

УДК 621.391.1

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ВЕСОВОГО ВЕКТОРА АДАПТИВНОЙ АНТЕННОЙ РЕШЁТКИ ПУТЁМ ОГРАНИЧЕНИЯ ЧИСЛА БАЗИСНЫХ ВЕКТОРОВ*В. Т. Ермолаев¹, В. Ю. Семёнов², И. С. Сорокин^{1*}, А. Г. Флакман¹, А. В. Ястребов³*¹ Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского;² ОАО «Конструкторское бюро «Кунцево»;³ Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексева,
г. Нижний Новгород, Россия

Рассматривается адаптивная антенная решётка, обеспечивающая максимальное отношение мощности сигнала к средней мощности шума на её выходе. Предложены два алгоритма адаптивной обработки сигнала в базисе степенных векторов. Для каждого из алгоритмов получены регуляризованные оценки весового вектора по ограниченному числу выборок входного процесса, которое может быть, как больше, так и меньше (случай короткой выборки) числа элементов решётки. Приводятся результаты моделирования адаптивной обработки сигналов, которые показывают высокую эффективность обработки сигнала в рассматриваемой решётке.

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим N -элементную адаптивную антенную решётку произвольной конфигурации. Одним из наиболее важных критериев эффективности адаптивной обработки является выходное отношение мощности сигнала к средней мощности шума (ОСШ) $\eta = |\mathbf{W}^H \mathbf{S}|^2 (\mathbf{W}^H \mathbf{M} \mathbf{W})^{-1}$, где $\mathbf{M} = \langle \mathbf{X} \mathbf{X}^H \rangle$ — корреляционная матрица шума в элементах решётки, \mathbf{X} — вектор случайных комплексных амплитуд шума, \mathbf{S} — известный вектор комплексных амплитуд полезного сигнала в элементах решётки, символ «H» обозначает эрмитово сопряжение, угловыми скобками обозначено статистическое среднее. Оптимальный весовой вектор \mathbf{W} , обеспечивающий максимальное ОСШ, определяется из уравнения [1–5]

$$\mathbf{M} \mathbf{W} = \xi \mathbf{S}, \quad (1)$$

где ξ — произвольный комплексный множитель.

Свойства оптимального весового вектора \mathbf{W} подробно исследованы во многих работах (например, [1–9]). В частности, в работах [6–9] предложено и исследовано представление вектора \mathbf{W} в базисе степенных векторов $\mathbf{S}, \mathbf{M} \mathbf{S}, \mathbf{M}^2 \mathbf{S}, \dots, \mathbf{M}^{K-1} \mathbf{S}$. Из всех возможных базисных систем, базис степенных векторов обладает наименьшей размерностью, поскольку количество базисных векторов равно степени минимального многочлена корреляционной матрицы, или, что то же самое, числу неравных между собой собственных чисел корреляционной матрицы [9, 10]. В работе [9] было также показано, что необходимое для оптимальной обработки число базисных векторов $K \leq J + 1$, где J — число внешних дискретных источников шума. Степенные векторы $\mathbf{M} \mathbf{S}, \mathbf{M}^2 \mathbf{S}, \dots, \mathbf{M}^{K-1} \mathbf{S}$ имеют физический смысл корреляционных векторов, что позволяет использовать корреляционные устройства для их формирования [9]. Квазиоптимальная обработка сигналов, которая возможна за счёт уменьшения размерности базиса, позволяет снизить вычислительную сложность алгоритма при относительно небольших потерях в эффективности [7, 8].

При адаптивной обработке сигнала вместо вектора \mathbf{W} используется его оценка $\hat{\mathbf{W}}$, полученная на основе обработки L временных выборок случайных комплексных амплитуд входного

* igor_04.04_40in@inbox.ru

шума $\mathbf{X}(j)$ ($j = 1 \div L$) каким-либо из способов. Например, метод непосредственного обращения корреляционной матрицы шума [1, 2] предполагает вычисление максимально правдоподобной оценки этой матрицы в виде

$$\hat{\mathbf{M}} = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \mathbf{X}(j)\mathbf{X}^H(j) \quad (2)$$

и оценку весового вектора по формуле $\hat{\mathbf{W}} = \hat{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{S}$.

Такое решение нельзя рекомендовать для практического использования по следующим причинам. Во-первых, корреляционная матрица (2) при числе выборок $L \approx N$ является плохо обусловленной, а в важном случае короткой выборки входного процесса, когда число выборок меньше числа элементов решётки ($L < N$), становится вырожденной. Задачи, связанные с обращением плохо обусловленных матриц, относятся к классу некорректно поставленных задач [11], и для их решения следует использовать методы регуляризации [11–13]. Вторая проблема связана с ростом вычислительной сложности при увеличении числа N антенных элементов. Так, для обращения корреляционной матрицы (2) необходимо выполнить примерно N^3 умножений комплексных чисел, кроме того, для вычисления элементов матрицы (2) с учётом её эрмитовости требуется $(N + 1)NL/2$ комплексных умножений.

