

УДК 534.222

САМОПОДОБНЫЕ АКУСТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В ОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ С РАЗНОМОДУЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ И РЕЛАКСАЦИЕЙ

*В. Е. Назаров**, *А. В. Радостин*, *С. Б. Кияшко*

Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород, Россия

Приведены результаты теоретических исследований распространения плоских продольных акустических волн в однородных средах с разномодульной упругой нелинейностью и релаксацией. Получены точные аналитические решения для профилей стационарных волн и самоподобных импульсных и периодических волн, распространяющихся в таких средах без изменения формы.

ВВЕДЕНИЕ

Закономерности нелинейного распространения акустических волн в различных средах определяются нелинейными, диссипативными и дисперсионными свойствами этих сред. Как известно, однородные среды обладают слабой упругой квадратичной нелинейностью, при этом в низкочастотном диапазоне они характеризуются вязкой диссипацией и практически полным отсутствием дисперсии скорости звука [1, 2]. В высокочастотном диапазоне во многих средах, как правило, проявляется релаксация, связанная с восстановлением термодинамического равновесия среды, которое нарушается под действием акустической волны [1, 2]. Уравнение состояния среды с релаксацией описывает немгновенную (инерционную) зависимость напряжения σ от деформации ϵ , т. е. напряжение σ в момент времени t определяется деформацией ϵ во все предшествующие времена. В результате акустическая релаксация приводит к поглощению «невязкого» типа и к небольшой дисперсии скорости звука. Акустические волны в однородных средах с упругой квадратичной нелинейностью и релаксацией подробно описаны в монографии [1], распространение нелинейных акустических волн в таких средах численно исследовано в работе [3].

В последнее время всё большее внимание уделяется средам с сильной акустической нелинейностью, намного превышающей нелинейность однородных твёрдых тел [4]. Среда с сильной нелинейностью часто описывается неаналитическими уравнениями состояния. Закономерности нелинейных волновых процессов в средах с неаналитической и квадратичной (аналитической) нелинейностью качественно отличаются друг от друга, поэтому изучение и выявление этих закономерностей может быть использовано для установления вида нелинейности уравнения состояния среды и определения его параметров.

«Неаналитичность» некоторых твёрдых тел проявляется в так называемой разномодульности. Разномодульными (или бимодульными) упругими свойствами, т. е. различными модулями E_1 и E_2 упругости при растяжении и сжатии соответственно, обладает довольно широкий класс твёрдых тел: некоторые полимеры, композиционные и конструкционные материалы [5], грунты [6, 7], а также твёрдые тела, содержащие трещины [8–11]. Распространение нелинейных акустических волн в разномодульных материалах исследовалось во многих работах [5–17], однако влияние релаксационных свойств на эволюцию нелинейных волн в таких средах не рассматривалось.

* nazarov@hydro.appl.sci-nnov.ru

Отметим, что в разномодульной среде нелинейный режим распространения имеет место только для разнополярных волн, однополярные возмущения распространяются линейно, с постоянными, но различными скоростями (зависящими от их полярности). Нелинейное искажение гармонической (разнополярной) волны в идеальной разномодульной среде происходит таким образом, что на каждом её периоде уже на сколько угодно малом расстоянии от излучателя в профиле волны образуется неоднозначность или «перехлёт»: положительный полупериод волны «наезжает» на отрицательный (или наоборот) [9]. Как и в среде с квадратичной нелинейностью [1, 2], такая неоднозначность устраняется введением в профиль волны разрыва (ударного фронта) [9]. Как и в квадратичной среде [1], релаксация в разномодульной среде может предотвратить образование неоднозначностей и разрывов в профиле волны, однако формы волн в этих средах будут различными.

В данной работе теоретически исследуется распространение плоских продольных акустических волн в однородных средах с разномодульной нелинейностью и релаксацией. Интерес к такой задаче и её специфика связаны с линейной зависимостью разномодульной нелинейности от амплитуды деформации, что позволяет получить точные решения нелинейного волнового уравнения для таких сред.

1. УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ, РЕОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ЭВОЛЮЦИОННОЕ ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ОДНОРОДНОЙ РАЗНОМОДУЛЬНОЙ СРЕДЫ С РЕЛАКСАЦИЕЙ

Уравнение состояния однородной разномодульной среды с релаксацией можно получить по аналогии с уравнением состояния среды с квадратичной упругой нелинейностью и такой же релаксацией [1], заменив в последнем нелинейное слагаемое, пропорциональное ε^2 , на $\gamma |\varepsilon|$ [9, 11]:

$$\sigma(\varepsilon) = E(\varepsilon - \gamma |\varepsilon|) + mC_0^2 \rho \int_{-\infty}^t \frac{d\varepsilon(t')}{dt'} \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_0}\right) dt', \quad (1)$$

где $E = (E_1 + E_2)/2$, $\gamma = (E_2 - E_1)/(E_1 + E_2)$ — параметр разномодульной нелинейности, $|\gamma| \ll 1$, ρ — плотность среды, $C_0 = (E/\rho)^{1/2}$ — фазовая скорость низкочастотной волны, m — безразмерный параметр, определяющий силу релаксации (т. е. диссипацию и дисперсию среды), $0 < m \ll 1$, τ_0 — время релаксации, $|\varepsilon| \ll 1$. Если время релаксации τ_0 много меньше периода волны $T = 2\pi/\omega$ (ω — частота волны), то её распространение происходит также, как в вязкой среде с низкочастотной скоростью $C_0 = C(\omega \rightarrow 0)$. Если $\omega\tau_0 \gg 1$, то релаксационные процессы в среде «заморожены», и волна будет распространяться со скоростью $C_\infty = C(\omega \rightarrow \infty) = C_0(1 + m/2) > C_0$, так что $m = 2(C_\infty - C_0)/C_0 > 0$ [1].

В уравнении состояния (1) разномодульность проявляется уже при сколько угодно малых положительных и отрицательных напряжениях и деформациях. Заметим, однако, что для реальных материалов вблизи очень малых деформаций ε_{th} зависимость $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ может быть гладкой (без излома). Это соответствует аналитической нелинейности, например, квадратичной или кубической; нелинейные волны в таких средах изучены в работах [1, 18]. Таким образом, в разномодульной модели среды [5–17] предполагается, что для амплитуды ε_0 деформации в акустической волне выполняется условие $\varepsilon_0 \gg |\varepsilon_{th}|$, где $|\varepsilon_{th}| \ll 1$. Здесь мы также полагаем, что выполнено условие $|\varepsilon| \ll |\gamma|$, при этом уравнения теории упругости в лагранжевой и эйлеровой формах совпадают [9].

Уравнению состояния (1) отвечает реологическая модель однородной разномодульной среды с релаксацией [10] (см. рис. 1). Модель представляет собой однородную цепочку из одинаковых точечных масс и одинаковых звеньев, каждое из которых является параллельным соединением

стандартного линейного вязко-упругого тела и нелинейного (в данном случае — разномодульного) элемента.

Подставляя соотношение (1) в уравнение движения $\rho \partial^2 U / \partial t^2 = \partial \sigma(\varepsilon) / \partial x$ [1, 2, 4], получим волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} - C_0^2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} = -\gamma C_0^2 \frac{\partial^2 |\varepsilon|}{\partial x^2} + m C_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-\infty}^t \frac{\partial \varepsilon}{\partial t'} \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_0}\right) dt', \tag{2}$$

где U — смещение, $\varepsilon = \partial U / \partial x$.

