УДК 621.396.6

ФЛУКТУАЦИИ ВЕСОВОГО ВЕКТОРА В АДАПТИВНЫХ АНТЕННЫХ РЕШЁТКАХ, НАСТРАИВАЕМЫХ ПО АЛГОРИТМУ МИНИМИЗАЦИИ СРЕДНЕГО КВАДРАТА ОШИБКИ С КВАДРАТИЧНЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ

С. В. Зимина *

Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия

Приведены результаты статистического анализа адаптивной антенной решётки, настраиваемой по алгоритму минимизации среднего квадрата ошибки с квадратичным ограничением на усиление полезного сигнала, при учёте флуктуаций весовых коэффициентов. С помощью теории возмущений в первом приближении получены выражения для корреляционной функции и мощности выходного сигнала адаптивной антенной решётки, а также формула для матрицы ковариации весового вектора. Показано, что флуктуации приводят к искажениям сигнала на выходе антенной решётки. Флуктуации весовых коэффициентов приводят к появлению в статистических характеристиках антенной решётки дополнительных слагаемых. Показано также, что флуктуации весового вектора изотропны — одинаковы во всех направлениях пространства весовых коэффициентов.

ВВЕДЕНИЕ

Скорость и точность настройки адаптивных антенных решёток во многом определяются алгоритмом, который используется для их настройки [1, 2]. В последнее время внимание исследователей снова начинает привлекать классический алгоритм минимизации среднего квадрата ошибки (МСКО, или LMS), который одним из первых был предложен в работе [1]. Однако применение алгоритма МСКО встретило трудности, выражающиеся в неконтролируемом подавлении полезного сигнала в случае, когда помеха коррелирована с сигналом. По этой причине в настоящее время интерес вызывают в первую очередь различные современные модификации МСКО-алгоритма, не содержащие этого недостатка, и, в частности, алгоритм МСКО с квадратичным ограничением на усиление полезного сигнала [3]. Представляет интерес изучение статистических характеристик адаптивных систем, работающих по данному алгоритму, при учёте флуктуаций настраиваемого весового вектора.

В данной работе приведены результаты статистического анализа адаптивных антенных решёток, настраиваемых по МСКО-алгоритму с квадратичным ограничением при учёте флуктуаций весовых коэффициентов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД РЕШЕНИЯ

Рассмотрим работу адаптивной антенной решётки, настраиваемой по МСКО-алгоритму. Настройка вектора весовых коэффициентов $\mathbf{W}$ такой решётки описывается N-мерным векторным уравнением, которое в дискретном времени имеет вид

$$\mathbf{W}(k+1) = \mathbf{W}(k) - \mu \left[\mathbf{X}(k)\mathbf{X}^{\mathrm{H}}(k)\mathbf{W}(k) - \frac{|\mathbf{X}^{\mathrm{H}}(k)\mathbf{W}(k)|^2}{|\mathbf{S}^{\mathrm{H}}\mathbf{W}(k)|^2}\,\mathbf{S}\mathbf{S}^{\mathrm{H}}\mathbf{W}(k) \right]. \tag{1}$$

* zimina-sv@yandex.ru

Здесь $\mathbf{X}(k)$ — вектор входных сигналов, $\mathbf{S} = [S_1, S_2, \ldots, S_N]^{\mathrm{T}}$ — вектор-фазор полезного сигнала, μ — коэффициент адаптации, индексы «Н», «*», «Т» обозначают операции эрмитовского сопряжения, комплексного сопряжения и транспонирования соответственно.

Проведём статистический анализ уравнения (1) методами теории возмущений, подробно изложенным в [4, 5]. Для этого введём следующие обозначения:

$$\mathbf{W} = \langle \mathbf{W} \rangle + \tilde{\mathbf{W}}, \qquad \mathbf{M}_{xx}(k) \equiv \mathbf{R}_{xx} + \tilde{\mathbf{\Phi}}(k), \tag{2}$$

где случайный весовой вектор $\mathbf{W}$ и стохастическая матрица $\mathbf{M}_{xx} \equiv \mathbf{X}^*(k)\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(k)$ представлены в виде сумм их средних значений $\langle \mathbf{W} \rangle$, $\mathbf{R}_{xx}$ и флуктуационных составляющих $\tilde{\mathbf{W}}(k)$, $\tilde{\mathbf{\Phi}}(k)$.

