

УДК 537.86

СОЛИТОНЫ В РАСШИРЕННОМ НЕЛИНЕЙНОМ УРАВНЕНИИ ШРЁДИНГЕРА С ПСЕВДОИНДУЦИРОВАННЫМ РАССЕЙЯНИЕМ И НЕОДНОРОДНОЙ КУБИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

*Н. В. Асеева**, *Е. М. Громов*, *В. В. Тютин*

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
г. Нижний Новгород, Россия

Рассмотрена динамика солитонов в рамках расширенного нелинейного уравнения Шрёдингера с псевдоиндуцированным рассеянием на затухающих низкочастотных волнах и пространственно неоднородной кубичной нелинейностью. Показана возможность баланса псевдоиндуцированного рассеяния, приводящего к смещению спектра волновых чисел солитона в длинноволновую область, и возрастающей по координате нелинейности, смещающей спектр солитона в коротковолновую область. В явном виде получено солитонное решение, возникающее в результате этого баланса.

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, интенсивные высокочастотные (ВЧ) волновые пакеты могут распространяться в нелинейных средах без изменения своей формы, т. е. являться солитонами. Солитонные решения возникают во многих актуальных задачах в различных областях физики при моделировании распространения интенсивных волн в диспергирующих средах [1–7].

Динамика высокочастотных волновых пакетов с достаточно большой протяжённостью описывается вторым приближением теории дисперсии нелинейных волн, основным уравнением которого является нелинейное уравнение Шрёдингера [8, 9]. Солитонные решения в этом уравнении возникают в результате баланса дисперсионного разбегания и нелинейного сжатия волновых пакетов.

Для решения многих прикладных задач существует необходимость уменьшения протяжённости солитонов до нескольких длин волн. Подобное уменьшение сопровождается, как правило, индуцированным рассеянием на низкочастотных (НЧ) возмущениях среды. До настоящего времени довольно подробно изучено индуцированное рассеяние на однородных по пространственной координате временных НЧ-модах среды (индуцированное рассеяние Рамана) [1]. Для солитонов учёт данного рассеяния приводит к смещению их частот вниз по спектру [8]. Возможность компенсации рамановского сдвига частоты изучена к настоящему времени довольно подробно [8–16].

Однако для ряда сред распространение коротких солитонов сопровождается возбуждением затухающих низкочастотных волн. Модель для описания индуцированного рассеяния высокочастотных волн на затухающих низкочастотных волнах, названного псевдоиндуцированным рассеянием, предложена в работе [17], где показано, что псевдоиндуцированное рассеяние сдвигает спектр волновых чисел солитона в длинноволновую область. До настоящего времени рассмотрен механизм компенсации псевдоиндуцированного рассеяния за счёт неоднородной в пространстве дисперсии [17–19].

В данной работе рассмотрена динамика солитонов в рамках расширенного нелинейного уравнения Шрёдингера с псевдоиндуцированным рассеянием и неоднородной в пространстве кубичной нелинейностью. Показано, что возрастающая по координате нелинейность смещает спектр

* naseeva@hse.ru

волновых чисел солитона в коротковолновую область и способна компенсировать псевдоиндуцированное рассеяние, сдвигающее спектр волновых чисел солитона в длинноволновую область. Найден класс солитонов, существование которых обусловлено балансом псевдоиндуцированного рассеяния и неоднородной кубичной нелинейности. Данная работа является продолжением исследования [19].

1. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Рассмотрим динамику огибающей функции $U(\xi, t)$ интенсивного высокочастотного поля $U(\xi, t) \exp(i\omega t - i\kappa\xi)$ в среде с учётом нелинейного взаимодействия с затухающими низкочастотными волновыми возмущениями $n(\xi, t)$, распространяющимися с пространственно неоднородной скоростью $V(\xi)$ и вызывающими потери высокочастотного излучения. В приближении однонаправленного распространения по координате ξ исходная система динамики волнового поля отвечает системе уравнений захаровского типа [20, 21]

$$2i \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - nU = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + V(\xi) \frac{\partial n}{\partial \xi} - \nu \frac{\partial^2 n}{\partial \xi^2} = - \frac{\partial(|U|^2)}{\partial \xi}, \quad (2)$$