Методы регуляризации, рассмотренные в работах [11–13], позволяют стабилизировать весовой вектор и проводить его оценку в случае короткой выборки ($L < N$), однако вычислительная сложность сохраняется высокой. Можно избежать процедуры обращения матрицы (2), если использовать градиентные адаптивные алгоритмы [1, 2]. В этом случае вычислительная сложность для одной итерации уменьшается, но при плохой обусловленности матрицы (2) резко возрастает число итераций, что ведёт к затягиванию переходного процесса настройки весового вектора. Для регуляризации весового вектора рекомендуется также процедура рекуррентного обращения корреляционной матрицы [1, 2], которая применима при короткой выборке и требует примерно N^2L умножений комплексных чисел.

В работах [14] предложены два способа оценки весового вектора адаптивной антенной решётки. Аналитические решения в каждом из них получаются посредством ортогонализации степенных векторов, при этом решения справедливы для решётки произвольной конфигурации и для произвольных корреляционной матрицы \mathbf{M} и вектора сигнала \mathbf{S} . Адаптивные алгоритмы строятся путём введения в процедуру ортогонализации выборочной корреляционной матрицы (2) вместо точной матрицы \mathbf{M} . Одновременно выполняется регуляризация весового вектора ограничением размера базиса стохастических степенных векторов. Достоинство такого подхода заключается в низкой вычислительной сложности обоих способов, поскольку число комплексных умножений зависит линейно от числа L выборок, числа J внешних источников шума и числа N антенных элементов. Алгоритмы обладают высокой эффективностью при короткой выборке входного процесса ($L < N$), что особенно важно для многоэлементных адаптивных антенных решёток ($N \gg 1$).

Однако детальный анализ данных алгоритмов обнаружил проблему выбора корректного условия для остановки процедуры ортогонализации или (что эквивалентно) для оценки размерности степенного базиса. Предложенное в работах [14, 15] условие остановки данной процедуры является корректным только на первом шаге ортогонализации, т. е. когда принимается решение о наличии или отсутствии внешних помех, принимаемых на фоне собственного шума системы. Это условие обосновано из известных статистических свойств собственного шума, но его применение для остановки процедуры ортогонализации на втором и последующих шагах не гарантирует, что число базисных векторов определяется числом J внешних источников шума ($K \leq J + 1$, см. выше). Наблюдаются сценарии, когда $K \gg J + 1$, т. е. порождается большое число лишних базисных векторов. Это обстоятельство снижает эффективность обработки, особенно при условии $L < N$,

а также увеличивает вычислительные затраты.

В данной работе исследуется отмеченная выше проблема регуляризации весового вектора и предлагается новый подход для остановки процедуры ортогонализации степенных векторов. В процессе ортогонализации на втором и последующих шагах выполняется оценка ОСШ, и, когда ОСШ достигает максимального значения, процедура ортогонализации обрывается.

1. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ОПТИМАЛЬНОГО ВЕСОВОГО ВЕКТОРА

Ортогонализация и нормировка регулярных степенных базисных векторов $\mathbf{S}, \mathbf{MS}, \mathbf{M}^2\mathbf{S}, \dots, \mathbf{M}^{K-1}\mathbf{S}$ выполняется по следующей схеме [15]:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{F}}_0 &= \mathbf{S}, & \mathbf{F}_0 &= (\hat{\mathbf{F}}_0, \hat{\mathbf{F}}_0)^{-1/2} \hat{\mathbf{F}}_0, \\ \hat{\mathbf{F}}_1 &= \mathbf{M}\mathbf{F}_0 - \alpha_0\mathbf{F}_0, & \mathbf{F}_1 &= (\hat{\mathbf{F}}_1, \hat{\mathbf{F}}_1)^{-1/2} \hat{\mathbf{F}}_1, \\ \hat{\mathbf{F}}_2 &= \mathbf{M}\mathbf{F}_1 - \alpha_1\mathbf{F}_1 - \beta_0\mathbf{F}_0, & \mathbf{F}_2 &= (\hat{\mathbf{F}}_2, \hat{\mathbf{F}}_2)^{-1/2} \hat{\mathbf{F}}_2, \\ & \dots & & \\ \hat{\mathbf{F}}_n &= \mathbf{M}\mathbf{F}_{n-1} - \alpha_{n-1}\mathbf{F}_{n-1} - \beta_{n-2}\mathbf{F}_{n-2}, & \mathbf{F}_n &= (\hat{\mathbf{F}}_n, \hat{\mathbf{F}}_n)^{-1/2} \hat{\mathbf{F}}_n. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь коэффициенты $\alpha_{n-1} = (\mathbf{M}\mathbf{F}_{n-1}, \mathbf{F}_{n-1})$ при $n \geq 1$, $\beta_{n-2} = (\mathbf{M}\mathbf{F}_{n-1}, \mathbf{F}_{n-2})$ при $n \geq 2$, через (\mathbf{a}, \mathbf{b}) обозначено скалярное произведение произвольных векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} . Введём в рассмотрение два типа скалярных произведений [10]:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a}^H \mathbf{b} = \sum_{j=1}^N a_j^* b_j, \quad (4)$$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a}^H \mathbf{M} \mathbf{b} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_i^* M_{ij} b_j. \quad (5)$$