Переходя в (2) к переменным $\tau = t - x/C_0$, $x = x_1$ [1], получим эволюционное уравнение для волн, бегущих в положительном направлении оси x :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = -\frac{\gamma}{2C_0^2} \frac{\partial |\varepsilon|}{\partial \tau} + \frac{m}{2C_0} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-\infty}^{\tau} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t'} \exp\left(-\frac{\tau-t'}{\tau_0}\right) d\tau'. \tag{3}$$

Вводя безразмерные переменные $\epsilon = \varepsilon/\varepsilon_0$, $\theta = \Omega\tau$ и $z = x\gamma\Omega/(2C_0)$, получим

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial z} = -\frac{\partial |\epsilon|}{\partial \theta} + h \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{-\infty}^{\theta} \frac{\partial \epsilon(\theta')}{\partial \theta'} \exp[-(\theta - \theta')] d\theta', \tag{4}$$

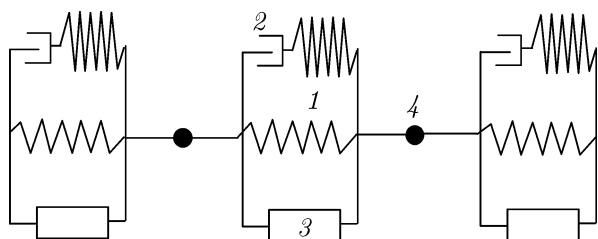


Рис. 1. Реологическая модель однородной нелинейной среды с релаксацией: 1 — линейные пружины, 2 — демпфер, 3 — нелинейный элемент, 4 — точечная масса

где $\Omega = \tau_0^{-1}$ — частота релаксации, ε_0 — амплитуда волны, $h = m/\gamma$ — отношение силы релаксации к параметру разномодульной нелинейности. Далее, для определённости мы будем полагать, что $\gamma \geq 0$, $h \geq 0$.

При решении волнового интегро-дифференциального уравнения (4) удобно перейти к эквивалентному дифференциальному уравнению. Для этого продифференцируем уравнение (4) по θ и полученный результат сложим с (4) [1]:

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial z} + \frac{\partial |\epsilon|}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial z} + \frac{\partial |\epsilon|}{\partial \theta} \right) = h \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \theta^2}. \tag{5}$$

2. СТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ

Исследуем стационарное решение уравнения (5). Приравнивая к нулю производные по z и интегрируя уравнение (5) с условиями $\epsilon(-\infty) = 1$, $\epsilon(\infty) = -1$, $d\epsilon/d\theta|_{\theta=\infty} = d\epsilon/d\theta|_{\theta=-\infty} = 0$, получим

$$h \frac{d\epsilon}{d\theta} - \frac{d|\epsilon|}{d\theta} + (1 - |\epsilon|) = 0. \tag{6}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\epsilon(\theta) = \begin{cases} 1 - \exp\left(\frac{\theta - \theta_0}{h - 1}\right), & \theta - \theta_0 \leq 0; \\ \exp\left(-\frac{\theta - \theta_0}{h + 1}\right) - 1, & \theta - \theta_0 \geq 0, \end{cases} \tag{7}$$

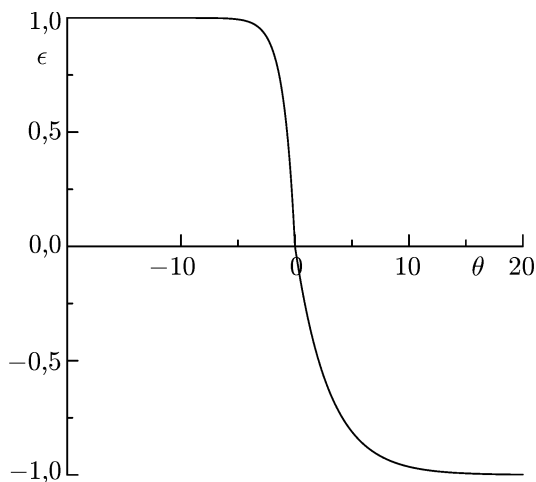


Рис. 2. Форма стационарной волны при $h = 2$

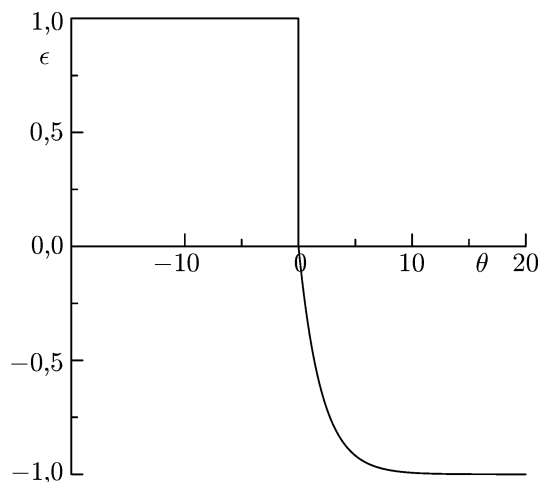


Рис. 3. Форма стационарной волны при $h = 1$

где $\theta_0 = \text{const}$.

