

УДК 621.391

ОЦЕНКА ЧИСЛА РАДИОСИГНАЛОВ С НЕИЗВЕСТНЫМИ АМПЛИТУДАМИ И ФАЗАМИ

А. П. Трифонов*, А. В. Харин

Воронежский госуниверситет, г. Воронеж, Россия

Выполнены синтез и анализ нескольких алгоритмов оценки числа радиосигналов с известными и неизвестными амплитудами и фазами. Для получения состоятельных алгоритмов оценки числа радиосигналов в случае неизвестных амплитуд и фаз использованы модифицированные алгоритмы максимального правдоподобия. Эффективность алгоритмов оценки количественно характеризовалась укороченной вероятностью ошибки оценки числа сигналов. По результатам анализа оптимизированы параметры исследованных алгоритмов.

ВВЕДЕНИЕ

Необходимость оценки числа принимаемых сигналов возникает при решении многих задач статистической радиофизики и радиотехники. Так, при использовании многолучевого радиоканала, например в ММО-системах [1, 2], число лучей часто априори неизвестно и его требуется определить. При радиолокационном и акустолокационном (активном или пассивном) наблюдении достаточно распространённой является ситуация, когда неизвестно число источников сигналов, поступающих на антенную решётку [3–9]. Однако задача оценки числа сигналов на сегодняшний день решена лишь частично. Возникают трудности в определении структуры алгоритма оценки, практически отсутствуют результаты теоретического анализа качества функционирования алгоритмов оценки числа сигналов. Более того, нет достаточно общепризнанной и корректной количественной характеристики таких алгоритмов. Без введения количественных характеристик алгоритмов оценки числа сигналов возникают трудности в сравнении алгоритмов и выборе наиболее эффективного.

Ниже рассмотрены несколько алгоритмов оценки числа радиосигналов с известными и неизвестными амплитудами и фазами. В качестве характеристики эффективности алгоритмов используется вероятность ошибки оценки числа сигналов.

1. РАДИОСИГНАЛЫ С ИЗВЕСТНЫМИ АМПЛИТУДАМИ И ФАЗАМИ

Предположим, что наблюдается сумма из ν узкополосных радиосигналов $s_i(t, a_i, \varphi_i) = a_i f_i(t) \cos(\omega_i t + \Psi_i(t) - \varphi_i)$ и в результате принимается сигнал

$$s(t, \nu, \mathbf{a}_\nu, \boldsymbol{\varphi}_\nu) = \sum_{i=1}^{\nu} s_i(t, a_i, \varphi_i) = \sum_{i=1}^{\nu} a_i f_i(t) \cos(\omega_i t + \Psi_i(t) - \varphi_i), \quad (1)$$

где $\nu = 1, \dots, \nu_{\max}$, a_i и ω_i — амплитуда и частота i -го сигнала соответственно (a_i и ω_i — действительные числа), $\varphi_i \in [0, 2\pi]$ — фаза сигнала, $\Psi_i(t)$ — закон фазовой модуляции сигнала, $f_i(t)$ — огибающая сигнала и далее используется обозначение $\mathbf{a}_\nu = (a_1, \dots, a_\nu)$, $\boldsymbol{\varphi}_\nu = (\varphi_1, \dots, \varphi_\nu)$.

* trifonov@phys.vsu.ru

Пусть сигнал (1) наблюдается в течение интервала времени $[T_1, T_2]$ на фоне аддитивного гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0 . Следовательно, обработке доступна реализация

$$x(t) = n(t) + \sum_{i=1}^{\nu_0} a_{0i} f_i(t) \cos(\omega_i t + \Psi_i(t) - \varphi_{0i}), \quad (2)$$

где ν_0 — истинное число сигналов в (1), а множества $\{a_{0i}\}_{i=1}^{\nu_{\max}} = (a_{01}, \dots, a_{0\nu_{\max}})$, $\{\varphi_{0i}\}_{i=1}^{\nu_{\max}} = (\varphi_{01}, \dots, \varphi_{0\nu_{\max}})$ содержат истинные значения амплитуд и фаз сигналов.

Используем для оценки числа сигналов ν_0 метод максимального правдоподобия. В работе [10] приведена следующая формула для логарифма функционала отношения правдоподобия (ФОР), когда помехой является аддитивный белый гауссовский шум:

$$L(l) = \frac{2}{N_0} \int_{T_1}^{T_2} x(t) s(t, l) dt - \frac{1}{N_0} \int_{T_1}^{T_2} s^2(t, l) dt. \quad (3)$$

Здесь через l обозначена совокупность неизвестных параметров сигнала $s(t, l)$.