где символ «*» обозначает комплексное сопряжение. Особенность такой процедуры ортогонализации и нормировки базисных векторов заключается в том, что каждый вектор с индексом $n \geq 2$ формируется с использованием только двух предыдущих векторов, а коэффициенты α_{n-1} и β_{n-2} являются действительными числами.

Теперь с помощью схемы (3) можно получить две системы векторов $\mathbf{F}_0, \mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_{K-1}$: в одной ортогональность векторов понимается в смысле скалярного произведения (4), а в другой — в смысле скалярного произведения (5). В обоих случаях оптимальный весовой вектор можно записать в виде

$$\mathbf{W} = c_0 \mathbf{F}_0 + c_1 \mathbf{F}_1 + \dots + c_{K-1} \mathbf{F}_{K-1}, \quad (6)$$

где c_0, c_1, \dots, c_{K-1} — коэффициенты разложения, которые необходимо определить.

Рассмотрим способ ортогонализации, который использует скалярное произведение (4). Поскольку ОСШ не зависит от нормировки весового вектора \mathbf{W} , один из коэффициентов разложения (6) можно выбрать произвольно. Положим $c_0 = 1$. Оставшиеся коэффициенты разложения c_1, c_2, \dots, c_{K-1} представим в виде вектора-столбца \mathbf{C} , а ортонормированные базисные векторы $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_{K-1}$ — в виде столбцов матрицы \mathbf{F} . Тогда формула (6) преобразуется к виду

$$\mathbf{W} = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}\mathbf{C}. \quad (7)$$

Подставим выражение (7) в уравнение (1), умножим полученное равенство слева на матрицу \mathbf{F}^H и учтём, что в силу принятого скалярного произведения (4) произведение $\mathbf{F}^H \mathbf{S} = 0$. В результате получим систему уравнений с размерностью $K - 1$ для определения вектора \mathbf{C} :

$$\mathbf{F}^H \mathbf{M} \mathbf{F} \mathbf{C} = -\mathbf{F}^H \mathbf{M} \mathbf{F}_0. \tag{8}$$

Эта система уравнений была подробно исследована в работе [14], где её решение получено в аналитической форме благодаря тому, что матрица $\mathbf{F}^H \mathbf{M} \mathbf{F}$ имеет простой трёхдиагональный вид, а в векторе $\mathbf{F}^H \mathbf{M} \mathbf{F}_0$ ненулевым является только первый элемент. Формулы для определения коэффициентов разложения c_1, c_2, \dots, c_{K-1} имеют вид

$$c_1 = -\frac{\beta_0}{\alpha_1 - \frac{\beta_1^2}{\alpha_2 - \frac{\beta_2^2}{\dots - \frac{\beta_{K-2}^2}{\alpha_{K-1}}}}}; \quad c_2 = -\frac{\alpha_1 c_1 + \beta_0}{\beta_1}; \quad c_n = -\frac{\beta_{n-2} c_{n-2} + \alpha_{n-1} c_{n-1}}{\beta_{n-1}}, \tag{9}$$

$n = 3, \dots, K - 1$.

Второй способ ортогонализации использует скалярное произведение (5). Подставим разложение (6) в уравнение (1) и получим, что

$$c_0 \mathbf{M} \mathbf{F}_0 + c_1 \mathbf{M} \mathbf{F}_1 + \dots + c_{K-1} \mathbf{M} \mathbf{F}_{K-1} = \mathbf{S}. \tag{10}$$

Домножая равенство (10) слева последовательно на базисные векторы $\mathbf{F}_0^H, \mathbf{F}_1^H, \dots, \mathbf{F}_{K-1}^H$ и учитывая, что в силу принятого скалярного произведения (5) произведение $\mathbf{F}_i^H \mathbf{M} \mathbf{F}_j = \delta_{ij}$, получим следующие аналитические выражения для коэффициентов разложения c_0, c_1, \dots, c_{K-1} :

$$c_j = \mathbf{F}_j^H \mathbf{S}, \tag{11}$$

$j = 0, \dots, K - 1$.