Найдём уравнение для вектора $\langle \mathbf{W} \rangle$ вблизи стационарного состояния. Для этого усредним уравнение (1), используя обозначения (2). При усреднении положим, что имеет место единичный коэффициент усиления в направлении полезного сигнала, $|\mathbf{S}^{\mathrm{H}}\mathbf{W}(k)|^2 = 1$. Данное условие справедливо в стационарном режиме работы. Тогда в указанных предположениях имеем

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{W}(k+1) \rangle = \langle \mathbf{W}(k) \rangle - \mu \big[\mathbf{R}_{xx}^* \langle \mathbf{W}(k) \rangle + \mathbf{\Delta} - \langle \mathbf{W}^{\mathrm{H}}(k) \rangle \mathbf{R}_{xx} \langle \mathbf{W}(k) \rangle \mathbf{S}\mathbf{S}^{\mathrm{H}} \langle \mathbf{W}(k) \rangle - \\ - \langle \tilde{\mathbf{W}}^{\mathrm{H}}(k) \mathbf{R}_{xx} \tilde{\mathbf{W}}(k) \rangle \mathbf{S}\mathbf{S}^{\mathrm{H}} \langle \mathbf{W}(k) \rangle - \langle \mathbf{W}^{\mathrm{H}}(k) \rangle \mathbf{\Delta}\mathbf{S}\mathbf{S}^{\mathrm{H}} \langle \mathbf{W}(k) \rangle - \mathbf{\Delta} \langle \mathbf{W}(k) \rangle \mathbf{S}\mathbf{S}^{\mathrm{H}} \langle \mathbf{W}(k) \rangle - \\ - \langle \tilde{\mathbf{W}}^{\mathrm{H}}(k) \mathbf{\Phi}_{xx} \tilde{\mathbf{W}}(k) \rangle \mathbf{S}\mathbf{S}^{\mathrm{H}} \langle \mathbf{W}(k) \rangle \big]. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{\Delta} \equiv \langle \tilde{\mathbf{\Phi}}_{xx}(k) \tilde{\mathbf{W}}(k) \rangle$ — вектор кумулянтных функций третьего порядка, учитывающих статистическую зависимость флуктуаций вектора весовых коэффициентов $\tilde{\mathbf{W}}(k)$ и входных сигналов $\mathbf{X}(k)$.

Для определения стационарного среднего значения вектора весовых коэффициентов $\mathbf{W}_{\mathrm{CT}} \equiv \equiv \langle \mathbf{W}(k) \rangle$ и других статистических характеристик адаптивной антенной решётки воспользуемся методом возмущений по параметру μ, который будем полагать малым ($\mu \ll 1$). В качестве нулевого приближения возьмём среднее значение вектора весовых коэффициентов $\langle \mathbf{W} \rangle_0 \equiv \mathbf{W}_0$, получаемое из усреднения уравнения (1) в приближении «прямого размыкания» всех смешанных моментов:

$$\mathbf{W}_0(k+1) = \mathbf{W}_0(k) - \mu \big[\mathbf{R}_{xx}^* \mathbf{W}_0(k) - \mathbf{W}_0^{\mathrm{H}}(k) \mathbf{R}_{xx} \mathbf{W}_0(k) \mathbf{S}\mathbf{S}^{\mathrm{H}} \mathbf{W}_0(k) \big]. \tag{4}$$

Стационарное значение весового вектора в нулевом приближении будет удовлетворять уравнению

$$\mathbf{W}_0(k+1) = \mathbf{W}_0(k). \tag{5}$$

Подставляя соотношение (5) в уравнение (4) получаем формулу, из которой может быть найдено стационарное значение весового вектора:

$$\big[\mathbf{R}_{xx}^* - \mathbf{W}_{\mathrm{CT}}^{\mathrm{H}}(k) \mathbf{R}_{xx} \mathbf{W}_{\mathrm{CT}}(k) \mathbf{S}\mathbf{S}^{\mathrm{H}} \big] \mathbf{W}_{\mathrm{CT}}(k) = 0. \tag{6}$$