где ν — коэффициент потерь высокочастотного излучения за счёт низкочастотных возмущений. В частности, данная система описывает динамику интенсивных электромагнитных или ленгмюровских волн в изотропной плазме с учётом их взаимодействия через стрикционную нелинейность с затухающими ионно-звуковыми волнами, распространяющимися с неоднородной по координате скоростью и обуславливающими потери высокочастотного излучения. Принимая пространственный масштаб неоднородности скорости низкочастотных волн $V(\xi)$ много бóльшим масштаба неоднородности огибающей функции высокочастотного волнового пакета, $D \gg D_{|U|}$, в третьем приближении теории дисперсии нелинейный отклик среды n включает в себя слагаемое с малой антисимметричной пространственной нелокальностью по координате ξ : $n = -|U|^2/V(\xi) - \nu [\partial(|U|^2)/\partial \xi]/V(0)$. Антисимметричное по координате ξ слагаемое обусловлено потерями высокочастотного излучения за счёт низкочастотных волн. В этом случае система (1), (2) сводится к расширенному нелинейному уравнению Шрёдингера с малым антисимметричным керровским (стрикционным) откликом среды:

$$2i \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2\alpha(\xi)U |U|^2 + \mu U \frac{\partial(|U|^2)}{\partial \xi} = 0, \quad (3)$$

где $\alpha(\xi) = 1/[2V(\xi)]$ — коэффициент кубичной нелинейности, пространственная неоднородность которого обусловлена пространственной неоднородностью скорости низкочастотных волн; коэффициент $\mu = \nu/V(0)$. Последнее слагаемое в уравнении (3) описывает индуцированное рассеяние высокочастотного поля на низкочастотных волнах, которое обуславливает потери ВЧ-волн и является пространственным аналогом индуцированного рассеяния Рамана в оптике (псевдоиндуцированное рассеяние).

Уравнение (3) при нулевых граничных условиях на бесконечности $U_{\xi \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0$ даёт следующие соотношения для интегральных моментов волнового поля:

$$\frac{dN}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} |U|^2 d\xi = 0, \quad (4)$$

$$2 \frac{dP}{dt} \equiv 2 \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} K |U|^2 d\xi = -\mu L + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha}{d\xi} |U|^4 d\xi, \quad (5)$$

$$\frac{dL}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial(|U|^2)}{\partial \xi} \right]^2 d\xi = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2(|U|^2)}{\partial \xi^2} \frac{\partial(K|U|^2)}{\partial \xi} d\xi, \quad (6)$$

$$\frac{dM}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} |U|^4 d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} K \frac{\partial(|U|^4)}{\partial \xi} d\xi, \quad (7)$$

$$N \frac{d\bar{\xi}}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi |U|^2 d\xi = P, \quad (8)$$

где комплексная амплитуда высокочастотного поля $U = |U| \exp(i\varphi)$, $K = \partial\varphi/\partial\xi$ — добавочное волновое число пакета.

2. АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

2.1. Эволюция интегральных моментов

Для анализа системы уравнений (4)–(8) примем пространственные масштабы неоднородности коэффициента кубичной нелинейности α и добавочного волнового числа K много длиннее масштаба неоднородности огибающей функции U волнового пакета, $\{D_\alpha, D_K\} \gg D_{|U|}$, и аппроксимируем пространственное распределение волнового числа в окрестности центра «масс» волнового пакета $\bar{\xi} = N^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi |U|^2 d\xi$ линейной зависимостью $K(\xi, t) \approx K(\bar{\xi}) + (\partial K/\partial \xi)_{\bar{\xi}} (\xi - \bar{\xi})$. В этом случае из мнимой части уравнения (3), при условии $(\partial|U|/\partial\xi)_{\bar{\xi}} = 0$, получим равенство $(\partial K/\partial \xi)_{\bar{\xi}} = -2(|U|^{-1} \partial|U|/\partial\xi)_{\bar{\xi}}$. Для волновых пакетов, амплитуда и протяжённость которых связаны солитонно-подобным соотношением, с учётом равенств (4) и (8) получим для пространственного распределения волнового числа формулу

$$K(\xi, t) = k(t) \left[1 - \frac{\alpha'(\bar{\xi})(\xi - \bar{\xi})}{\alpha(\bar{\xi})} \right], \quad (9)$$