В случае $h > 1$ решение (7) однозначно и непрерывно, но несимметрично и имеет скачок производной при $\epsilon(\theta) = 0$ (см. рис. 2):

$$\left. \frac{d\epsilon(\theta)}{d\theta} \right|_{\epsilon \rightarrow +0} = -\frac{1}{h-1}, \quad \left. \frac{d\epsilon(\theta)}{d\theta} \right|_{\epsilon \rightarrow -0} = -\frac{1}{h+1}. \tag{8}$$

При $h = 1$ на положительной ветви решения (7) возникает разрыв, но оно остаётся однозначным (см. рис. 3):

$$\epsilon(\theta) = \begin{cases} 1, & \theta - \theta_0 \leq 0; \\ \exp\left(-\frac{\theta - \theta_0}{2}\right) - 1, & \theta - \theta_0 \geq 0. \end{cases}$$

При $h \geq 1$, как и в среде с квадратичной упругой нелинейностью [1], форма стационарной волны (7) обеспечивается балансом эффектов нелинейности и релаксации: разномодульная нелинейность увеличивает крутизну фронта, а релаксационные диссипация и дисперсия стремятся её уменьшить. При $h < 1$ (см. рис. 4) этот баланс нарушается и решение (7) становится «абсурдным» и неоднозначным: его положительная ветвь (штриховая линия) направлена в другую (положительную по θ) сторону и не удовлетворяет условиям при $\theta = -\infty$ (как и в среде с квадратичной нелинейностью и релаксацией [1]). Для устранения этого «абсурда» и неоднозначности в профиль волны необходимо ввести разрыв, используя правило равенства площадей, и «изменить направление» положительной ветви в до-разрывной области [1].

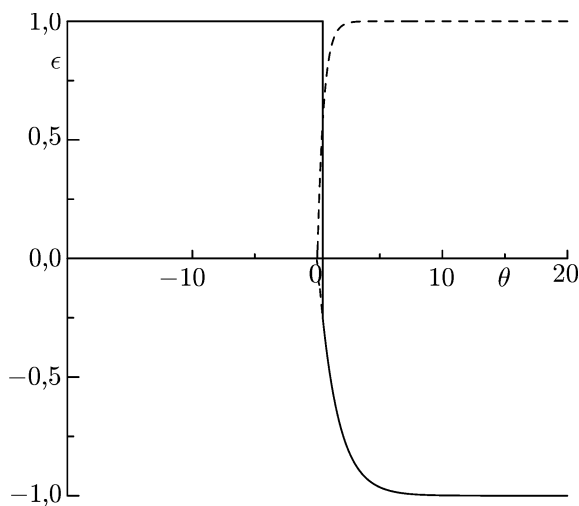


Рис. 4. Форма стационарной волны при $h = 0,5$

3. САМОПОДОБНЫЕ ВОЛНЫ

При $h \geq 1$ уравнение (5) имеет точные самоподобные решения в виде одиночных разнополярных возмущений (импульсов) и периодических волн. Поиск таких решений проведём методом разделения переменных, полагая

$$\epsilon(z, \theta) = Z(z)\Psi(\theta), \tag{9}$$

где $Z(z) > 0, Z(z = 0) = 1$.

Самоподобное решение (9) описывает, вообще говоря, затухающую волну, не меняющую своей формы $\Psi = \Psi(\theta)$ при распространении. Примерами «самоподобных» волн в нелинейных средах являются стационарные волны и солитоны, в линейных средах — гармонические волны. В разномодульной среде «самоподобные» волны (9) распространяются с постоянной и не зависящей от их амплитуды скоростью.