Уравнение (6) имеет несколько решений. Первое решение является тривиальным — $\mathbf{W}_{\mathrm{CT}} = 0$, второе можно найти путём численного анализа следующей формулы:

$$\mathbf{R}_{xx}^* - \mathbf{W}_{\mathrm{CT}}^{\mathrm{H}}(k) \mathbf{R}_{xx} \mathbf{W}_{\mathrm{CT}}(k) \mathbf{S}\mathbf{S}^{\mathrm{H}} = 0. \tag{7}$$

Проведём анализ статистических характеристик адаптивной антенной решётки при учёте флуктуаций весового вектора. Для этого найдём уравнение для вектора поправки к нулевому приближению:

$$\mathbf{W}_{\Pi}(k) \equiv \mathbf{W}(k) - \mathbf{W}_0. \tag{8}$$

Тогда, вычитая из выражения (1) уравнение (4), получаем

$$\mathbf{W}_{\Pi}(k+1) = \mathbf{W}_{\Pi}(k) - \mu\big[\mathbf{R}^{*}_{xx} + \langle p(k)\rangle\,\mathbf{S}\mathbf{S}^{\mathrm{H}}\big]\mathbf{W}_{\Pi}(k) - \mu\left[\tilde{\mathbf{\Phi}}^{*}_{xx}(k) + \tilde{p}(k)\mathbf{S}\mathbf{S}^{\mathrm{H}}\right]\mathbf{W}(k). \tag{9}$$

Здесь $\langle p(k)\rangle = \mathbf{W}^{\mathrm{H}}_{0}(k)\mathbf{R}_{xx}\mathbf{W}_{0}(k)$ — средняя мощность сигнала на выходе адаптивной антенной решётки в момент времени k, $|\mathbf{X}^{\mathrm{H}}(k)\mathbf{W}(k)|^{2} = \langle p(k)\rangle + \tilde{p}(k)$ — мгновенная мощность сигнала на выходе решётки в момент времени k.

Перейдём в $\mathbf{Q}$-матричное представление, диагонализирующее эрмитовскую матрицу $\mathbf{R}^{*}_{xx} + \langle p(k)\rangle\,\mathbf{S}\mathbf{S}^{\mathrm{H}}$, по следующим формулам:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{W}_{\Pi}, \qquad \mathbf{W}_{\Pi} = \mathbf{Q}\mathbf{Y}, \qquad \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^{\mathrm{H}}, \tag{10}$$

где $\mathbf{Y}$ — вектор поправки к нулевому приближению в $\mathbf{Q}$-матричном представлении. Тогда уравнение (9) в $\mathbf{Q}$-матричном представлении запишется в виде

$$\mathbf{Y}(k+1) = \mathbf{Y}(k) - \mu\mathbf{\Lambda}\mathbf{Y}(k) - \mu\mathbf{Q}^{-1}\left[\tilde{\mathbf{\Phi}}^{*}_{xx}(k) + \tilde{p}(k)\mathbf{S}\mathbf{S}^{\mathrm{H}}\right]\mathbf{W}(k). \tag{11}$$

Здесь $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{Q}^{-1}\left[\mathbf{R}^{*}_{xx} + \langle p(k)\rangle\,\mathbf{S}\mathbf{S}^{\mathrm{H}}\right]\mathbf{Q}$ — диагональная матрица вида

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{bmatrix}, \qquad \lambda_{\min} \le \lambda_1 \le \ldots \le \lambda_n \le \lambda_{\max}.$$

Обозначим скорректированную флуктуационную часть корреляционной матрицы входных сигналов как

$$\tilde{\mathbf{\Psi}}(k) = \tilde{\mathbf{\Phi}}^{*}_{xx}(k) + \tilde{p}(k)\mathbf{S}\mathbf{S}^{\mathrm{H}}. \tag{12}$$