Подставляя сигнал (1) в выражение (3), запишем логарифм функционала отношения правдоподобия

$$L(\nu, \mathbf{a}_\nu, \boldsymbol{\varphi}_\nu) = \frac{2}{N_0} \sum_{m=1}^{\nu} a_m \int_{T_1}^{T_2} x(t) f_m(t) \cos(\omega_m t + \Psi_m(t) - \varphi_m) dt - \frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{\nu} a_i a_j K_{ij}. \quad (4)$$

Здесь $\nu = 1, \dots, \nu_{\max}$,

$$K_{ij} = \frac{1}{2} \int_{T_1}^{T_2} f_i(t) f_j(t) \cos[\omega_i t + \Psi_i(t) - \varphi_i - \omega_j t - \Psi_j(t) + \varphi_j] dt + \\ + \frac{1}{2} \int_{T_1}^{T_2} f_i(t) f_j(t) \cos[\omega_i t + \Psi_i(t) - \varphi_i + \omega_j t + \Psi_j(t) - \varphi_j] dt \quad (5)$$

— скалярное произведение функций $f_i(t) \cos[\omega_i t + \Psi_i(t) - \varphi_i]$ и $f_j(t) \cos[\omega_j t + \Psi_j(t) - \varphi_j]$.

Рассмотрим ситуацию, когда сигналы в сумме (1) удовлетворяют условию узкополосности [10, 11]

$$\omega_i (T_2 - T_1) \gg 1, \quad i = 1, \dots, \nu. \quad (6)$$

В этом случае для любых индексов i и j второе слагаемое в формуле (5) является малым относительно первого слагаемого, что позволяет переписать выражение (5) в виде

$$K_{ij} = V_{cij} \cos(\varphi_i - \varphi_j) + V_{sij} \sin(\varphi_i - \varphi_j), \quad (7)$$

где

$$V_{cij} = \frac{1}{2} \int_{T_1}^{T_2} f_i(t) f_j(t) \cos[(\omega_i - \omega_j) t + \Psi_i(t) - \Psi_j(t)] dt,$$

$$V_{sij} = \frac{1}{2} \int_{T_1}^{T_2} f_i(t) f_j(t) \sin[(\omega_i - \omega_j)t + \Psi_i(t) - \Psi_j(t)] dt.$$

Используя (4), запишем алгоритм максимального правдоподобия оценки числа сигналов

$$\hat{\nu}: L_0(\hat{\nu}) = \sup_{\nu} L_0(\nu), \quad \nu = 1, \dots, \nu_{\max}, \tag{8}$$

где $L_0(\nu) = L(\nu, \mathbf{a}_{0\nu}, \boldsymbol{\varphi}_{0\nu})$.

Рассмотрим свойства логарифма функционала отношения правдоподобия (4). Для этого подставим в формулу (4) реализацию наблюдаемых данных (2) и получим

$$L_0(\nu) = \sum_{j=1}^{\nu} z_j \sum_{i=1}^{\nu_0} z_i \rho_{ij} + \sum_{j=1}^{\nu} z_j \xi_j - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} z_i z_j \rho_{ij}. \tag{9}$$

Здесь

$$\xi_i = \sqrt{\frac{2}{N_0 K_{ii}}} \int_{T_1}^{T_2} n(t) f_i(t) \cos(\omega_i t + \Psi_i(t) - \varphi_{0i}) dt, \quad \rho_{ij} = \frac{K_{ij}}{\sqrt{K_{ii} K_{jj}}}, \quad \boldsymbol{\rho}_{\nu} = \|\rho_{ij}\|_{i=1, j=1}^{\nu},$$

$z_i^2 = 2a_{0i}^2 K_{ii} / N_0$ — отношение сигнал/шум (ОСШ) для i -го сигнала. Учитывая выражение (7), коэффициент корреляции между i -м и j -м сигналами можно представить в виде

$$\rho_{ij} = \rho_{cij} \cos(\varphi_i - \varphi_j) + \rho_{sij} \sin(\varphi_i - \varphi_j), \tag{10}$$

где

$$\rho_{cij} = 2V_{cij} / \sqrt{\int_{T_1}^{T_2} f_i^2(t) dt \int_{T_1}^{T_2} f_j^2(t) dt}, \quad \rho_{sij} = 2V_{sij} / \sqrt{\int_{T_1}^{T_2} f_i^2(t) dt \int_{T_1}^{T_2} f_j^2(t) dt}.$$