Подставляя представление (9) в уравнение (5), получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения для функций $Z(z)$ и $\Psi(\theta)$:

$$\frac{Z'_z}{Z} = \frac{h\Psi''_{\theta\theta} - |\Psi|'_\theta - |\Psi|''_{\theta\theta}}{\Psi + \Psi'_\theta} = -k \leq 0. \tag{10}$$

Здесь и далее $Z'_z = dZ/dz, \Psi'_\theta = d\Psi/d\theta, \Psi''_{\theta\theta} = d^2\Psi/d\theta^2, |\Psi|'_\theta = d|\Psi|/d\theta, |\Psi|''_{\theta\theta} = d^2|\Psi|/d\theta^2$. При таком выборе знака коэффициента $k (k \geq 0)$ решение пространственного уравнения $Z(z) = \exp(-kz)$ не нарастает по координате $z > 0$. Значение коэффициента k задаётся граничным условием, определяющим форму излучаемой «самоподобной» волны: $\epsilon(z = 0, \theta) = \Psi(\theta)$. Очевидно, что при $k = 0$ получим уже рассмотренное стационарное незатухающее решение (7).

Уравнение для временной части $\Psi(\theta)$ волны имеет вид

$$h\Psi''_{\theta\theta} - |\Psi|''_{\theta\theta} + k\Psi'_\theta - |\Psi|'_\theta + k\Psi = 0. \tag{11}$$

Фактически, нелинейное уравнение (11) представляет собой два линейных уравнения, одно — для положительной $\Psi_1(\theta \leq 0) \geq 0$ части функции $\Psi(\theta)$ и другое — для отрицательной $\Psi_2(\theta \geq 0) \leq 0$:

$$(h - 1)\Psi''_{1\theta\theta} + (k - 1)\Psi'_{1\theta} + k\Psi_1 = 0, \tag{12}$$

$$(h + 1)\Psi''_{2\theta\theta} + (k + 1)\Psi'_{2\theta} + k\Psi_2 = 0. \tag{13}$$

Из уравнения (11) следует, что в «нулевых» точках θ_0 , в которых $\Psi_1(\theta_0) = \Psi_2(\theta_0) = 0$, для производных $\Psi'_{1\theta}(\theta_0), \Psi'_{2\theta}(\theta_0)$ выполняется соотношение

$$\frac{\Psi'_{1\theta}(\theta_0)}{\Psi'_{2\theta}(\theta_0)} = \frac{h + 1}{h - 1}. \tag{14}$$

При поиске решений уравнения (11) мы будем полагать, что функции, описывающие положительную $\Psi_1(\theta \leq 0) \geq 0$ и отрицательную $\Psi_2(\theta \geq 0) \leq 0$ части волны, удовлетворяют условию непрерывности в нулевых точках θ_0 и условию (14).

При условии $(k \pm 1)^2 - 4kh \geq 0$ корни λ_1^+, λ_2^+ и λ_1^-, λ_2^- соответствующих уравнениям (12), (13) характеристических уравнений определяются выражениями

$$\lambda_1^+ = \frac{-(k - 1) + \sqrt{(k + 1)^2 - 4kh}}{2(h - 1)} \geq 0, \quad \lambda_2^+ = \frac{-(k - 1) - \sqrt{(k + 1)^2 - 4kh}}{2(h - 1)} \geq 0; \tag{15}$$

$$\lambda_1^- = \frac{-(k + 1) + \sqrt{(k - 1)^2 - 4kh}}{2(h + 1)} \leq 0, \quad \lambda_2^- = \frac{-(k + 1) - \sqrt{(k - 1)^2 - 4kh}}{2(h + 1)} \leq 0. \tag{16}$$