Учитывая соотношение (12), уравнение (11) можно переписать в виде

$$\mathbf{Y}(k+1) = \mathbf{Y}(k) - \mu\mathbf{\Lambda}\mathbf{Y}(k) - \mu\mathbf{Q}^{-1}\tilde{\mathbf{\Psi}}(k)\mathbf{W}(k). \tag{13}$$

Решение уравнения (13) может быть записано следующим образом:

$$\mathbf{Y}(k+1) = -\mu\sum_{n=0}^{\infty}\hat{\boldsymbol{\lambda}}(n)\mathbf{Q}^{-1}\tilde{\mathbf{\Psi}}(k-n)\left[\mathbf{W}_{0}(k) + \mathbf{Q}\mathbf{Y}(k-n)\right]. \tag{14}$$

Здесь

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}}(k) = \begin{bmatrix} (1-\mu\lambda_1)^{k} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (1-\mu\lambda_N)^{k} \end{bmatrix}$$

— диагональная переходная матрица. Итерируя равенство (14), можно построить ряд теории возмущений по малому параметру $\mu \ll 1$ [4]. В результате вектор $\mathbf{Y}(k)$ и соответствующий ему вектор поправки $\mathbf{W}_{\Pi}(k) = \mathbf{Q}\mathbf{Y}(k)$ запишутся в виде суммы слагаемых, принадлежащих приближениям различного порядка:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3 + \ldots, \tag{15}$$

$$\mathbf{W}_{\Pi}(k) = \mathbf{Q}\mathbf{Y}(k) = \mathbf{W}_{\Pi 1}(k) + \mathbf{W}_{\Pi 2}(k) + \mathbf{W}_{\Pi 3}(k) + \ldots. \tag{16}$$

Члены ряда (15) будут равны

$$\mathbf{Y}_1(k+1) = -\mu \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\boldsymbol{\lambda}}(n)\mathbf{Q}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\Psi}}(k-n)\mathbf{W}_{0\text{СТ}},$$

$$\mathbf{Y}_2(k+1) = -\mu \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\boldsymbol{\lambda}}(n)\mathbf{Q}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\Psi}}(k-n)\mathbf{Q}\mathbf{Y}_1(k-n) =$$

$$= \mu^2 \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \hat{\boldsymbol{\lambda}}(n)\mathbf{Q}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\Psi}}(k-n)\mathbf{Q}\hat{\boldsymbol{\lambda}}(m)\mathbf{Q}^{-1}\ tilde\boldsymbol{\Psi}(k-n-m-1)\mathbf{W}_{0\text{СТ}},$$

$$\ldots$$

$$\mathbf{Y}_{p+1}(k+1) = -\mu \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\boldsymbol{\lambda}}(n)\mathbf{Q}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\Psi}}(k-n)\mathbf{Q}\mathbf{Y}_p(k-n). \tag{17}$$

Для вычисления статистических характеристик исследуемой адаптивной антенной решётки необходимо задать конкретный вид временно́й зависимости вектора входных сигналов. Будем предполагать, что рассматриваемая решётка является узкополосной. Корреляционная матрица входных сигналов узкополосной антенной решётки имеет вид

$$\mathbf{R}_{xx}(k,k+n) \equiv \langle \mathbf{X}^*(k)\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(k+n)\rangle = \mathbf{R}_{xx} r^{|n|}, \tag{18}$$

где r — коэффициент корреляции между отсчётами входного сигнала. Для целей нашего исследования будем рассматривать входной сигнал и помехи с различными коэффициентами автокорреляции между отсчётами. В нашем случае корреляционная матрица полезного сигнала запишется в виде

$$\mathbf{R}_{ss}(k,k+n) \equiv \langle \mathbf{S}^*(k)\mathbf{S}^{\mathrm{T}}(k+n)\rangle = (\mathbf{R}_{ss} + \langle p\rangle_s\, \mathbf{S}\mathbf{S}^{\mathrm{H}})\, r_s^{|n|} = \mathbf{R}_{ssk} r_s^{|n|}, \tag{19}$$