Используя выражения (9) и (10), находим вспомогательные соотношения

$$\begin{aligned} L_0(\nu_0) - L_0(\nu_0 + m) &= - \sum_{i=\nu_0+1}^{\nu_0+m} z_i \xi_i + \frac{1}{2} \sum_{i=\nu_0+1}^{\nu_0+m} \sum_{j=\nu_0+1}^{\nu_0+m} z_i z_j \rho_{ij}, \\ L_0(\nu_0) - L_0(\nu_0 - m) &= \sum_{i=\nu_0-m+1}^{\nu_0} z_i \xi_i + \frac{1}{2} \sum_{i=\nu_0-m+1}^{\nu_0} \sum_{j=\nu_0-m+1}^{\nu_0} z_i z_j \rho_{ij}. \end{aligned} \tag{11}$$

Представим логарифм (9) в виде суммы сигнальной и шумовой составляющих

$$L_0(\nu) = S(\nu) + N(\nu),$$

где

$$S(\nu) = \langle L_0(\nu) \rangle = \sum_{j=1}^{\nu} z_j \sum_{i=1}^{\nu_0} z_i \rho_{ij} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} z_i z_j \rho_{ij}, \quad N(\nu) = L_0(\nu) - \langle L_0(\nu) \rangle.$$

Из этого представления и формулы (11) имеем

$$S(\nu_0) - S(\nu_0 + m) = \frac{1}{2} \sum_{i=\nu_0+1}^{\nu_0+m} \sum_{j=\nu_0+1}^{\nu_0+m} z_i z_j \rho_{ij}, \quad S(\nu_0) - S(\nu_0 - m) = \frac{1}{2} \sum_{i=\nu_0-m+1}^{\nu_0} \sum_{j=\nu_0-m+1}^{\nu_0} z_i z_j \rho_{ij}.$$

Учитывая эти соотношения и то, что матрица ρ_ν неотрицательно определена, можно заключить, что величина ν_0 соответствует верхнему пределу $S(\nu_0) = \sup_\nu S(\nu)$. Таким образом, оценка (8) оказывается состоятельной согласно работе [10].

Эффективность алгоритма оценки числа сигналов можно характеризовать вероятностью ошибки $p_e = p(\hat{\nu} \neq \nu_0)$. Однако расчёт этой вероятности требует существенных вычислительных ресурсов. С целью получения упрощённой приближённой формулы для вероятности ошибки заметим, что любой алгоритм \mathfrak{R} оценки числа сигналов можно представить в виде

$$\hat{\nu}: R[\hat{\nu}; x(t)] = \sup_\nu R[\nu; x(t)],$$

где $R[\nu; x(t)]$ — функционал, определяемый структурой алгоритма \mathfrak{R} и зависящий от числа сигналов и реализации наблюдаемых данных. С помощью данного представления полную вероятность ошибки для алгоритма \mathfrak{R} можно записать как

$$p_e = 1 - p\{R[\nu_0; x(t)] > R[i; x(t)], i \neq \nu_0, i = 1, \dots, \nu_{\max}\}. \quad (12)$$

Теперь в качестве приближения к полной вероятности ошибки, введём в рассмотрение укороченную вероятность ошибки алгоритма \mathfrak{R} , определяемую как

$$p_t = 1 - p\{R[\nu_0; x(t)] > R[\nu_0 + 1; x(t)], R[\nu_0; x(t)] > R[\nu_0 - 1; x(t)]\}. \quad (13)$$

Из определения (13) следует, что укороченная вероятность ошибки является нижней границей для полной вероятности ошибки (12), когда $1 < \nu_0 < \nu_{\max}$. Необходимо также отметить, что укороченная вероятность ошибки совпадает с полной вероятностью ошибки в случае, когда $\nu_{\max} = 3$ и $\nu_0 = 2$.

Найдём укороченную вероятность ошибки (13) для алгоритма (8):

$$p_{t0} = 1 - p[L_0(\nu_0) > L_0(\nu_0 + 1), L_0(\nu_0) > L_0(\nu_0 - 1)]. \quad (14)$$

Используя формулу (11) при $m = 1$, выражение (14) можно переписать как

$$p_{t0} = 1 - p(\xi_{\nu_0} > -z_{\nu_0}/2, \xi_{\nu_0+1} < z_{\nu_0+1}/2). \quad (15)$$