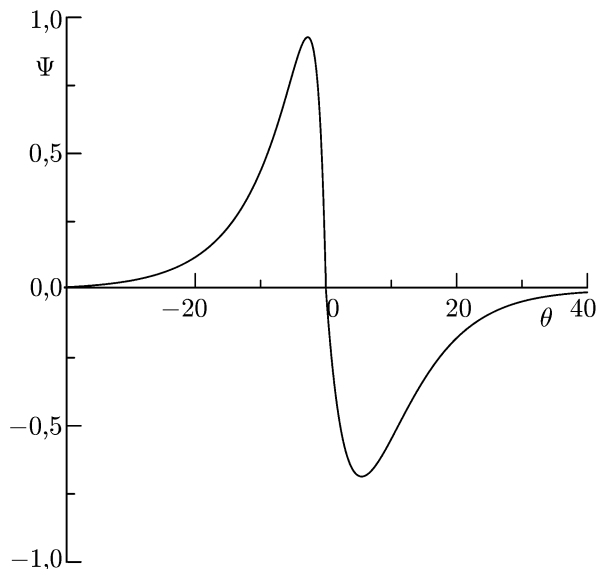


Рис. 5. Форма самоподобного импульса при $h = 2$, $k = 0,1$

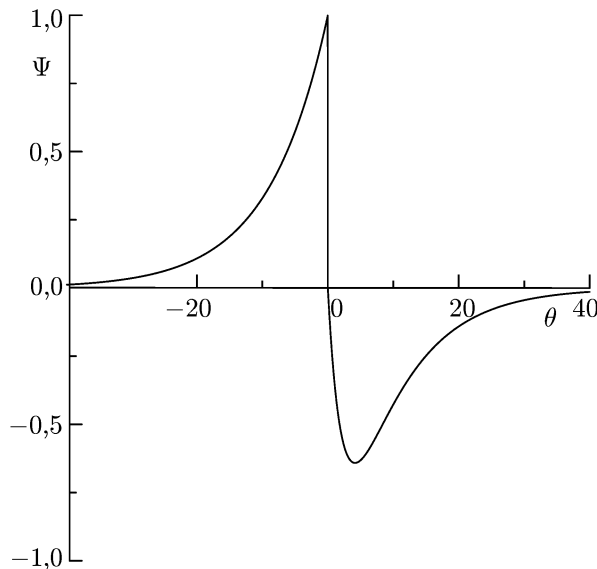


Рис. 6. Форма самоподобного импульса при $h = 1$, $k = 0,1$

В этом случае положительная и отрицательная части самоподобного импульсного возмущения определяются выражениями (см. рис. 5)

$$\Psi_1(\theta \leq 0) = -C_1 \exp\left[-\frac{k-1}{2(h-1)}\theta\right] \operatorname{sh}\left[\frac{\sqrt{(k+1)^2 - 4kh}}{2(h-1)}\theta\right] \geq 0, \tag{17}$$

$$\Psi_2(\theta \geq 0) = C_2 \exp\left[-\frac{k+1}{2(h+1)}\theta\right] \operatorname{sh}\left[\frac{\sqrt{(k-1)^2 - 4kh}}{2(h+1)}\theta\right] \leq 0, \tag{18}$$

где $C_1 = \text{const}$, $C_2 = -C_1 \sqrt{[(k+1)^2 - 4kh]/[(k-1)^2 - 4kh]} < 0$.

При $h = 1$ самоподобное возмущение, также как и стационарная волна, содержит разрыв (см. рис. 6):

$$\begin{aligned} \Psi_1(\theta \leq 0) &= -C_1 \exp\left(\frac{k}{k-1}\theta\right) > 0, \\ \Psi_2(\theta \geq 0) &= C_2 \exp\left(-\frac{k+1}{4}\theta\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{(k-1)^2 - 4k}}{4}\theta\right) \leq 0, \end{aligned} \tag{19}$$

где $C_2 = -C_1(k-1)/\sqrt{(k-1)^2 - 4k} < 0$.

