В случае $\varepsilon_1\varepsilon_3 > 0$ уравнение (1) является эллиптическим (эллиптическая область квазистатики), и функция Грина легко вычисляется с помощью формальной замены, например, координаты z на координату $z' = z\sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_3}$, при этом

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3 [\mu^2(z - z_0)^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]}}. \quad (10)$$

Здесь и далее $\mu^2 = |\varepsilon_1/\varepsilon_3| > 0$.

В частотном интервале, где $\varepsilon_1\varepsilon_3 < 0$, ситуация сильно усложняется: уравнение (1) становится гиперболическим (гиперболическая область квазистатики), и краевая задача оказывается, вообще говоря, некорректной. С физической точки зрения в данном случае в среде возбуждаются резонансные квазиэлектростатические волны, в которых электрическое поле много больше магнитного. При этом в распределении электрического поля, возбуждаемого антенной, могут существовать особенности типа слабой сингулярности [1]. Регуляризация задачи может быть осуществлена, например, введением слабого поглощения, которое в дальнейшем полагается стремящимся к нулю, либо с использованием принципа причинности [1]. Тогда функция Грина поставленной задачи

определяется следующим выражением:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \begin{cases} \frac{\mu}{\varepsilon_1 \sqrt{\mu^2 (z - z_0)^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}}, \\ \mu^2 (z - z_0)^2 > (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2; \\ \frac{i\mu}{|\varepsilon_1| \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - \mu^2 (z - z_0)^2}}, \\ \mu^2 (z - z_0)^2 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2. \end{cases} \quad (11)$$

Отличие формул (10) и (11) состоит, во-первых, в том, что в выражении (11) функция Грина является комплексной, во-вторых, имеется особая коническая поверхность $\mu^2 (z - z_0)^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ или $\mu^2 \cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma = 0$ (здесь γ — угол между осью анизотропии среды и радиус-вектором, проведённым из начала координат в точку наблюдения), на которой функция Грина имеет особенность. Эта поверхность в пространстве волновых векторов соответствует асимптоте волновой поверхности и отвечает дисперсионному соотношению $\varepsilon_1(\omega, \mathbf{k}) = k_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta} k_\beta / k^2 = 0$, где $\varepsilon_1(\omega, \mathbf{k})$ — продольная диэлектрическая проницаемость среды, k_α и k_β — величины проекций волнового вектора на оси декартовой системы координат (индексы α и β принимают значения x , y или z), $\varepsilon_{\alpha\beta}$ — компоненты тензора диэлектрической проницаемости среды. Вблизи этой асимптоты (резонансной поверхности) возбуждаются квазипотенциальные волны.

Дальнейший анализ интегрального уравнения (9) и его решение требует конкретизации геометрии антенной системы. Рассмотрим описанный выше цилиндрический проводник, в котором возбуждён переменный ток с амплитудой I_0 . При этом необходимо провести регуляризацию исходного интегрального уравнения с целью выделения возможной особенности подынтегральной функции:

$$\varphi_0 = \sigma(\mathbf{r}_0) \oint\!\!\!\!\!\oint G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}'_0) dS' + \oint\!\!\!\!\!\oint [\sigma(\mathbf{r}'_0) - \sigma(\mathbf{r}_0)] G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}'_0) dS'. \quad (12)$$

Далее удобно перейти в новую систему координат, повернув исходную декартову систему на угол α вокруг оси x и направив при этом новую ось z' вдоль оси цилиндрической антенны. Тогда, обозначив координаты точек на поверхности антенны в старой и новой системах координат $\mathbf{r}_0 = \{\xi, \varsigma, \eta\}$ и $\mathbf{r}'_0 = \{\xi', \varsigma', \eta'\}$, имеем

$$x = x', \quad y = z' \sin \alpha + y' \cos \alpha, \quad z = z' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \quad (13)$$

$$\xi = \xi', \quad \varsigma = \varsigma' \cos \alpha - \eta' \sin \alpha, \quad \eta = \xi' \sin \alpha + \eta' \cos \alpha. \quad (14)$$

Введём также цилиндрическую систему координат (ρ, ϕ, z') :

$$x' = \rho \cos \phi, \quad y' = \rho \sin \phi, \quad (15)$$

в которой координаты точки \mathbf{r}'_0 записываются как (δ, ψ, ζ') . В дальнейшем положим $\rho = \delta = a$.