Поскольку ОСШ не зависит от нормировки весового вектора \mathbf{W} , поделим все коэффициенты (11) на c_0 . Это позволяет привести весовой вектор (6) к виду (7), т. е. к виду, принятому при первом способе решения. Соответственно, вектор \mathbf{C} в формуле (7) будет иметь компоненты

$$c_j = \mathbf{F}_j^H \mathbf{S} / (\mathbf{F}_0^H \mathbf{S}), \tag{12}$$

$j = 0, \dots, K - 1$.

Физическую интерпретацию адаптивных алгоритмов дадим с помощью рис. 1. На рис. 1 изображены N антенных элементов, которые соединены с формирователем лучей антенной решётки и цифровым вычислительным устройством.

Выборки шума $\mathbf{X}(j)$ подаются на цифровое вычислительное устройство, где выполняется процедура ортогонализации, вычисляются базисные векторы $\mathbf{F}_0, \mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_{K-1}$ и весовые коэффициенты c_1, c_2, \dots, c_{K-1} . Формирователь лучей имеет K выходов.

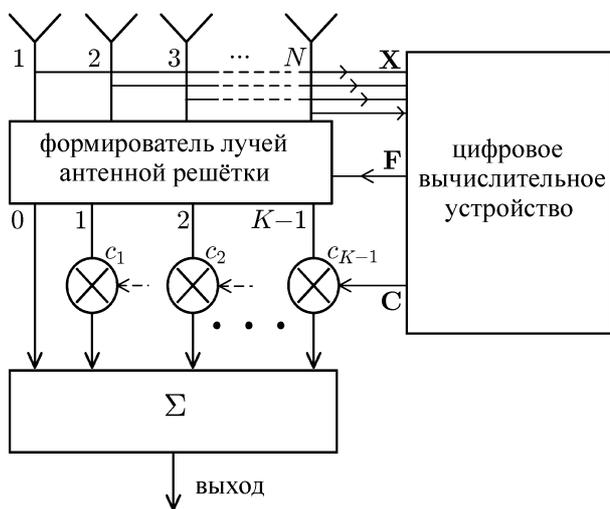


Рис. 1

В случае первого адаптивного алгоритма из-за ортогональности вектора сигнала \mathbf{S} с векторами $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_{K-1}$ по типу (4), полезный сигнал проходит только на основной выход «0» и не проходит на другие (вспомогательные) выходы. Шумы внешних источников проходят на все выходы формирователя. Далее шумы суммируются с весовыми коэффициентами c_1, c_2, \dots, c_{K-1} , в результате чего средняя мощность шума на выходе минимизируется и обеспечивается максимальное ОСШ на выходе адаптивной антенной решётки. В случае второго адаптивного алгоритма, из-за ортогональности базисных векторов по типу (5), шумы на выходах формирователя становятся некоррелированными и имеют единичные мощности. В данном случае формирователь играет роль «обесцвечивающего» фильтра. Полезный сигнал проходит на все выходы формирователя, где выполняется весовое суммирование выходных сигналов с коэффициентами c_1, c_2, \dots, c_{K-1} . Это приводит к увеличению амплитуды полезного сигнала, благодаря чему достигается максимальное выходное ОСШ.

2. АДАПТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ

Применим полученные аналитические решения уравнения (1) к адаптивной обработке. Для этого заменим корреляционную матрицу \mathbf{M} в схеме ортогонализации (3) на её максимально правдоподобную оценку (2). Собственные числа корреляционной матрицы (2) являются случайными, они не равны друг другу, а их общее число равно числу N антенных элементов. Соответственно, базис стохастических степенных векторов становится равным N . Например, при отсутствии внешних источников шума в системе имеется только собственный шум, и весовой вектор (6) должен содержать только один базисный вектор \mathbf{F}_0 . Следующий вектор \mathbf{F}_1 должен быть равен нулевому вектору. Однако в силу случайного характера корреляционной матрицы (2), в процессе ортогонализации по схеме (3) будут формироваться ненулевые вектор \mathbf{F}_1 и последующие векторы. Если, кроме собственного шума, имеется один внешний источник шума, то весовой вектор (6) должен содержать два базисных вектора \mathbf{F}_0 и \mathbf{F}_1 . Формирование последующих базисных векторов ведёт к уменьшению эффективности обработки, особенно при короткой выборке входного процесса ($L < N$).