где $k(t) = K(\bar{\xi})$ — волновое число в центре «масс» волнового пакета, $\alpha'(\bar{\xi}) \equiv (\partial\alpha/\partial\xi)_{\bar{\xi}}$ — градиент кубичной нелинейности в центре «масс» волнового пакета. С учётом равенства (9) система уравнений (4)–(8) примет вид

$$2N \frac{dk}{dt} = -\mu L + \alpha'(\bar{\xi})M, \quad \frac{dL}{dt} = 3 \frac{\alpha'(\bar{\xi})}{\alpha(\bar{\xi})} kL, \quad (10)$$

$$\frac{dM}{dt} = \frac{\alpha'(\bar{\xi})}{\alpha(\bar{\xi})} kM, \quad \frac{d\bar{\xi}}{dt} = k. \quad (11)$$

Состояние равновесия системы уравнений (10), (11) отвечает условиям

$$k = 0, \quad \mu L_0 = \alpha'(\bar{\xi}_0)M_0, \quad (12)$$

где M_0, L_0 — интегральные моменты начального волнового пакета. Из условий (12) следует, что компенсация псевдоиндуцированного рассеяния осуществляется возрастающей по координате

кубической нелинейностью ($\alpha'(\bar{\xi}_0) > 0$). В режиме равновесия волновой пакет распространяется с интегральными параметрами, отвечающими их начальным значениям N, L_0, M_0 , и с нулевым волновым числом.

Для дальнейшего анализа системы уравнений (10), (11) пространственную неоднородность кубической нелинейности моделируем функцией

$$\alpha(\xi) = \alpha_0 [1 + \text{th}(\xi/D)], \tag{13}$$

где D — характерный масштаб неоднородности кубической нелинейности, совпадающий с упомянутым выше масштабом неоднородности скорости низкочастотных волн $V(\xi)$ ¹. Система уравнений (10), (11) имеет первый интеграл

$$2(y^2 - y_0^2) + \lambda [8\rho + 8 \ln(\text{ch } \rho) - 6 \text{th } \rho - \text{th}^2 \rho] - 2 \text{th } \rho - \text{th}^2 \rho = 0, \tag{14}$$

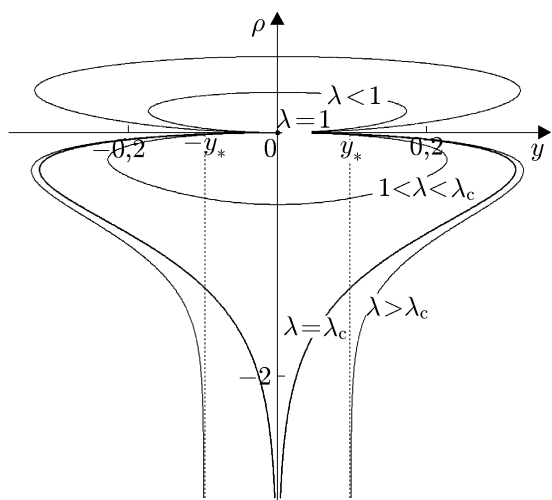


Рис. 1. Отвечающие первому интегралу (14) кривые при $y_0 = 0$ и различных λ

где функции $y = k \sqrt{N/(\alpha_0 M_0)}$, $\rho = \bar{\xi}/D$, коэффициенты $y_0 = y(0)$, $\lambda = \mu L_0 D / (\alpha_0 M_0)$. На рис. 1 приведены отвечающие первому интегралу (14) кривые при начальном условии $y_0 = 0$ и различных значениях λ .

При $\lambda = 1$ отвечающая первому интегралу (14) кривая вырождается в начальную точку $y = 0, \rho = 0$, что соответствует равновесию псевдоиндуцированного рассеяния и возрастающей кубической нелинейности. В этом случае интегральные моменты и волновое число пакета не меняются во времени. При $0 < \lambda < \lambda_c = 1/(8 \ln 2 - 5) \approx 1,83$ отвечающие первому интегралу (14) кривые локализованы, что соответствует динамическому равновесию псевдоиндуцированного рассеяния и возрастающей нелинейности: параметры волнового пакета меняются во времени периодически. При $\lambda > \lambda_c$ волновое число солитона со

временем стремится к величине $-y_* = -\sqrt{(\lambda - \lambda_c)/(2\lambda_c)}$.