а корреляционная матрица помех может быть представлена формулой

$$\mathbf{R}_{\xi\xi}(k,k+n) \equiv \langle \boldsymbol{\xi}^*(k)\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(k+n)\rangle = (\mathbf{R}_{\xi\xi} + \langle p\rangle_\xi\, \mathbf{S}\mathbf{S}^{\mathrm{H}})\, r_\xi^{|n|} = \mathbf{R}_{\xi\xi k} r_\xi^{|n|}. \tag{20}$$

Здесь $\mathbf{R}_{ssk}$, $\mathbf{R}_{\xi\xi k}$ — пространственные части корреляционных матриц полезного сигнала и помех на входе адаптивной антенной решётки, r_s, r_ξ — коэффициенты автокорреляции между отсчётами полезного сигнала и помехи, $\langle p\rangle_s$, $\langle p\rangle_\xi$ — мощности соответственно полезного сигнала и помехи на выходе адаптивной антенной решётки.

На основе соотношений (15)–(20) в следующих разделах получены аналитические выражения для основных статистических характеристик антенной решётки с ограничением.

2. КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ И МОЩНОСТЬ ВЫХОДНОГО СИГНАЛА АДАПТИВНОЙ АНТЕННОЙ РЕШЁТКИ

Рассмотрим влияние флуктуаций весового вектора на корреляционные характеристики и мощность на выходе адаптивной антенной решётки. Для этого всюду ниже будем дополнительно предполагать, что $\mathbf{X}(k)$ является комплексным гауссовским случайным вектором.

Корреляционная функция выходного сигнала адаптивной антенной решётки может быть записана в виде

$$K_Z(k,k+n) \equiv \left\langle Z^{\mathrm{H}}(k)Z(k+n)\right\rangle = \left\langle [\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(k)\mathbf{W}(k)]^{\mathrm{H}}\,[\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(k+n)\mathbf{W}(k+n)]\right\rangle =$$

$$= \left\langle \mathbf{W}^{\mathrm{H}}(k)\mathbf{X}^{*}(k)\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(k+n)\mathbf{W}(k+n)\right\rangle. \quad (21)$$

Чтобы учесть наличие флуктуаций в адаптивной антенной решётке, подставим в данную формулу выражения (2). Тогда имеем

$$K_Z(k,k+n) = K_Z[n] + 2\mathbf{W}_{\mathrm{CT}}\left\langle \tilde{\mathbf{\Phi}}_{xx}(k,k+n)\tilde{\mathbf{W}}(k+n)\right\rangle + \\ + \left\langle \tilde{\mathbf{W}}^{\mathrm{H}}(k)\mathbf{R}_{xx}(k,k+n)\tilde{\mathbf{W}}(k+n)\right\rangle + \left\langle \tilde{\mathbf{W}}^{\mathrm{H}}(k)\tilde{\mathbf{\Phi}}_{xx}(k,k+n)\tilde{\mathbf{W}}(k+n)\right\rangle. \quad (22)$$

В выражении (22) первое слагаемое представляет собой корреляционную функцию при постоянном стационарном весовом векторе, т. е. найденную без учёта флуктуаций весовых коэффициентов. Остальные слагаемые в выражении (22) возникают вследствие учёта флуктуаций весового вектора в адаптивной антенной решётке.

После преобразований получим следующий вид корреляционной функции выходного сигнала адаптивной антенной решётки, настраиваемой по МСКО-алгоритму с квадратичным ограничением:

$$K_Z(n) = \langle |Z|^2\rangle_s\, r_s^{|n|} + \langle |Z|^2\rangle_\xi\, r_\xi^{|n|} + \frac{\mu\,\langle |Z|^2\rangle_s}{2}\,\frac{1+r_s r_\xi}{1-r_s r_\xi}\left\{\mathrm{Sp}(\mathbf{R}_{ssk}) r_s^{|n|} + \mathrm{Sp}(\mathbf{R}_{\xi\xi k}) r_\xi^{|n|}\right\} + \\ + \frac{\mu\,\langle |Z|^2\rangle_\xi}{2}\,\frac{1+r_\xi^2}{1-r_\xi^2}\left\{\mathrm{Sp}(\mathbf{R}_{ssk}) r_s^{|n|} + \mathrm{Sp}(\mathbf{R}_{\xi\xi k}) r_\xi^{|n|}\right\} - \\ - \mu\,\langle |Z|^2\rangle_s\left\{\mathrm{Sp}(\mathbf{R}_{ssk}) r_s^{|n|}\left(\frac{2r_s^2}{1-r_s^2} + |n|\right) + \mathrm{Sp}(\mathbf{R}_{\xi\xi k})\,\frac{\left(r_s^{|n|} + r_\xi^{|n|}\right) r_s r_\xi}{1-r_s r_\xi}\right\} - \\ - \mu\,\langle |Z|^2\rangle_s\left\{\mathrm{Sp}(\mathbf{R}_{ssk})\,\frac{\left(r_s^{|n|} + r_\xi^{|n|}\right) r_s r_\xi}{1-r_s r_\xi} + \mathrm{Sp}(\mathbf{R}_{\xi\xi k}) r_\xi^{|n|}\left(\frac{2r_s^2}{1-r_s^2} + |n|\right)\right\}. \quad (23)$$

В формуле (23) только два первых слагаемых в правой части (корреляционные функции полезного и помехового сигналов на выходе решётки) найдены при постоянном стационарном весовом векторе. Появление остальных слагаемых правой части (23) связано с учётом флуктуаций весовых коэффициентов. Таким образом, видно, что флуктуации весового вектора искажают выходной сигнал адаптивной антенной решётки. Данные искажения имеют первый порядок малости по коэффициенту адаптации μ.

Запишем выражение для корреляционной функции выходного сигнала адаптивной антенной решётки в частном случае равенства коэффициентов автокорреляции между отсчётами помехи и полезного сигнала, $r_s = r_\xi = r$. Получим следующее:

$$K_Z(n) = \langle |Z|^2\rangle_0\, r^{|n|} + \frac{\mu\,\langle |Z|^2\rangle_0}{2}\,\frac{1+r^2}{1-r^2}\,\mathrm{Sp}(\mathbf{R}_{xxk}) r^{|n|} - \mu\,\langle |Z|^2\rangle_0\,\mathrm{Sp}(\mathbf{R}_{xxk}) r^{|n|}\left(\frac{2r^2}{1-r^2} + |n|\right), \quad (24)$$

здесь $\langle |Z|^2\rangle_0 \equiv \mathbf{W}_{\mathrm{CT}}^{\mathrm{H}}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{W}_{\mathrm{CT}}$ — выходная мощность антенной решётки, найденная при постоянном стационарном весовом векторе.

Из выражения (24) следует, что в случае поступления на адаптивную антенную решётку входных сигналов с одинаковыми коэффициентами автокорреляции между отсчётами выражение для корреляционной функции выходного сигнала решётки существенно упрощается. Учёт флуктуаций весовых коэффициентов приводит к появлению двух дополнительных слагаемых в правой части формулы (24). Они имеют первый порядок малости по коэффициенту адаптации μ, т. е.

существенно меньше величины корреляционной функции, найденной при постоянном стационарном весовом векторе.

Получим выражение для выходной мощности адаптивной антенной решётки, настраиваемой по МСКО-алгоритму с квадратичным ограничением на усиление полезного сигнала. Для этого необходимо положить $n = 0$ в формуле (23), описывающей корреляционную функцию выходного сигнала адаптивной антенной решётки:

$$\begin{gathered}\langle |Z|^2\rangle_{\text{СТ}} = \langle |Z|^2\rangle_s + \langle |Z|^2\rangle_\xi + \frac{\mu\,\langle |Z|^2\rangle_s}{2}\,\frac{1+r_s r_\xi}{1-r_s r_\xi}\,[\mathrm{Sp}(\mathbf{R}_{ssk}) + \mathrm{Sp}(\mathbf{R}_{\xi\xi k})] + \\ + \frac{\mu\,\langle |Z|^2\rangle_\xi}{2}\,\frac{1+r_\xi^2}{1-r_\xi^2}\,[\mathrm{Sp}(\mathbf{R}_{ssk}) + \mathrm{Sp}(\mathbf{R}_{\xi\xi k})] - \mu\,\langle |Z|^2\rangle_s \left[\mathrm{Sp}(\mathbf{R}_{ssk})\,\frac{2r_s^2}{1-r_s^2} + \mathrm{Sp}(\mathbf{R}_{\xi\xi k})\,\frac{2r_s r_\xi}{1-r_s r_\xi}\right] - \\ - \mu\,\langle |Z|^2\rangle_\xi \left[\mathrm{Sp}(\mathbf{R}_{ssk})\,\frac{2r_s r_\xi}{1-r_s r_\xi} + \mathrm{Sp}(\mathbf{R}_{\xi\xi k})\,\frac{2r_\xi^2}{1-r_\xi^2}\right]. \qquad (25)\end{gathered}$$

Из выражения (25) можно видеть, что мощность сигнала на выходе решётки, настраиваемой по МСКО-алгоритму с квадратичным ограничением, может быть как больше, так и меньше мощности, найденной при постоянном стационарном весовом векторе, т. е. может иметь место как рассогласование [1], так и «перекомпенсация» [4]. Оба указанных эффекта имеют первый порядок малости по коэффициенту адаптации μ.

Приведём выражение для выходной мощности адаптивной антенной решётки, настраиваемой по МСКО-алгоритму с квадратичным ограничением, для частного случая равных коэффициентов автокорреляции между отсчётами входных полезного сигнала и помех ($r_s = r_\xi = r$):

$$\langle |Z|^2\rangle_{\text{СТ}} = \langle |Z|^2\rangle_0 \left(1 + \frac{\mu}{2}\,\frac{1-3r^2}{1-r^2}\,\mathrm{Sp}\,\mathbf{R}_{xxk}\right). \qquad (26)$$

Из формулы (26) можно видеть, что переход от эффекта рассогласования к эффекту «перекомпенсации» определяется знаком множителя $(1-3r^2)/(1-r^2)$. При положительных значениях этого множителя мощность, найденная при постоянном стационарном весовом векторе, меньше мощности, найденной при учёте флуктуаций весовых коэффициентов, т. е. имеет место рассогласование. При отрицательных значениях данного множителя имеет место «перекомпенсация». Один эффект переходит в другой при изменении коэффициента автокорреляции между отсчётами r. При $r < 1/\sqrt{3}$ имеет место рассогласование, при $r > 1/\sqrt{3}$ — «перекомпенсация».

3. МАТРИЦА КОВАРИАЦИИ ВЕКТОРА ВЕСОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Матрица ковариации весового вектора в стационарном режиме работы в совпадающие моменты времени в первом приближении может быть записана в виде

$$\mathbf{K}_{\tilde W} \equiv \mathbf{K}_{\tilde W}(k,k) \equiv \left\langle \tilde{\mathbf{W}}^*(k)\tilde{\mathbf{W}}^{\mathrm{T}}(k)\right\rangle \approx \mathbf{Q}^* \left\langle \mathbf{Y}_1^*(k)\mathbf{Y}_1^{\mathrm{T}}(k)\right\rangle \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}. \qquad (27)$$

Используя формулы (17), можно получить вид корреляционной матрицы $\langle \mathbf{Y}_1^*\mathbf{Y}_1^{\mathrm{T}}\rangle$ для вектора весовых коэффициентов $\mathbf{Y}$ в $\mathbf{Q}$-матричном представлении:

$$\mathbf{Q}^* \left\langle \mathbf{Y}_1^*\mathbf{Y}_1^{\mathrm{T}}\right\rangle \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \mathbf{Q}^* \left\langle \mu^2 \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty} \left[\hat{\boldsymbol{\lambda}}(n_1)\mathbf{Q}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\Psi}}(m-1-n_1)\mathbf{W}_{0\text{СТ}}\right]^* \times\right.$$

$$\times \left[\hat{\boldsymbol{\lambda}}(n_2)\mathbf{Q}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\Psi}}(m-1-n_2)\mathbf{W}_{0\text{СТ}}\right]^{\text{T}} \Big\rangle \mathbf{Q}^{\text{T}}. \quad (28)$$