Учитывая, что ξ_{ν_0} и ξ_{ν_0+1} — гауссовские случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями, единичными дисперсиями и коэффициентом корреляции $\langle \xi_{\nu_0} \xi_{\nu_0+1} \rangle = \rho_{\nu_0, \nu_0+1}$, найдём формулу для вычисления укороченной вероятности (15) ошибки алгоритма (8)

$$p_{t0} = 1 - \frac{1}{2\pi \sqrt{1 - \rho_{\nu_0, \nu_0+1}^2}} \int_{-\infty}^{z_{\nu_0+1}/2} \int_{-z_{\nu_0}/2}^{\infty} \exp\left[-\frac{x^2 - 2xy\rho_{\nu_0, \nu_0+1} + y^2}{2(1 - \rho_{\nu_0, \nu_0+1}^2)}\right] dx dy. \quad (16)$$

Проводя замену переменных, перепишем (16) как

$$p_{t0} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_{\nu_0+1}/2} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \tilde{\Phi}\left(\frac{z_{\nu_0}/2 + \rho_{\nu_0, \nu_0+1}y}{\sqrt{1 - \rho_{\nu_0, \nu_0+1}^2}}\right) dy, \quad (17)$$

здесь $\tilde{\Phi}(x) = \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt / \sqrt{2\pi}$ — интеграл вероятности.

Рассмотрим частный случай, когда сигналы в (1) ортогональны. При этом $\rho_{\nu_0, \nu_0+1} = 0$, а укороченная вероятность ошибки (16) примет вид

$$p_{t0} = 1 - \tilde{\Phi}(z_{\nu_0}/2) \tilde{\Phi}(z_{\nu_0+1}/2). \quad (18)$$

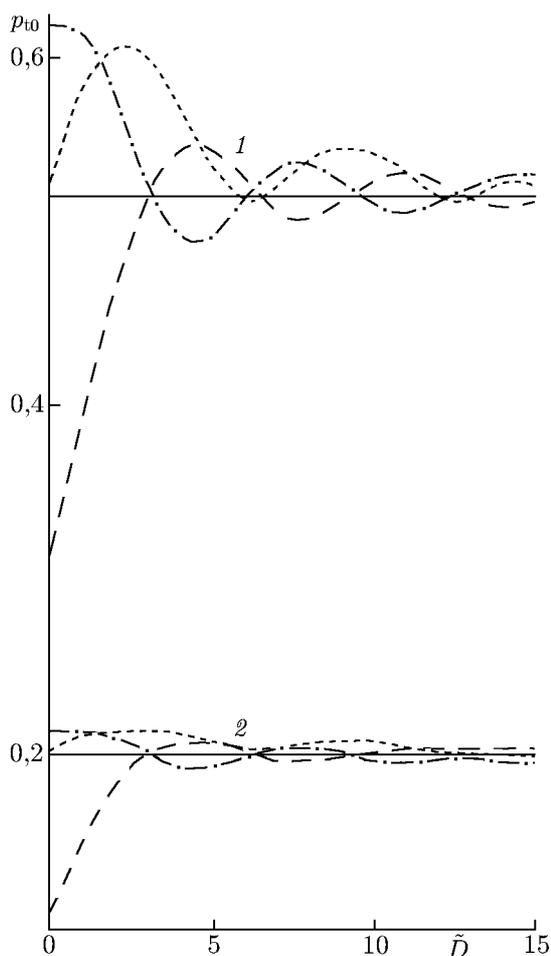


Рис. 1. Вероятность ошибки при известных амплитудах и фазах

функции множества $\{f_i(t)\}_{i=1}^{\nu_{\max}}$ тождественно равны единице на интервале $T_1 \leq t \leq T_2$, а $\Psi_i(t) = 0$. Тогда радиосигналы в (1) представляют собой отрезки гармонических колебаний. Положим также, что для любого $1 \leq k \leq \nu_{\max}$ выполняется равенство $\omega_k = k\omega$, где ω — вещественное число. Если сигналы в (1) удовлетворяют условию (6) узкой полосы, то выражение (10) для коэффициента корреляции между i -м и j -м сигналами ($i \neq j$) запишется как

$$\rho_{ij} = \frac{\sin[2\pi(i-j)\tilde{D}]}{2\pi(i-j)\tilde{D}} \cos(\varphi_i - \varphi_j) + \frac{\sin^2[2\pi(i-j)\tilde{D}]}{\pi(i-j)\tilde{D}} \sin(\varphi_i - \varphi_j),$$