2.2. Солитонное решение

Рассмотрим решение уравнения (3) в виде стационарной волны $U(\xi, t) = \psi(\xi) \exp(i\Omega t)$. Для профиля нелинейности в виде перепада (13) из уравнения (3) получим

$$\frac{d^2 \psi}{d\xi^2} + 2\alpha_0 [1 + \text{th}(\xi/D)] \psi^3 - 2\Omega \psi + 2\mu \psi^2 \frac{d\psi}{d\xi} = 0. \tag{15}$$

Примем пространственный масштаб D неоднородной нелинейности много длиннее масштаба неоднородности огибающей функции пакета волн, $D \gg D_\psi \equiv D_{|U|}$. С учётом оценки $\varepsilon \sim \xi/D \sim \sim D_\psi/D \sim \mu \ll \alpha_0$ и аппроксимации $\text{th}(\xi/D) \approx \xi/D$ решение уравнения (15) будем искать в виде $\psi = \psi_0 + \psi_1$, где слагаемое $\psi_1 \sim \varepsilon \psi_0 \ll \psi_0$. В нулевом и в первом приближениях по параметру ε получим

$$\frac{d^2 \psi_0}{d\xi^2} + 2\alpha_0 \psi_0^3 - 2\Omega \psi_0 = 0, \tag{16}$$

¹ Возможность изготовления оптических волокон с неоднородной по продольной координате кубической нелинейностью была продемонстрирована экспериментально в работе [22].

$$\frac{d^2\psi_1}{d\xi^2} + (6\alpha_0\psi_0^2 - 2\Omega)\psi_1 = \frac{2}{D}\psi_0^3\xi - 2\mu\psi_0^2\frac{d\psi_0}{d\xi}. \quad (17)$$

Уравнение (16) имеет решение в виде классического солитона $\psi_0 = A_0/\text{ch}(\xi/\Delta)$, где $\Omega = \alpha_0 A_0^2/2$, $\Delta = 1/(A_0\sqrt{\alpha_0})$. С учётом равенства (16) уравнение (17) после замены координаты $\eta = \xi/\Delta$ и функции $\Psi = \psi_1 D/(2A_0)$ примет вид

$$\frac{d^2\Psi}{d\eta^2} + \left(\frac{6}{\text{ch}^2\eta} - 1\right)\Psi = -\frac{\eta}{\text{ch}^3\eta} + \frac{5}{4}\frac{\mu}{\mu_*}\frac{\text{sh}\eta}{\text{ch}^4\eta}, \quad (18)$$

где $\mu_* = 5\alpha_0/(4DA_0^2)$ — равновесное значение параметра псевдоиндуцированного рассеяния. При «начальном» условии $\Psi(0) = 0$ уравнение (18) имеет точное решение

$$\Psi(\eta) = \frac{1}{4\text{ch}\eta} \left[4\Psi'(0)\text{th}\eta + \text{th}\eta - \eta + \frac{\mu}{\mu_*}(\text{th}\eta)\ln(\text{ch}\eta) \right] + \frac{1}{12} \left(\frac{\mu}{\mu_*} - 1 \right) (\text{th}^2\eta)\text{sh}\eta, \quad (19)$$

подобное решениям, полученным в работах [19, 23]. При $\mu = \mu_*$ решение (19) удовлетворяет нулевым граничным условиям на бесконечности $\Psi(\eta \rightarrow \pm\infty) \rightarrow 0$. Данное решение существует в результате баланса псевдоиндуцированного рассеяния и возрастающей нелинейности.

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим численное решение начальной задачи динамики волнового пакета $U(\xi, t = 0) = 1/\text{ch}\xi$ в рамках уравнения (3) при аппроксимации пространственной неоднородности кубичной