Такое преобразование координат позволяет записать «эффективный» квадрат радиус-вектора функции Грина (подкоренное выражение в (11)) в виде

$$F(z' - \zeta')^2 - a(\mu^2 + 1) \sin 2\alpha (\sin \phi - \sin \psi) (z' - \zeta') + a^2 [\bar{F}(\sin \phi - \sin \psi)^2 - (\cos \phi - \cos \psi)^2],$$

где $F = \mu^2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$, $\bar{F} = \mu^2 \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$.

Последующее интегрирование в формуле (12) по координатам ζ' и ψ можно выполнить относительно легко с учётом тонкости цилиндрического проводника ($L \gg a$). В случае анизотропных сред условие применимости приближения тонкой антенны имеет вид $\ln(|F| L^2/a^2) \gg 1$. Отметим, что в вакууме строгая теория тонких антенн [3] строится в приближении $\ln(L^2/a^2) \gg 1$.

2. РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ И РАСЧЁТ ИМПЕДАНСА АНТЕННЫ В РАЗЛИЧНЫХ ЧАСТОТНЫХ ИНТЕРВАЛАХ

В нерезонансных частотных областях, где $\varepsilon_1\varepsilon_3 > 0$, решение уравнения (12) для квазистатической антенны даёт формулу для её импеданса Z , которую можно получить формальным масштабированием координат,

$$Z = \pm \frac{i \ln \left(2|\tilde{F}|^{1/2} L/a \right)}{\omega \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3} |\tilde{F}|^{1/2} L}, \quad (16)$$

где $\tilde{F} = \mu^2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha$. В выражении (16) знак «+» отвечает ёмкостному импедансу и соответствует частотным интервалам, где $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_3 > 0$, знак «-» отвечает индуктивному импедансу в частотных интервалах, где $\varepsilon_1 < 0$ и $\varepsilon_3 < 0$. Сопротивление излучения R_Σ можно вычислить методом возмущений:

$$R_\Sigma \approx \frac{2\omega^2}{3c^3} f(\varepsilon_{ij}) |\tilde{F}| L^2, \quad (17)$$

где $f(\varepsilon_{ij})$ — функция, зависящая от компонент тензора диэлектрической проницаемости. Например, в случае антенны, направленной вдоль оптической оси одноосного кристалла, $f(\varepsilon_{ij}) \sim \varepsilon_3/\sqrt{\varepsilon_1}$ ($\varepsilon_1 > 0$).

В резонансных частотных интервалах, где $\varepsilon_1\varepsilon_3 < 0$, ситуация существенным образом меняется. Здесь следует различать два случая: $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_3 < 0$ и $\varepsilon_1 < 0$, $\varepsilon_3 > 0$. Сравнительно просто получить решения уравнения (12) можно при выполнении условий $|F|^{1/2} L \gg a$ и $L \gg a$. При этом существенным образом отличаются три случая ориентации оси антенны относительно положения резонансного конуса $\mu^2 \cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma = 0$.

Рассмотрим вначале случай $F > 0$, отвечающий углам ориентации антенны $\alpha < \gamma$. В этом случае антенный ток, возбуждающий резонансные плазменные колебания, ввиду тонкости антенны расположен в основном в области пространства, где функция Грина (11) является преимущественно действительной. При этом с логарифмической точностью, как мы увидим в дальнейшем, основной вклад в импеданс даёт его мнимая часть, что соответствует возбуждению в основном квазистатического реактивного поля. Однако действительная часть импеданса, отвечающая сопротивлению излучения, также значительна и обусловлена переносом возбуждёнными квазиэлектростатическими волнами энергии от антенны. Отметим, что сопротивление излучения значительно больше дипольных потерь, определяемых, например, по формуле (17). Фактически, это резонансные потери на возбуждение квазипродольных волн, связанные с мнимой частью функции Грина и её особенностью на резонансной поверхности $\mu^2 \cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma = 0$. Решение уравнения (12) посредством интегрирования по углу ψ и координате z' с учётом соотношений (13)–(15) и условия тонкости антенны $\ln(|F| L^2/a^2) \gg 1$ в первом слагаемом уравнения (12) приводит к следующему результату:

$$\sigma(z') = \frac{\sqrt{|\varepsilon_1\varepsilon_3|} \tilde{F} \varphi_0}{2\pi \{ \mp [\ln(F(L^2 - z'^2)/a^2)] - i\pi \}}. \quad (18)$$