При $(k \pm 1)^2 - 4kh < 0$ уравнение (5) имеет самоподобное периодическое решение. Здесь мы также будем полагать, что функции, описывающие положительную $\Psi_1(\theta \leq 0) \geq 0$ и отрицательную $\Psi_2(\theta \geq 0) \leq 0$ части волны $\epsilon(z, \theta) = Z(z)\Psi(\theta)$, удовлетворяют условию непрерывности в «нулевых» точках θ_0 и условию (14):

$$\Psi_1[n(\theta_1 + \theta_2)] = \Psi_2[n(\theta_1 + \theta_2)] = 0, \quad \Psi_1[n(\theta_1 + \theta_2) + \theta_2] = \Psi_2[n(\theta_1 + \theta_2) + \theta_2] = 0, \tag{20}$$

$$\frac{\Psi'_{1\theta}[n(\theta_1 + \theta_2)]}{\Psi'_{2\theta}[n(\theta_1 + \theta_2)]} = \frac{h+1}{h-1}, \quad \frac{\Psi'_{1\theta}[n(\theta_1 + \theta_2) + \theta_2]}{\Psi'_{2\theta}[n(\theta_1 + \theta_2) + \theta_2]} = \frac{h+1}{h-1}, \tag{21}$$

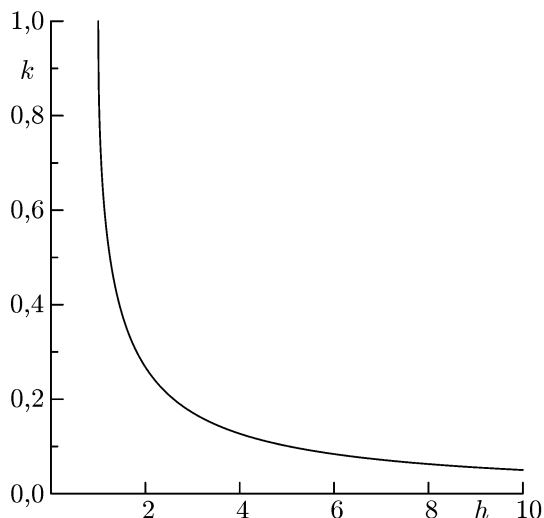


Рис. 7. Зависимость коэффициента k от параметра h

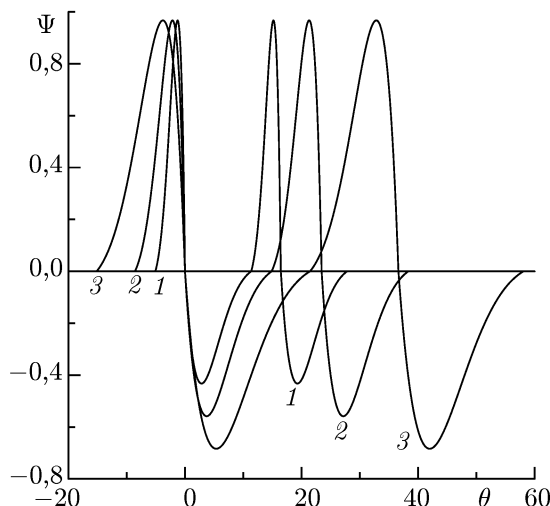


Рис. 8. Формы самоподобных периодических волн при $h = 1,5$ (кривая 1), $h = 2$ (2), $h = 3$ (3)

где θ_1 и θ_2 — периоды функций $\Psi_1(\theta)$ и $\Psi_2(\theta)$ соответственно, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Такое периодическое решение (для одного периода волны) имеет вид

$$\Psi_1(\theta) = -C_1 \exp\left[-\frac{k-1}{2(h-1)}\theta\right] \sin\left[\frac{\sqrt{4kh-(k+1)^2}}{2(h-1)}\theta\right] \geq 0, \quad -\pi \leq \frac{\sqrt{4kh-(k+1)^2}}{2(h-1)}\theta \leq 0, \quad (22)$$

$$\Psi_2(\theta) = C_2 \exp\left[-\frac{k+1}{2(h+1)}\theta\right] \sin\left[\frac{\sqrt{4kh-(k-1)^2}}{2(h+1)}\theta\right] \leq 0, \quad 0 \leq \frac{\sqrt{4kh-(k-1)^2}}{2(h+1)}\theta \leq \pi, \quad (23)$$