Сравним ОСШ при адаптивной обработке, в которой используется максимально правдоподобная оценка (2) корреляционной матрицы входного процесса, с ОСШ при оптимальной обработке, в которой используется точная матрица \mathbf{M} и в выражении (6) сформировано максимальное необходимое число вспомогательных базисных векторов, равное числу источников J . При моделировании выборки векторы комплексных амплитуд входного процесса будем задавать в виде $\mathbf{X}(l) = \boldsymbol{\xi}(l) + \sum_{j=1}^J a_j(l) \mathbf{S}_j$, $l = 1, \dots, L$, где $\boldsymbol{\xi}(l)$ — вектор собственного шума, каждый элемент которого имеет нулевое среднее и единичную мощность (дисперсию), $a_j(l)$ — гауссов шум j -го источника с нулевым средним и некоторой мощностью, \mathbf{S}_j — вектор-фазор направления на j -й источник ($j = 1, 2, 3$). Будем формировать большое число (1000) сценариев помеховой обстановки, в каждом из которых источники шума имеют случайные угловые координаты, равномерно распределённые вне области главного луча антенной решётки. Затем найдём потери в ОСШ при адаптивной обработке по сравнению с оптимальной обработкой для каждого сценария и усредним полученные результаты по всем сценариям.

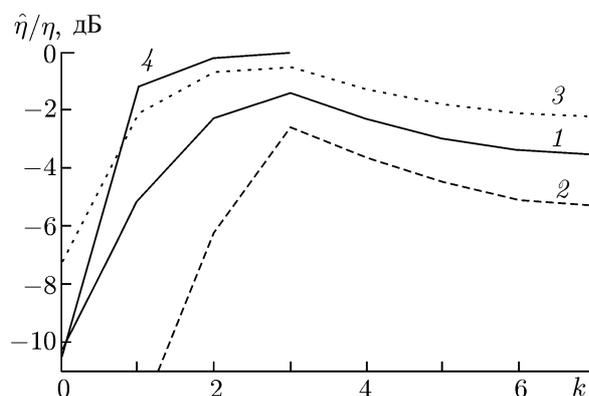


Рис. 2

На рис. 2 показаны кривые, характеризующие средние потери в ОСШ в зависимости от числа вспомогательных базисных векторов $k = 0, \dots, K - 1$ для 20-элементной адаптивной антенной решётки при числе выборок $L = 10$, что соответствует случаю короткой выборки входного процесса ($L < N$), и трёх источниках шума ($J = 3$) с мощностями, равными 100. Кривая 1 отражает средние потери, области ниже кривой 2 и выше кривой 3 соответствуют потерям, которые наблюдаются с вероятностями 10 %, а область между кривыми 2 и 3 — потерям, наблюдаемым с вероятностью 80 %. Кривая 4 соответствует оптимальной обработке, когда известна точная корреляционная матрица, а потери возникают из-за сокращения размерности степенного базиса. Видно, что при малых числах k ОСШ нарастает и потери уменьшаются. Когда число дополнительных базисных векторов становится равным числу источников помехи ($k = 3$), потери в ОСШ становятся минимальными. Однако при дальнейшем увеличении числа вспомогательных базисных векторов ($k > 3$) потери в ОСШ снова увеличиваются. Отметим, что результаты моделирования являются практически одинаковыми для обоих способов решения, использующих скалярные произведения (4) или (5).

Из приведённого примера следует, что размер базиса надо ограничивать тогда, когда ОСШ $\hat{\eta} = |\hat{\mathbf{W}}^H \mathbf{S}|^2 (\hat{\mathbf{W}}^H \hat{\mathbf{M}} \hat{\mathbf{W}})^{-1}$ достигает максимального значения. Как оценить величину ОСШ, если корреляционная матрица \mathbf{M} неизвестна? Для этого в данном выражении заменим матрицу \mathbf{M} на выборочную корреляционную матрицу (2). На рис. 3 кривая 1 показывает среднее ОСШ, области ниже кривой 2 и выше кривой 3 соответствуют ОСШ, которые наблюдаются с вероятностями 10 %, область между кривыми 2 и 3 — ОСШ, которые наблюдаются с вероятностью 80 %. Результаты получены при тех же параметрах $N = 20, L = 10$ и $J = 3$. Видно, что данная оценка не имеет максимума и ОСШ непрерывно нарастает.