Отметим, что в рамках принятых приближений второе слагаемое в правой части интегрального уравнения (12) вносит малый вклад в распределение заряда из-за регулярности подынтегральной функции. Как видно из формулы (18), распределение заряда вдоль оси антенны практически равномерное за исключением концов провода $z' = \pm L$. Отметим также, что подобное распределение заряда имеет место и в нерезонансных частотных интервалах, в которых, однако, в нём отсутствует мнимая часть. Последнее слагаемое в знаменателе (18) описывает потери на возбуждение квазипотенциальных волн, в которых электрическое поле много больше магнитного, и уже

в квазистатическом приближении приводит к появлению действительной части импеданса антенны, или сопротивлению излучения. Действительно, полный заряд антенны $Q = 2\pi \int_{-L}^{+L} \sigma(z') dz'$ в этом приближении равен

$$Q = \frac{\sqrt{|\varepsilon_1 \varepsilon_3| F} L \varphi_0}{\ln(2\sqrt{F} L/a)} \left[\pm 1 + \frac{i\pi}{2 \ln(2\sqrt{F} L/a)} \right]. \quad (19)$$

Соответственно, квазистатический импеданс антенны $Z = i\varphi_0/(\omega Q)$ определяется следующим выражением:

$$Z = \frac{(\pi/2) \pm i \ln(2\sqrt{F} L/a)}{\omega \sqrt{|\varepsilon_1 \varepsilon_3| F} L}. \quad (20)$$

Здесь знак «+» отвечает ёмкостному импедансу в частотных интервалах, где $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_3 < 0$, знак «-» соответствует индуктивному импедансу в частотных интервалах, где $\varepsilon_1 < 0$ и $\varepsilon_3 > 0$.

Отличительной чертой вычисленного импеданса, как отмечалось выше, является наличие у него действительной части (т.е. сопротивления излучения) уже в квазистатическом приближении. При этом действительная часть импеданса существенно превышает сопротивление излучения в электромагнитную моду. Действительно, отношение этих сопротивлений по порядку величины равно

$$\frac{R_{\text{res}}}{R_{\text{em}}} \approx \left(\frac{c}{\omega L} \right)^3 \gg 1, \quad (21)$$

а соответствующие мнимые части импедансов приближённо равны $\text{Im } Z_{\text{res}} \approx \ln(2\sqrt{F} L/a)/(\omega \times \sqrt{F} L)$ и $\text{Im } Z_{\text{em}} \approx \ln(2\sqrt{|\tilde{F}|} L/a)/(\omega \sqrt{|\tilde{F}|} L)$.

Теперь рассмотрим случай $F < 0$, соответствующий такой ориентации антенны, при которой её ток течёт в основном там, где функция Грина преимущественно мнимая. Это, в частности, означает, что возбуждающий ток и электрическое поле в основном синфазны. В результате действительная часть импеданса антенны, описывающая потери энергии, существенно превышает его мнимую часть, которая соответствует квадратурному сдвигу фаз между током и напряжением.

Будем считать, что приближение тонкой антенны выполнено и имеет вид $L \gg a$, $M = \ln(2\sqrt{|F|} L/a) \gg 1$. Тогда, решая уравнение (12), аналогично предыдущему случаю получаем следующее распределение поверхностной плотности заряда:

$$\sigma(z') = \frac{i}{2\pi M} \sqrt{|\varepsilon_1 \varepsilon_3 F|} \varphi_0 \left[2 - \frac{\ln(1 - z'^2/L^2)}{M} + \ln(\mu^2 + |F|)^{1/2} \pm 2i \arctg \left(\frac{\mu}{|F|^{1/2}} \right) \right]. \quad (22)$$

Соответственно, импеданс антенны равен

$$Z = \frac{\ln \left[\left(2\sqrt{|F|} L/a \right) (\mu^2 + |F|)^{-1/2} \right] \pm i \arctg(\mu |F|^{-1/2})}{\omega \sqrt{|\varepsilon_1 \varepsilon_3 F|} L}. \quad (23)$$

Знаки мнимой части импеданса выбираются так же, как и в предыдущем разделе.