где

$$\theta_1 = \frac{2\pi(h-1)}{\sqrt{4kh-(k+1)^2}}, \quad \theta_2 = \frac{2\pi(h+1)}{\sqrt{4kh-(k-1)^2}}, \quad k(h) = h - \sqrt{h^2 - 1} \leq 1,$$

$$C_2 = -C_1 \sqrt{(h-1)/(h+1)} < 0.$$

Частота периодической самоподобной волны $\Psi(\theta)$ определяется выражением

$$\omega(h) = \frac{2\pi\Omega}{\theta_1 + \theta_2} = k(h)\Omega. \quad (24)$$

На рис. 7 приведены графики зависимостей коэффициента k от параметра h . Временные формы одного периода самоподобных периодических волн при $h = 1,5$, $h = 2$ и $h = 3$ приведены на рис. 8. С ростом параметра h коэффициент k и частота $\omega(h)$ уменьшаются.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведено теоретическое исследование распространения плоских продольных акустических волн в однородной среде с разномодульной упругой нелинейностью и релаксацией. Получены точные аналитические выражения для стационарных и «самоподобных» импульсных и периодических волн. Точные решения дают достаточно полное представление о возможных формах самоподобных волн, которые можно наблюдать в соответствующих экспериментах с разномодульными релаксирующими средами. Полученные результаты представляют интерес для

теории нелинейных волновых процессов в релаксирующих средах с неаналитической нелинейностью; они также могут быть использованы для развития нелинейных методов акустической диагностики разномодульных структурно-неоднородных сред и конструкционных материалов.

Авторы благодарят Е. А. Шеронова за интерес к работе и полезные дискуссии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 288 с.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
3. Пищальников Ю. А., Сапожников О. А., Хохлова В. А. // Акуст. журн. 1996. Т. 42, № 3. С. 412.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. М.: Наука, 1965. 204 с.
5. Амбарцумян С. А. Разномодульная теория упругости. М.: Наука, 1982. 359 с.
6. Николаев А. В. // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1979. № 1. С. 72.
7. Алешин А. С., Кузнецов В. В. // Нелинейная сейсмология: Тез. докл. междунар. симп. М.: Наука, 1986. С. 4.
8. Маслов В. П., Мосолов П. П. // Прикладная механика и техническая физика. 1985. Т. 49, № 3. С. 419.
9. Назаров В. Е., Островский Л. А. // Акуст. журн. 1990. Т. 36, № 1. С. 106.
10. Ostrovsky L. A. // J. Acoust. Soc. Amer. 1991. V. 90, No. 6. P. 3332.
11. Назаров В. Е., Радостин А. В. Нелинейные волновые процессы в упругих микронеоднородных средах. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2007.
12. Gavrilov S. N., Herman G. C. // J. Sound Vibration. 2012. V. 331. P. 4464.
13. Radostin A. V., Nazarov V. E., Kiyashko S. B. // Wave Motion. 2013. V. 50, No. 2. P. 191.
14. Khachatryan A. // Mechanics of Solids. 1967. V. 2, No. 5. P. 140.
15. Lucchesi M., Pagni A. // Intern. J. Struct. Dynamics. 2005. V. 5, No. 1. P. 37.
16. Yang H., Wang B. // J. Sound Vibration. 2008. V. 317, No. 1. P. 419.
17. Kharenko D., Padovani C., Pagni A., Pasquinel G., Semin L. // Intern. J. Struct. Dynamics. 2011. V. 11, No. 1. P. 23.
18. Гусев В. А., Маков Ю. Н. // Акуст. журн. 2010. Т. 56, № 5. С. 591.

Поступила в редакцию 1 апреля 2014 г.; принята в печать 26 октября 2014 г.

SELF-SIMILAR ACOUSTIC WAVES IN HOMOGENEOUS MEDIA WITH DIFFERENT-MODULE NONLINEARITY AND RELAXATION

V. E. Nazarov, A. V. Radostin, and S. B. Kiyashko

We present the results of studying theoretically of propagation of plane longitudinal acoustic waves in homogeneous media with different-module elastic nonlinearity and relaxation. Exact analytical relations are obtained for the profiles of stationary waves and self-similar pulsed and periodic waves propagating in such media with no form variations.