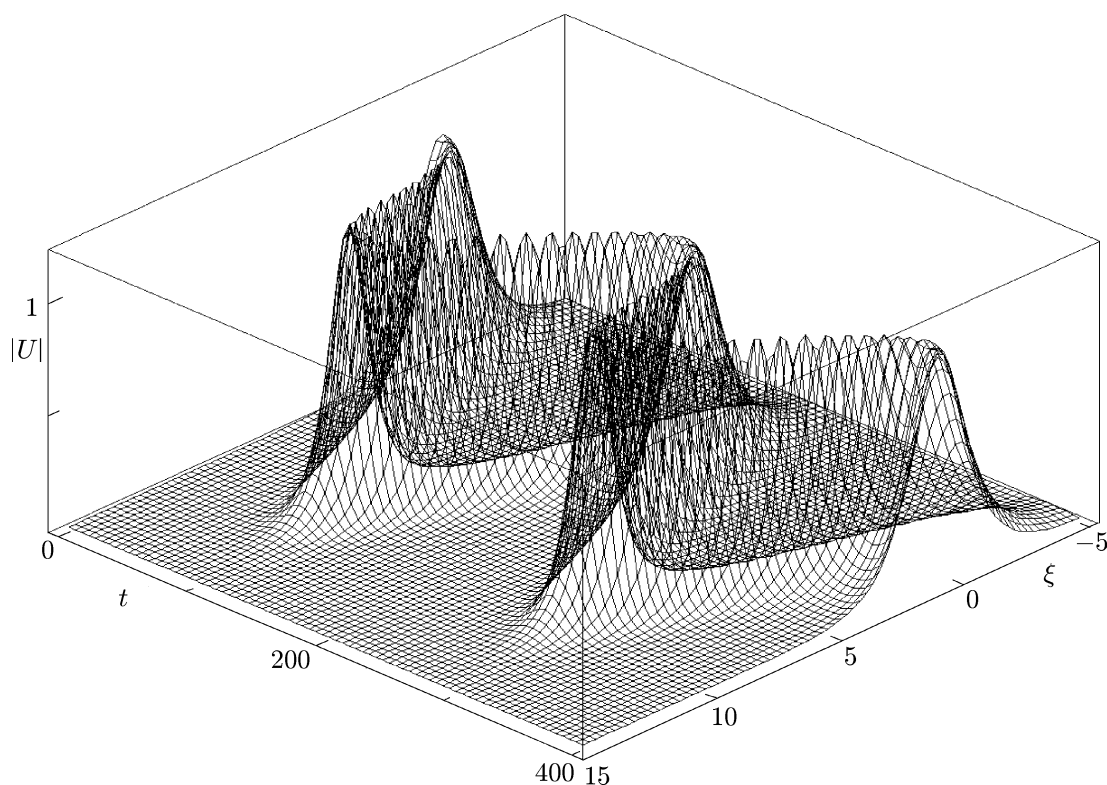


Рис. 2. Численное моделирование пространственно-временного распределения модуля огибающей функции волнового пакета при $\mu = 3/64 = 3\mu_*/4$