Вычисляя (28) и учитывая, что адаптивная антенная решётка является узкополосной, получаем

$$\mathbf{K}_{\tilde{W}} = \frac{\mu}{2}\,\frac{1+r_\xi^2}{1-r_\xi^2}\,\langle |Z|^2\rangle_\xi\,\mathbf{I} + \frac{\mu}{2}\,\frac{1+r_s r_\xi}{1-r_s r_\xi}\,\langle |Z|^2\rangle_s\,\mathbf{I}, \quad (29)$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица.

В частном случае прихода на адаптивную антенную решётку входных сигналов с одинаковыми коэффициентами автокорреляции между отсчётами ($r_s = r_\xi = r$) ковариационная матрица флуктуаций весовых коэффициентов имеет вид

$$\mathbf{K}_{\tilde{W}} = \frac{\mu}{2}\,\frac{1+r^2}{1-r^2}\,\langle |Z|^2\rangle_0\,\mathbf{I}. \quad (30)$$

Из выражения (30) следует, что, поскольку собственные числа единичной матрицы одинаковы, то в общем случае собственные числа матрицы ковариации вектора весовых коэффициентов $\mathbf{K}_{\tilde{W}}$ также будут одинаковыми. По этой причине флуктуации весового вектора антенной решётки, настраиваемой по МСКО-алгоритму с квадратичным ограничением, изотропны в пространстве весовых коэффициентов. Данные флуктуации имеют первый порядок малости по μ.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведённый статистический анализ характеристик адаптивной антенной решётки, настраиваемой по МСКО-алгоритму с квадратичным ограничением на усиление полезного сигнала, позволил показать, что учёт флуктуаций вектора весовых коэффициентов решётки приводит к появлению дополнительных слагаемых в выражениях для корреляционной функции выходного сигнала и выходной мощности, а также к искажениям выходного сигнала. Данные искажения имеют первый порядок малости по коэффициенту адаптации μ. В адаптивной антенной решётке с МСКО-алгоритмом с квадратичным ограничением выходная мощность может быть как больше, так и меньше мощности, найденной при постоянном стационарном весовом векторе, т. е. могут иметь место как эффект рассогласования, так и эффект «перекомпенсации». Флуктуации весового вектора изотропны в пространстве весовых коэффициентов.

Работа выполнена в рамках программы развития Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского как национального исследовательского университета.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Уидроу Б., Стирнз С. Адаптивная обработка сигналов. М.: Радио и связь, 1989.
2. Hudson J. E. Adaptive array principles, London: Peter Peregrinus Ltd., 1991.
3. Орешкин Б. Н., Бакулев П. А. // Антенны. 2007. № 9. С. 29.
4. Игнатенко С. В., Мальцев А. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1994. Т. 37, № 12. С. 1 532.
5. Зимина С. В. // Радиотехника и электроника. 2005. Т. 50, № 8. С. 952.

Поступила в редакцию 17 сентября 2013 г.; принята в печать 22 января 2015 г.

WEIGHT VECTOR FLUCTUATIONS IN ADAPTIVE ANTENNA ARRAYS TUNED USING THE ALGORITHM OF THE MSE MINIMIZATION WITH QUADRATIC CONSTRAINT

S. V. Zimina

We present the results of the statistical analysis of an adaptive antenna array tuned using the algorithm of the mean-squared error (MSE) minimization with quadratic? constraint on the useful-signal amplification with allowance for the weight-coefficient fluctuations. Using the perturbation theory, the expressions for the correlation function and the output-signal power of the adaptive antenna array, as well as the formula for the weight-vector covariance matrix are obtained in the first approximation. The fluctuations are shown to lead to the signal distortions at the antenna-array output. The weight-coefficient fluctuations result in the appearance of additional terms in the statistical characteristics of the antenna array. It is also shown that the weight-vector fluctuations are isotropic, i.e., identical in all directions of the weight-coefficient space.