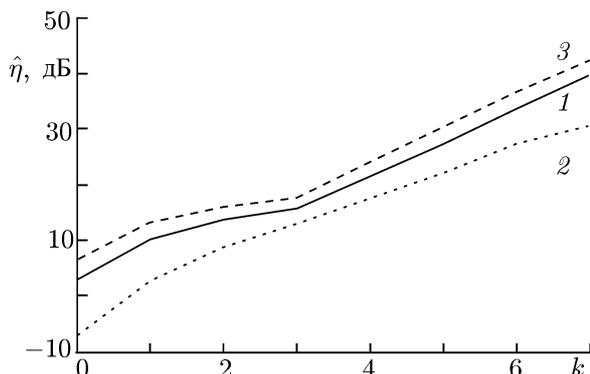


Рис. 3

Данный результат можно объяснить следующим образом. Оценку весового вектора, найденную по формуле (7) с помощью матрицы (2), обозначим как $\hat{\mathbf{W}}$. Тогда оценка ОСШ запишется в виде

$$\hat{\eta}_{\max} = \frac{|\hat{\mathbf{W}}^H \mathbf{S}|^2}{\hat{\mathbf{W}}^H \hat{\mathbf{M}} \hat{\mathbf{W}}} = \frac{|\mathbf{F}_0^H \mathbf{S} + \mathbf{C}^H \mathbf{F}^H \mathbf{S}|^2}{(\mathbf{F}_0 + \mathbf{F}\mathbf{C})^H \hat{\mathbf{M}} (\mathbf{F}_0 + \mathbf{F}\mathbf{C})}. \tag{13}$$

Применяя первый способ решения — со скалярным произведением (4), выражение (13) с учётом уравнения (8) можно преобразовать к виду

$$\hat{\eta}_{\max} = \frac{|\mathbf{F}_0^H \mathbf{S}|^2}{\mathbf{F}_0^H \hat{\mathbf{M}} \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_0^H \hat{\mathbf{M}} \mathbf{F}\mathbf{C}}. \tag{14}$$

Используя далее формулы (3) и (9), получим

$$\hat{\eta}_{\max} = \frac{|\mathbf{F}_0^H \mathbf{S}|^2}{\alpha_0 + \beta_0 c_1} = \frac{|\mathbf{F}_0^H \mathbf{S}|^2}{\alpha_0 - \frac{\beta_0^2}{\alpha_1 - \frac{\beta_1^2}{\alpha_2 - \frac{\beta_2^2}{\dots}}}}. \tag{15}$$

Отсюда видно, что с увеличением числа вспомогательных базисных векторов оценка ОСШ может только возрастать, поскольку знаменатель уменьшается, а числитель имеет фиксированное

значение. Очевидно, что такая оценка ОСШ не соответствует физическим условиям задачи. Дело в том, что при $L < N$ выборки помехи занимают только часть сигнального N -мерного пространства. В другой его части размерности $N - L$ (ядро выборочной корреляционной матрицы $\hat{\mathbf{M}}$) система не имеет никакой информации о помехе. В частности, отсутствует даже информация о собственном шуме. При увеличении числа базисных векторов адаптивная система стремится аннулировать все L выборок помехи.

Аналогичный результат получается, если применить второй способ решения — со скалярным произведением (5). В частности, вместо выражения (15) получается следующий результат:

$$\hat{\eta}_{\max} = |\mathbf{F}_0^H \mathbf{S}|^2 \left(1 + \sum_i |c_i|^2 \right). \quad (16)$$

Также видно, что оценка ОСШ увеличивается с ростом числа вспомогательных базисных векторов.

3. УСЛОВИЕ ОСТАНОВКИ ПРОЦЕДУРЫ ОРТОГОНАЛИЗАЦИИ

Для оценки ОСШ применим предложенную в работе [12] регуляризованную корреляционную матрицу $\mathbf{M}_r = \hat{\mathbf{M}} + \gamma \mathbf{I}$, где величина γ называется параметром регуляризации, \mathbf{I} — единичная матрица. В этом случае учитывается априорная информация о наличии в составе помехи собственного шума с мощностью γ . Теперь вместо выражения (15) получаем

$$(\eta_r)_{\max} = |\mathbf{F}_0^H \mathbf{S}|^2 / \left[\alpha_0 + \beta_0 c_1 + \gamma \left(1 + \sum_i |c_i|^2 \right) \right]. \quad (17)$$

Для примера на рис. 4 показано полученное с помощью формулы (17) среднее ОСШ в зависимости от числа базисных векторов при тех же значениях параметров $N = 20$, $L = 10$ и $J = 3$ при $\gamma = 1; 3; 5; 7$ и 10 (кривые 1–5 соответственно). Теперь оценка ОСШ имеет максимум. Если $\gamma = 3; 5; 7$ и 10 , максимум ОСШ наблюдается при использовании трёх вспомогательных базисных векторов (как и при оптимальной обработке), а если параметр регуляризации равен мощности собственного шума ($\gamma = 1$) — при использовании четырёх вспомогательных базисных векторов.