Из выражения (23) следует, что сопротивление излучения много больше величины реактанса. Отметим также следующее. Величина импеданса зависит от двух основных параметров, $\mu = |\varepsilon_1/\varepsilon_3|^{1/2}$ и $|F| = |\mu^2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha|$. Первый из них можно рассматривать как поляризационный, а второй определяет эффективный угол ориентации антенны относительно резонансного конуса. Интересны случаи, когда $|F|^{1/2} \gg \mu$ или $|F|^{1/2} \approx \sin \alpha \gg \mu$. Тогда действительная часть импеданса $\text{Re} Z = \ln(2L/a)/(\omega \sqrt{|\varepsilon_1 \varepsilon_3|} \sin \alpha L)$, а его мнимая часть не зависит от частоты и равна

$\text{Im}Z \approx (\omega_{pe}L \sin \alpha)^{-1}$, где ω_{pe} — плазменная частота электронов. Мнимая часть импеданса мала, например, в типичных условиях ионосферы Земли при длине антенны порядка 10 м, когда она составляет несколько ом. Другими словами, в этих условиях имеет место практически полное согласование антенны.

Наиболее сложным является случай, когда антенна ориентирована вдоль резонансного конуса, т. е. $F = 0$. Из формул (20) и (23) следует, что при $F \rightarrow 0$ как действительная, так и мнимая части импеданса стремятся к бесконечности. В то же время понятно, что при этом нарушается приближение тонкой антенны $\ln(|F|^{1/2}L/a) \gg 1$ и следует более аккуратно рассматривать предельный переход $F \rightarrow 0$. Для этого запишем эффективный квадрат радиус-вектора в функции Грина (11) на поверхности проводника при $F \rightarrow 0$, предполагая, что $|F|^{1/2}L \ll a$ и $L/a \gg 1$, в виде

$$R^2 \approx 2a\mu (\sin \phi - \sin \psi) (\zeta' - z') - a^2 [(\mu^2 - 1) (\sin \phi - \sin \psi)^2 - (\cos \phi - \cos \psi)^2]. \quad (24)$$

Пренебрегая в формуле (24) слагаемыми порядка a/L , получаем

$$R \approx [2a\mu (\sin \phi - \sin \psi) (\zeta' - z')]^{1/2}. \quad (25)$$

Тогда интегрирование по углу ψ и координате ζ' в уравнении (12) приводит к следующему результату:

$$\sigma(z', \phi) = \sigma(z')\sigma(\phi) = \frac{i}{4L} \sqrt{|\varepsilon_1\varepsilon_3| 2\mu aL} \varphi_0 \left[(z'/L - 1)^{1/2} + (z'/L + 1)^{1/2} \right] I^{-1}(\phi), \quad (26)$$

где

$$I(\phi) = \int_0^{2\pi} d\psi (\sin \phi - \sin \psi)^{-1/2}.$$

Тогда заряд антенны $Q = \int_{-L}^{+L} \sigma(z') dz' \int_0^{2\pi} 1/I(\phi) d\phi$ равен

$$Q = -\frac{2}{3} \sqrt{|\varepsilon_1\varepsilon_3| \mu aL} \varphi_0 \quad (27)$$

с учётом того, что

$$\int_0^{2\pi} d\phi \left[\int_0^{2\pi} d\psi (\sin \phi - \sin \psi)^{-1/2} \right]^{-1} \approx 0,5 (1 + i).$$

Соответственно, импеданс антенны определяется следующим выражением:

$$Z = \pm \frac{3i}{2\omega \sqrt{|\varepsilon_1\varepsilon_3| \mu aL}}. \quad (28)$$

Как видно из формулы (28), импеданс имеет индуктивный или ёмкостный характер в зависимости от соотношения знаков величин $\varepsilon_1(\omega)$ и $\varepsilon_3(\omega)$. Сопротивление излучения в данном приближении равно нулю, т. к. при данной ориентации антенны ток в ней перпендикулярен электрическому полю резонансных мод.

Из формул (26)–(28) видно, что характерный масштаб, который определяет распределение тока и заряда, равен $\Lambda \approx \sqrt{\mu aL}$. Этот масштаб мал по сравнению с длиной антенны, поэтому в данном случае импеданс значительно больше по величине, чем в рассмотренных ранее случаях

$F > 0$ и $F < 0$. По существу, этот масштаб ограничивает рост импеданса при приближении оси антенны к резонансному конусу ($\alpha \rightarrow \gamma$).