где $\tilde{D} = \omega T / (2\pi)$. На рис. 1 приведены теоретические зависимости укороченной вероятности ошибки (16) от \tilde{D} . При этом рассмотрен случай синфазных сигналов ($\varphi_{i+1} - \varphi_i = 0$, штрихпунктирные линии), случай квадратурных сигналов ($\varphi_{i+1} - \varphi_i = \pi/2$, пунктирные линии) и случай противофазных сигналов ($\varphi_{i+1} - \varphi_i = \pi$, штриховые линии). Кроме того, на рис. 1 сплошными линиями представлена укороченная вероятность ошибки для алгоритма оценки числа сигналов (8) в случае, когда сигналы ортогональны (18). Группа кривых 1 соответствует отношению сигнал/шум $z_{\nu_0} = z_{\nu_0+1} = 1$, группа кривых 2 соответствует отношению сигнал/шум $z_{\nu_0} = z_{\nu_0+1} = 2,5$. Из рис. 1 видно, что во всех трёх рассмотренных случаях с ростом величины \tilde{D} укороченная

Если положить $z_{\nu_0+1}^2 = z_{\nu_0}^2 = z^2$, то при достаточно большом значении z^2 вместо (18) можно пользоваться асимптотической формулой

$$p_{t0} \approx \frac{2}{z} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{8}\right). \tag{19}$$

Теперь исследуем ситуацию, когда $\rho_{\nu_0, \nu_0+1} \rightarrow 1$, т. е. сигналы $s_{\nu_0}(t)$ и $s_{\nu_0+1}(t)$ совпадают. Тогда формула (16) запишется как

$$\begin{aligned} p_{t0} &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-z_{\nu_0+1}/2}^{z_{\nu_0+1}/2} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy = \\ &= 2 - \tilde{\Phi}\left(\frac{z_{\nu_0+1}}{2}\right) - \tilde{\Phi}\left(\frac{z_{\nu_0}}{2}\right). \end{aligned} \tag{20}$$

Если положить $z_{\nu_0+1}^2 = z_{\nu_0}^2 = z^2$ и считать, что значение z^2 достаточно велико, то для вероятности (20) получаем асимптотическое выражение (19). Следовательно, при достаточно большом отношении сигнал/шум z^2 укороченные вероятности ошибки для случаев $\rho_{\nu_0, \nu_0+1} \rightarrow 0$ и $\rho_{\nu_0, \nu_0+1} \rightarrow 1$ совпадают. Последний результат объясняется тем, что в случае, когда амплитуды и фазы сигналов известны и отношение сигнал/шум достаточно велико, ситуации с разным числом сигналов (даже одинаковых по форме) будут существенно отличаться с энергетической точки зрения.

Рассмотрим частный случай, когда все функции

вероятность ошибки оценки числа сигналов (17) стремится к укороченной вероятности ошибки для ортогональных сигналов (18). При этом отличие начальных фаз радиосигналов не оказывает значительного влияния на величину вероятности ошибки при $\tilde{D} > 4$.

2. СВОЙСТВА ЛОГАРИФМА ФУНКЦИОНАЛА ОТНОШЕНИЯ ПРАВДОПОДОБИЯ

Теперь рассмотрим случай, когда амплитуды и фазы принимаемых сигналов априори не известны. Обозначим

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} G_{cij} \\ G_{sij} \end{pmatrix} &= \int_{T_1}^{T_2} f_i(t) f_j(t) \begin{pmatrix} \cos[\omega_i t + \Psi_i(t)] \cos[\omega_j t + \Psi_j(t)] \\ \sin[\omega_i t + \Psi_i(t)] \sin[\omega_j t + \Psi_j(t)] \end{pmatrix} dt, \\ \begin{pmatrix} G_{scij} \\ G_{csij} \end{pmatrix} &= \int_{T_1}^{T_2} f_i(t) f_j(t) \begin{pmatrix} \sin[\omega_i t + \Psi_i(t)] \cos[\omega_j t + \Psi_j(t)] \\ \cos[\omega_i t + \Psi_i(t)] \sin[\omega_j t + \Psi_j(t)] \end{pmatrix} dt, \\ X_{ci} &= \int_{T_1}^{T_2} x(t) f_i(t) \cos[\omega_i t + \Psi_i(t)] dt, & X_{si} &= \int_{T_1}^{T_2} x(t) f_i(t) \sin[\omega_i t + \Psi_i(t)] dt, \\ A_{ci} &= a_i \cos \varphi_i, & A_{si} &= a_i \sin \varphi_i. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь A_{ci} , A_{si} — квадратуры сигнала: $i = 1, \dots, \nu$; $j = 1, \dots, \nu$. Величины (21), (22) являются элементами матриц $\mathbf{G}_{c\nu}$, $\mathbf{G}_{s\nu}$, $\mathbf{G}_{cs\nu}$, $\mathbf{G}_{sc\nu}$ и векторов $\mathbf{X}_{c\nu}$, $\mathbf{X}_{s\nu}$, $\mathbf{A}_{c\nu}$, $\mathbf{A}_{s\nu}$ соответственно. При этом для узкополосных радиосигналов (6) для элементов (21) справедливы соотношения