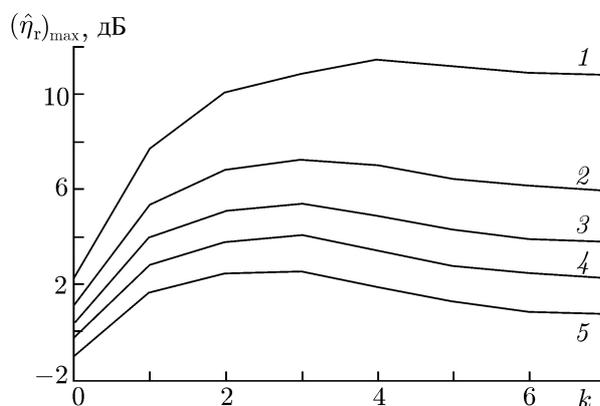


Рис. 4

Для второго способа решения — со скалярным произведением (5) вместо выражения (16) получаем оценку ОСШ в виде

$$(\eta_r)_{\max} = \frac{|\hat{\mathbf{W}}^H \mathbf{S}|^2}{\hat{\mathbf{W}}^H (\hat{\mathbf{M}} + \gamma \mathbf{I}) \hat{\mathbf{W}}} = \frac{|\hat{\mathbf{F}}_0^H \mathbf{S}|^2 |1 + \mathbf{C}^H \mathbf{C}|^2}{(1 + \mathbf{C}^H \mathbf{C}) + \gamma \hat{\mathbf{W}}^H \hat{\mathbf{W}}}. \quad (18)$$

Остановка процедуры ортогонализации является случайным событием. Поэтому представляет интерес распределение вероятностей числа вспомогательных базисных векторов. Решить эту задачу теоретически сложно, поэтому приведём результаты моделирования при тех же значениях параметров $N = 20$, $L = 10$ и $J = 3$. На рис. 5 представлены гистограммы распределения

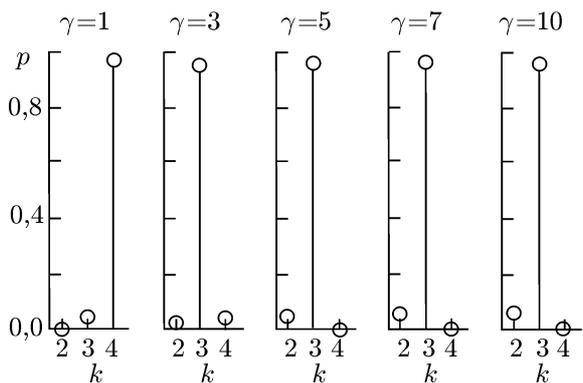


Рис. 5

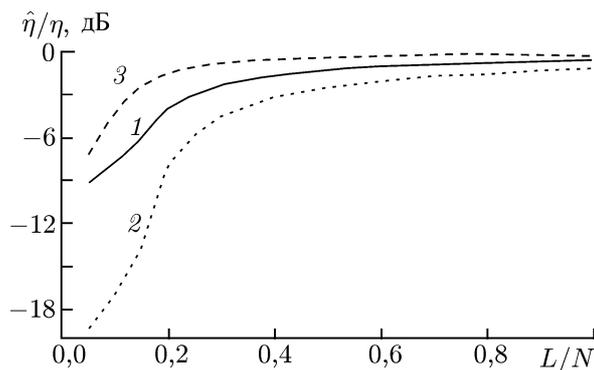


Рис. 6

вероятностей p числа дополнительных базисных векторов для различных параметров регуляризации $\gamma = 1; 3; 5; 7$ и 10 (слева направо). Если параметр регуляризации превышает мощность собственного шума в $3; 5; 7$ и 10 раз, то с вероятностью более 90% формируются три базисных вектора, что соответствует теоретическому значению. Отсюда следует, что выбор параметра регуляризации не является критичным, т. е. параметр γ может быть выбран в достаточно широких пределах. Аналогичное свойство параметра регуляризации отмечается при решении других подобных задач [11–13].