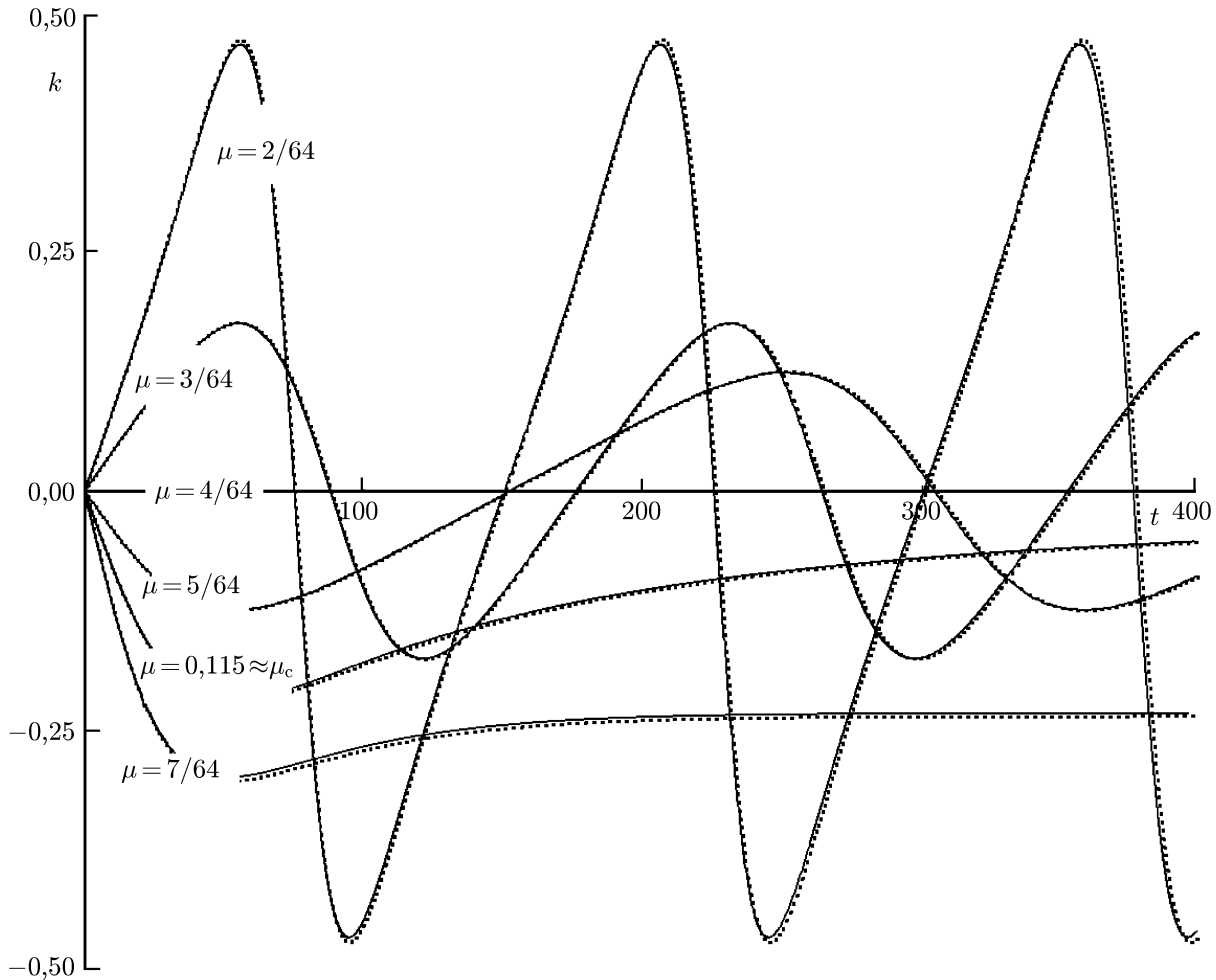


Рис. 3. Результаты численного расчёта (сплошные кривые) и аналитические результаты (пунктирные кривые) для локального волнового числа k в точке максимума модуля огибающей функции волнового пакета при различных параметрах μ

нелинейности в виде $\alpha(\xi) = 1 + \text{th}(\xi/10)$ и различных параметрах μ . Состояние баланса псевдоиндуцированного рассеяния и возрастающей в пространстве кубичной нелинейности достигается в этом случае при $\mu_* = 1/16$. При $\mu = 1/16$ начальный импульс численно стремится к локализованному в пространстве распределению с нулевым волновым числом, близкому к полученному выше аналитическому решению (19) при $\alpha_0 = A_0 = 1$ и $\mu = \mu_*$. При отклонении параметра μ псевдоиндуцированного рассеяния от равновесного значения μ_* численное моделирование обнаруживает нестационарные солитоны с переменными во времени t амплитудой $|U|$ и волновым числом k , например при $\mu = 3/64 = 3\mu_*/4$ (см. рис. 2, 3).

На рис. 3 результаты численного расчёта волнового числа в точке максимума модуля огибающей функции волнового пакета сопоставлены с аналитическими результатами, полученными из системы уравнений (10), (11) при различных параметрах μ в зависимости от времени t . Близкое совпадение аналитических и численных результатов достигается как при $\mu = \mu_*$ (когда волновое число равно нулю), так и при $\mu \neq \mu_*$ для нестационарных волновых пакетов.

При $\mu < \mu_c = \mu_*/(8 \ln 2 - 5) \approx 1,8\mu_*$ имеет место динамическое равновесие псевдоиндуцированного рассеяния и возрастающей кубичной нелинейности, при котором параметры солитона меняются во времени периодически. При $\mu \geq \mu_c$ волновое число k при больших временах стре-

мится к величине $-\sqrt{(\mu - \mu_c)/(3\mu_c)}$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассмотрена динамика солитонов в рамках расширенного нелинейного уравнения Шрёдингера с учётом псевдоиндуцированного рассеяния и неоднородной кубичной нелинейности. Рассмотрение проведено как численно, так и аналитически. Аналитическое солитонное решение расширенного нелинейного уравнения Шрёдингера найдено в явном виде. Оно возникает в результате баланса псевдоиндуцированного рассеяния и возрастающей в пространстве нелинейности.