$$G_{cij} = G_{sij} = V_{cij}, \quad G_{scij} = G_{csij} = V_{sij}. \quad (22)$$

Перепишем логарифм функционала отношения правдоподобия (4), используя введённые обозначения:

$$\begin{aligned} L(\nu, \mathbf{A}_{c\nu}, \mathbf{A}_{s\nu}) &= \frac{2}{N_0} (\mathbf{A}_{c\nu}^+ \mathbf{X}_{c\nu} + \mathbf{A}_{s\nu}^+ \mathbf{X}_{s\nu}) - \\ &- \frac{1}{N_0} (\mathbf{A}_{c\nu}^+ \mathbf{G}_{c\nu} \mathbf{A}_{c\nu} + \mathbf{A}_{s\nu}^+ \mathbf{G}_{s\nu} \mathbf{A}_{s\nu} + \mathbf{A}_{c\nu}^+ \mathbf{G}_{cs\nu} \mathbf{A}_{s\nu} + \mathbf{A}_{s\nu}^+ \mathbf{G}_{sc\nu} \mathbf{A}_{c\nu}). \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь верхний индекс «+» обозначает транспонирование. Обозначим

$$\mathbf{A}_{q\nu} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{c\nu} \\ \mathbf{A}_{s\nu} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_{\nu} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{c\nu} \\ \mathbf{X}_{s\nu} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_{\nu} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{c\nu} & \mathbf{G}_{cs\nu} \\ \mathbf{G}_{sc\nu} & \mathbf{G}_{s\nu} \end{pmatrix},$$

в итоге логарифм функционала отношения правдоподобия (24) примет вид

$$L(\nu, \mathbf{A}_{q\nu}) = \frac{2}{N_0} \mathbf{A}_{q\nu}^+ \mathbf{X}_{\nu} - \frac{1}{N_0} \mathbf{A}_{q\nu}^+ \mathbf{G}_{\nu} \mathbf{A}_{q\nu}. \quad (25)$$

Используя (25), найдём максимально правдоподобную оценку вектора квадратур сигналов для произвольного значения параметра ν

$$\hat{\mathbf{A}}_{q\nu} = \mathbf{G}_{\nu}^{-1} \mathbf{X}_{\nu}.$$

Подставляя вектор $\hat{\mathbf{A}}_{qv}$ в формулу (25), получим выражение для максимизированного по неизвестным квадратурам сигналов логарифма функционала отношения правдоподобия

$$L_m(\nu) = \frac{1}{N_0} \mathbf{X}_\nu^+ \mathbf{G}_\nu^{-1} \mathbf{X}_\nu = \frac{1}{N_0} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{c\nu} \\ \mathbf{X}_{s\nu} \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{c\nu} & \mathbf{G}_{cs\nu} \\ \mathbf{G}_{sc\nu} & \mathbf{G}_{s\nu} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{c\nu} \\ \mathbf{X}_{s\nu} \end{pmatrix}. \quad (26)$$

С учётом соотношений (23) выражение (26) для узкополосных радиосигналов может быть записано как

$$L_m(\nu) = \frac{1}{N_0} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{c\nu} \\ \mathbf{X}_{s\nu} \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{c\nu} & \mathbf{V}_{s\nu}^+ \\ \mathbf{V}_{s\nu} & \mathbf{V}_{c\nu} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{c\nu} \\ \mathbf{X}_{s\nu} \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{V}_{c\nu}$ и $\mathbf{V}_{s\nu}$ — матрицы из элементов V_{cij} и V_{sij} соответственно.

В итоге алгоритм максимально правдоподобной оценки числа радиосигналов с неизвестными амплитудами и фазами примет вид

$$\hat{\nu}: L_m(\hat{\nu}) = \sup_{\nu} L_m(\nu), \quad \nu = 1, \dots, \nu_{\max}. \quad (27)$$

Далее будет показано (см. формулу (44)), что функция (26) не убывает с ростом числа сигналов ν , так что непосредственное применение метода максимального правдоподобия для оценки числа радиосигналов с неизвестными амплитудами и фазами невозможно. Поэтому вместо алгоритма максимального правдоподобия (27) будем использовать его модификации. К ним можно отнести следующие алгоритмы:

1) Алгоритм с линейной штрафной функцией:

$$L_D(\nu; \mathbf{X}_\nu, \kappa) = L_m(\nu) - \kappa\nu, \quad \kappa > 0; \quad \hat{\nu}: L_D(\hat{\nu}; \mathbf{X}_\nu, \kappa) = \sup_{\nu} L_D(\nu; \mathbf{X}_\nu, \kappa), \quad \nu = 1, \dots, \nu_{\max}. \quad (28)$$

Частным случаем алгоритма (28), при $\kappa = 2$, является алгоритм оценки числа сигналов по критерию АИС [7].