Эффективность адаптивного алгоритма обработки сигнала с применением предложенного условия остановки процедуры ортогонализации исследовалась путём моделирования для случая короткой выборки входного процесса (т. е. в области $L \leq N$). На рис. 6 кривая 1 показывает средние потери в ОСШ, область между кривыми 2 и 3 соответствует ОСШ, которые наблюдаются с вероятностью 80% . Задавались следующие параметры: $N = 20, J = 3$ и $\gamma = 5$. Отметим, что потери в ОСШ являются практически одинаковыми для двух типов скалярного произведения (формулы (4) и (5)). Видно, что эффективность предложенной обработки является высокой. Например, средние потери в ОСШ не превышают 3 дБ при длине выборки $L = 5$ ($L/N = 0,25$).

Вычислительная сложность обоих адаптивных алгоритмов, использующих скалярные произведения (4) или (5), оценивалась в работе [14], где показано, что общее число комплексных умножений будет составлять примерно $2NLK$ для первого и $3NLK$ для второго алгоритма при $N \gg 1, L \gg 1, K \gg 1$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1) Предложены два алгоритма адаптивной обработки сигнала в базисе степенных векторов. Оба алгоритма используют процесс ортогонализации степенных векторов и отличаются выбором скалярного произведения. Дана физическая интерпретация предложенных алгоритмов.

2) Чтобы обеспечить высокую эффективность обработки сигнала в адаптивной антенной решётке, необходимо статистически корректно ограничивать размер степенного базиса в процессе ортогонализации.

3) Корректное ограничение размера базиса можно обеспечить, если на каждом шаге процедуры ортогонализации делать оценку выходного ОСШ. При этом вместо точной корреляционной матрицы шума следует использовать регуляризованную корреляционную матрицу. Остановка процесса ортогонализации выполняется тогда, когда оценка ОСШ достигает максимального значения.

Работа поддержана Министерством образования и науки РФ в рамках ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014–2020 годы» (соглашение 14.578.21.0033 от 05.06.2014, уникальный идентификатор RFMEFI57814X0033).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монзинго Р. А., Миллер Т. У. Адаптивные антенные решётки. Введение в теорию. М.: Радио и связь, 1986. 448 с.
2. Уидроу Б., Стирнз С. Адаптивная обработка сигналов. М.: Радио и связь, 1989. 440 с.
3. Журавлёв А. К., Лукошкин А. П., Поддубный С. С. Обработка сигналов в адаптивных антенных решётках. Изд-во Ленинград. ун-та, 1983. 240 с.
4. Ширман Я. Д., Манжос В. Н. Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех. М.: Радио и связь, 1981. 416 с.
5. Пистолькорс А. А., Литвинов О. С. Введение в теорию адаптивных антенн. М.: Наука, 1991. 200 с.
6. Ермолаев В. Т., Флакман А. Г. // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25, № 4. С. 472.
7. Ермолаев В. Т., Краснов Б. А., Флакман А. Г. // Изв. вузов. Радиофизика. 1983. Т. 26, № 7. С. 874.
8. Ермолаев В. Т., Краснов Б. А., Соломатин В. Я., Флакман А. Г. // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29, № 5. С. 551.
9. Ermolayev V. T., Flaksman A. G. // Int. J. Electron. 1993. V. 75, No. 4. P. 753.
10. Воеводин В. В. Линейная алгебра. М.: Наука, 1980. 400 с.
11. Тихонов А. И., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
12. Абрамович Ю. И. // Радиотехника и электроника. 1981. Т. 26, № 3. С. 543.
13. Ermolayev V. T., Flaksman A. G., Rodygin Yu. L. // Int. J. Electron. 1994. V. 76, № 3. P. 497.
14. Ермолаев В. Т., Флакман А. Г., Сорокин И. С. // Изв. вузов. Радиофизика. 2012. Т. 55, № 9. С. 641.
15. Ермолаев В. Т., Сорокин И. С., Флакман А. Г. // Вестник ННГУ им. Н. И. Лобачевского. Сер. «Радиофизика». 2014. № 4. Ч. 1. С. 79.

Поступила в редакцию 23 сентября 2014 г.; принята в печать 24 февраля 2015 г.

ADAPTIVE ANTENNA-ARRAY WEIGHT-VECTOR REGULARISATION BY CONSTRAINING THE NUMBER OF THE BASIS VECTORS

V. T. Ermolayev, V. Yu. Semenov, I. S. Sorokin, A. G. Flaksman, and A. V. Yastrebov

An adaptive antenna array, which ensures maximum ratio of the signal power to the average noise power at its output, is considered. Two algorithms for the adaptive processing of the signal in the power-vector basis are proposed. The regularized estimates of the weight vector are obtained for each algorithm using the limited number of the input-process samples, which can be both greater and smaller (the short-sample case) than the array-element number. The results of simulating the signal adaptive processing, which demonstrate high efficiency of the signal processing in the considered array are shown.