Интересно отметить, что выражения для импеданса антенны для случаев $F > 0$ и $F < 0$ (формулы (20) и (23)) совпадают с формулами, полученными в приближении заданного (равномерного) распределения заряда по поверхности проводника. Этот факт отмечался в работах [1, 2, 4, 5]. Расчёт импеданса антенны по заданному распределению заряда (тока) с использованием комплексной теоремы Пойнтинга сводится к тому, что заданное распределение заряда и тока рассматриваются в уравнениях Максвелла как сторонние источники [6]. Это предположение, вообще говоря, не обосновано даже для короткого диполя в вакууме, когда распределение заряда и импеданс должны определяться в результате решения краевой задачи [1, 3]. В случае магнитоактивной плазмы в резонансных частотных интервалах даже короткая антенна возбуждает излучение с достаточно широким спектром волновых чисел, в том числе отвечающих длинам волн порядка и меньше размера антенны. Эти квазипотенциальные волны формируют ту часть диаграммы направленности, в которую излучается основная энергия, и определяют величину импеданса. Отметим, что в этом случае квазиэлектростатическое (ближнее) поле содержит компоненты, соответствующие как квадратурным, так и синфазным току и напряжению, которые определяют величину реактанса и сопротивление излучения соответственно. В подобной ситуации постановка и решение краевой задачи представляют значительный интерес. Кроме этого, формулы (20) и (23) с точностью до логарифмически малых поправок отвечают равномерному распределению заряда по поверхности проводника. Из этих формул также следует, что эффективная длина, определяющая величину импеданса, равна $L_{\text{eff}} = |F|^{1/2}L$ и находится с помощью формального масштабирования координат в исходном уравнении (1). Для провода (линейной антенны) эффективная длина зависит только от ориентации антенны относительно направляющей резонансного конуса. При приближении оси антенны к резонансному углу $L_{\text{eff}} \rightarrow 0$, а импеданс антенны резко возрастает. Ограничение импеданса связано с изменением эффективной длины и отражено в соответствующем решении интегрального уравнения (26). Эффективная длина антенны в этом случае равна $L_{\text{eff}} \approx \sqrt{\mu a L} \ll L$, распределение поверхностной плотности заряда неоднородно по длине проводника и зависит от азимутального угла. Это следует из формулы (26) и означает, что в этом случае структура ближнего поля сильно меняется по сравнению со случаем ориентации оси антенны вдали от резонансного направления.

Необходимо также отметить следующее. Прямым подтверждением правильности приведённых здесь расчётов служит серия работ по интерпретации шумовых излучений (как правило, неравновесных), регистрируемых антеннами в космической плазме (см., например, обзор [7] и цитируемую там литературу). В простейшей модели неравновесности в виде двухтемпературной плазмы можно написать аналог формулы Найквиста, в которой спектр шумовой ЭДС пропорционален некоторой эффективной температуре и сопротивлению излучения антенны. Если антенна меняет ориентацию относительно внешнего магнитного поля, то меняется и амплитуда спектра в соответствии с изменением сопротивления излучения, что чётко прослеживается в ряде ионосферных и магнитосферных экспериментов.

В качестве теоретического обоснования правильности найденного решения интегрального уравнения можно сослаться на электродинамическую задачу о заряженном эллипсоиде, излучающем на частоте из резонансного интервала и ориентированном параллельно и перпендикулярно магнитному полю (строгое решение этой задачи приведено в работе [1]). Выражения для импеданса тонкой антенны, полученные в этой задаче и в данной статье, для выбранных углов ориентации совпадают.

Экспериментальные работы по измерению импедансных характеристик дипольных антенн в лабораторной магнитоактивной плазме описаны, например, в статье [6] для случая ориентации

антенны вдоль магнитного поля, причём найденные экспериментальным путём значения импеданса с хорошей точностью совпадают с соответствующими теоретическими значениями.