Представленная модель не учитывает нелинейную дисперсию и линейную дисперсию третьего порядка. Возможность компенсации псевдоиндуцированного рассеяния за счёт неоднородности в пространстве дисперсионных характеристик среды с учётом указанных эффектов высших порядков будет рассмотрена в следующих работах.

Данное научное исследование выполнено при поддержке Программы «Научный фонд НИУ ВШЭ» в 2014/2015 годах (грант 14-01-0023).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Infeld E., Rowlands G. Nonlinear waves, solitons, and chaos. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
2. Agrawal G. P. Nonlinear fiber optics. San Diego: Academic Press, 2001.
3. Yang Y. Solitons in field theory and nonlinear analysis. New York: Springer, 2001.
4. Kivshar Y. S., Agrawal G. P. Optical solitons: from fibers to photonic crystals. San Diego: Academic Press, 2003.
5. Dickey L. A. Soliton equation and Hamiltonian systems. New York: World Scientific, 2005.
6. Malomed B. A. Soliton management in periodic systems. New York: Springer, 2006.
7. Dauxois T., Peyrard M. Physics of solitons. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.
8. Gordon J. P. // Opt. Lett. 1986. V. 11. P. 662.
9. Mitschke F. M., Mollenauer L. F. // Opt. Lett. 1986. V. 11. P. 659.
10. Kodama Y. J. // Stat. Phys. 1985. V. 39. P. 597.
11. Malomed B. A., Tasgal R. S. // J. Opt. Soc. Amer. B. 1998. V. 15. P. 162.
12. Biancalama F., Skrybin D. V., Yulin A. V. // Phys. Rev. E. 2004. V. 70. Art. no. 011615.
13. Essiambre R.-J., Agrawal G. P. // J. Opt. Soc. Amer. B. 1997. V. 14. P. 314.
14. Essiambre R.-J., Agrawal G. P. // J. Opt. Soc. Amer. B. 1997. V. 14. P. 323.
15. Andrianov A., Muraviev S., Kim A., Sysoliatin A. // Laser Phys. 2007. V. 17. P. 1 296.
16. Chernikov S., Dianov E., Richardson D., Payne D. // Opt. Lett. 1993. V. 18. P. 476.
17. Gromov E. M., Malomed B. A. // J. Plasma Phys. 2013. V. 79. P. 1057.
18. Gromov E. M., Malomed B. A. // Opt. Commun. 2014. V. 320. P. 88.
19. Асеева Н. В., Громов Е. М., Тютин В. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 2013. Т. 56, № 3. С. 157.
20. Захаров В. Е., Кузнецов В. Е. // Успехи физ. наук. 1997. Т. 167, № 11. С. 1 137.
21. Захаров В. Е. // Изв. вузов. Радиофизика. 1974. Т. 17, № 4. С. 431.
22. Bogatyrev V. A., Bubnov M. M., et al. // J. Lightwave Technol. 1991. V. 9. P. 561.
23. Blit R., Malomed B. A. // Phys. Rev. A. 2012. V. 86. Art. no. 043841.

Поступила в редакцию 16 мая 2014 г.; принята в печать 27 марта 2015 г.

**SOLITONS IN AN EXTENDED NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION
WITH PSEUDO-STIMULATED SCATTERING AND INHOMOGENEOUS
CUBIC NONLINEARITY**

N. V. Aseeva , E. M. Gromov, and V. V. Tyutin

We consider the soliton dynamics within the framework of an extended nonlinear Schrödinger equation with pseudo-stimulated scattering from the damping low-frequency waves and the spatially-inhomogeneous cubic nonlinearity. The possibility of the balance of the pseudo-stimulated scattering, which leads to displacement of the spectrum of the soliton wave numbers to the longwave region and the nonlinearity, which increases by the coordinate and displaces the soliton spectrum to the shortwave region, is demonstrated. The soliton solution, which results from the above balance, is explicitly obtained.