2) Алгоритм со случайной штрафной функцией [2]:

$$L_{D1}(\nu; \mathbf{X}_\nu, \kappa_1) = L_m(\nu) - \kappa_1 \nu \max_i \left[\frac{1}{N_0} \left(\frac{X_{ci}^2}{G_{cii}} + \frac{X_{si}^2}{G_{sii}} \right) \right], \quad \kappa_1 > 0, \quad 1 \leq i \leq \nu_{\max};$$

$$\hat{\nu}: L_{D1}(\hat{\nu}; \mathbf{X}_\nu, \kappa_1) = \sup_{\nu} L_{D1}(\nu; \mathbf{X}_\nu, \kappa_1), \quad \nu = 1, \dots, \nu_{\max}. \quad (29)$$

3) Алгоритм с инвариантной случайной штрафной функцией, предлагаемый в данной работе:

$$L_{D2}(\nu; \mathbf{X}_\nu, \kappa_2) = L_m(\nu) - \kappa_2 \nu \max_i [L_m(i) - L_m(i-1)], \quad \kappa_2 > 0, \quad 1 \leq i \leq \nu_{\max};$$

$$\hat{\nu}: L_{D2}(\hat{\nu}) = \sup_{\nu} L_{D2}(\nu), \quad \nu = 1, \dots, \nu_{\max}. \quad (30)$$

В случае, когда сигналы ортогональны, алгоритм (30) сводится к алгоритму со случайной штрафной функцией (29).

4) Алгоритм с обратной штрафной функцией, предлагаемый в данной работе:

$$L_B(\nu; \mathbf{X}_\nu, n) = \frac{L_m^n(\nu)}{\nu}, \quad n > 1;$$

$$\hat{\nu}: L_B(\hat{\nu}; \mathbf{X}_\nu, n) = \sup_{\nu} L_B(\nu; \mathbf{X}_\nu, n), \quad \nu = 1, \dots, \nu_{\max}. \quad (31)$$

Отметим, что все приведённые выше алгоритмы зависят от некоторых параметров κ , κ_1 , κ_2 и n , которым необходимо придать конкретные численные значения при использовании алгоритмов на практике. В дальнейшем, при анализе алгоритмов (28)–(31), будут найдены их укороченные вероятности ошибки (аналитически и с помощью статистического моделирования). Исследование укороченных вероятностей ошибок как функций от параметров κ , κ_1 , κ_2 , n позволяет определить оптимальные значения этих параметров в смысле минимума укороченной вероятности ошибки. Однако ясно, что алгоритм (31) будет состоятелен при любых значениях параметра $n > 1$, в то же время алгоритмы (28)–(30) могут оказаться несостоятельными при определённых значениях параметров κ , κ_1 и κ_2 соответственно.

Для анализа алгоритмов (28)–(31) в терминах укороченной вероятности ошибки представим логарифм функционала отношения правдоподобия (26) в виде

$$L_m(\nu) = \frac{\mathbf{X}_\nu^+ \mathbf{G}_\nu^{-1} \mathbf{X}_\nu}{N_0} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\nu} (l_{ci}^2 + l_{si}^2), \quad (32)$$

где

$$l_{si}^2 = \frac{2}{N_0} \left[\begin{pmatrix} \mathbf{X}_{ci} \\ \mathbf{X}_{si} \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{ci} & \mathbf{G}_{csi} \\ \mathbf{G}_{scsi} & \mathbf{G}_{si} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{ci} \\ \mathbf{X}_{si} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{ci} \\ \mathbf{X}_{s(i-1)} \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{ci} & \mathbf{G}_{csi(i-1)} \\ \mathbf{G}_{sc(i-1)i} & \mathbf{G}_{s(i-1)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{ci} \\ \mathbf{X}_{s(i-1)} \end{pmatrix} \right],$$

$$l_{ci}^2 = \frac{2}{N_0} \left[\begin{pmatrix} \mathbf{X}_{ci} \\ \mathbf{X}_{s(i-1)} \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{ci} & \mathbf{G}_{csi(i-1)} \\ \mathbf{G}_{sc(i-1)i} & \mathbf{G}_{s(i-1)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{ci} \\ \mathbf{X}_{s(i-1)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{c(i-1)} \\ \mathbf{X}_{s(i-1)} \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{c(i-1)} & \mathbf{G}_{cs(i-1)} \\ \mathbf{G}_{sc(i-1)} & \mathbf{G}_{s(i-1)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{c(i-1)} \\ \mathbf{X}_{s(i-1)} \end{pmatrix} \right],$$