Известно также, что при размещении антенны в плазме вокруг антенны формируются неоднородные распределения статического поля и концентрации частиц. Поэтому, вообще говоря, вопрос о распределении высокочастотного поля должен решаться с учётом найденного решения статической задачи. Поскольку строгое решение последней известно для небольшого числа случаев (см., например, монографию [1] и цитируемую в ней литературу), часто приходится ограничиваться анализом простейших моделей. Понятно, что статические эффекты могут играть принципиальную роль при излучении на низких частотах, при появлении локализованных областей плазменного резонанса из-за неоднородного статического распределения концентрации плазмы, наличия дополнительной ёмкости двойного слоя и т. д. В остальных случаях можно считать плазму, окружающую антенну, однородной или слабонеоднородной с заданным профилем неоднородности, используя известные тензоры проводимости и диэлектрической проницаемости, в которых зависимость от частоты и волнового вектора учитывает временную и пространственную дисперсию.

Для рассмотренного в настоящей статье случая длинной тонкой антенны вопрос сводится к тому, какой эффективный радиус антенного провода необходимо подставить в критерий применимости приближения тонкой антенны при анализе её высокочастотного излучения. Можно предположить, что эффективный радиус варьируется от физического радиуса антенного провода до дебаевского радиуса плазмы (естественно, здесь предполагается, что длина антенного провода много больше дебаевского радиуса).

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Найденные решения интегрального уравнения для распределения заряда по поверхности тонкой цилиндрической антенны, находящейся в анизотропной плазме, которые позволяют вычислить импеданс антенны. Определение последнего важно для детального анализа шумовых и регулярных излучений, регистрируемых дипольными антеннами в ионосфере и магнитосфере Земли и других планет и в плазме солнечного ветра. Для анализа шумовых излучений, которые, как правило, являются неравновесными, необходимо знать величину и частотный ход импеданса антенны. Действительно, как показано в ряде работ (см., например, работу [7] и цитируемую в ней литературу), спектральная плотность мощности неравновесного шумового излучения пропорциональна его эффективной температуре и сопротивлению излучения дипольной антенны. Когда тепловое излучение регистрируется в резонансных частотных интервалах, интенсивность шума на терминале приёмной антенны резко возрастает за счёт роста как эффективной температуры неравновесной среды, так и сопротивления излучения антенны, причём зачастую спектр излучения определяется именно частотной зависимостью отклика антенны. Подобные особенности имеют место и при приёме регулярного неравновесного излучения, когда важную роль может играть сильное изменение эффективной длины приёмной антенны.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 13-02-97074 р_поволжье_a (Ю. В. Чугунов), 14-02-31081 мол_a и 12-02-00344 (Е. А. Широков)), Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-1041.2014.2) и Программы 22 Президиума РАН «Фундаментальные проблемы исследований и освоения Солнечной системы».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мареев Е. А., Чугунов Ю. В. Антенны в плазме. Нижний Новгород: ИПФ АН, 1991. 232 с.
2. Bell T. F., Inan U. S., Chevalier T. // Radio Sci. 2006. V. 41, No. 2. Art. no. RS2009.
3. Леонтович М. А., Левин М. Л. // Журн. техн. физ. 1944. Т. 14, № 9. С. 481.
4. Чугунов Ю. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1968. Т. 11, № 12. С. 1829.
5. Чугунов Ю. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1969. Т. 12, № 6. С. 830.
6. Balmain K. G. // IEEE Trans. Antennas and Propagat. 1964. V. 12, No. 5. P. 605.
7. Чугунов Ю. В. // Плазменная гелиогеофизика. Т. 2. М.: Физматлит, 2008. С. 302.

Поступила в редакцию 11 июля 2014 г.; принята в печать 9 декабря 2014 г.

**ON THE THEORY OF A SHORT CYLINDRICAL ANTENNA
IN ANISOTROPIC MEDIA**

Yu. V. Chugunov, E. A. Shirokov, and I. A. Fomina

We propose a method for calculation of the charge distribution along a short (on the wavelength scale) cylindrical antenna in an anisotropic medium and the impedance of the antenna. This method is based on the solution of the corresponding integral equation by using a “thin” antenna approximation for different angles of dipole orientation relative to the anisotropic axes. The calculation results coincide with the results obtained earlier by other methods if the antenna axis is not too close to the direction of the asymptote of an open wave-vector surface. The case where the antenna is oriented along this asymptote, and the angular dependence of the real and imaginary parts of the impedance changes abruptly in its vicinity, is considered in detail.