элементами матрицы $\mathbf{G}_{csi(i-1)}$ являются величины G_{csmk} , $m = 1, \dots, i$, $k = 1, \dots, i-1$, матрицы $\mathbf{G}_{cs(i-1)i}$ — величины G_{csmk} , $m = 1, \dots, i-1$, $k = 1, \dots, i$, аналогично заданы матрицы $\mathbf{G}_{sc(i-1)}$ и $\mathbf{G}_{sc(i-1)i}$.

С целью исследования свойств случайных величин $\{l_{ci}\}_{i=1}^{\nu_{\max}}$ и $\{l_{si}\}_{i=1}^{\nu_{\max}}$ сформулируем и докажем следующее утверждение. Пусть $\{A_i\}_{i=1}^N$ — множество случайных величин с конечными вторыми моментами. Введём в рассмотрение векторы \mathbf{A}_n и матрицы \mathbf{C}_n с элементами A_i и C_{ij} соответственно, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$, где $C_{ij} = \text{cov}(A_i, A_j) = \langle (A_i - \langle A_i \rangle)(A_j - \langle A_j \rangle) \rangle$ — корреляционный момент [11] (или ковариация) случайных величин A_i и A_j , $n = 1, \dots, N$. Кроме этого, определим случайную функцию $r(n)$ натурального переменного n и случайные величины $\{B_n\}_{n=1}^N$ следующим образом:

$$r(n) = \mathbf{A}_n^+ \mathbf{C}_n^{-1} \mathbf{A}_n, \quad (33)$$

$$B_n^2 = \begin{cases} r(1), & n = 1, \\ r(n) - r(n-1), & n \geq 2. \end{cases} \quad (34)$$

Теперь сформулируем утверждение 1: случайные величины $\{B_n\}_{n=1}^N$, удовлетворяющие выражению (33), попарно некоррелированы и имеют единичную дисперсию.

Докажем утверждение 1. При $n = 1$ случайная величина B_1 определяется выражением $B_1^2 = A_1^2/C_{11}$. Рассмотрим подробнее случай $n > 1$. Используя вектор \mathbf{g}_n с элементами C_{in} , $i = 1, \dots, n-1$, перепишем (33) в виде

$$r(n) - r(n-1) = \mathbf{A}_n^+ \mathbf{C}_n^{-1} \mathbf{A}_n - \mathbf{A}_{n-1}^+ \mathbf{C}_{n-1}^{-1} \mathbf{A}_{n-1} =$$

$$= \left[\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{n-1} \\ A_n \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{n-1} & \mathbf{g}_n \\ \mathbf{g}_n^+ & C_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{n-1} \\ A_n \end{pmatrix} - \mathbf{A}_{n-1}^+ \mathbf{C}_{n-1}^{-1} \mathbf{A}_{n-1} \right]. \quad (35)$$

Используя формулу Фробениуса [12], обратим блочную матрицу в (35):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C}_{n-1} & \mathbf{g}_n \\ \mathbf{g}_n^+ & C_{nn} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{n-1}^{-1} + \mathbf{C}_{n-1}^{-1} \mathbf{g}_n H^{-1} \mathbf{g}_n^+ \mathbf{C}_{n-1}^{-1} & -\mathbf{C}_{n-1}^{-1} \mathbf{g}_n H^{-1} \\ -H^{-1} \mathbf{g}_n^+ \mathbf{C}_{n-1}^{-1} & H^{-1} \end{pmatrix}, \quad (36)$$

где $H = C_{nn} - \mathbf{g}_n^+ \mathbf{C}_{n-1}^{-1} \mathbf{g}_n$ — дополнение Шура. В работе [13] показано, что если матрицы \mathbf{C}_n и \mathbf{C}_{n-1} невырождены, то $H \neq 0$. Кроме того, если матрица \mathbf{C}_{n-1} положительно определена, то $H^{-1} > 0$ [12]. Далее, выполняя тождественные преобразования в (35), с использованием равенства (36) получим

$$B_n^2 = r(n) - r(n-1) = (A_n - \mathbf{A}_{n-1}^+ \mathbf{C}_{n-1}^{-1} \mathbf{g}_n)^2 / H. \quad (37)$$

Тогда случайные величины $\{B_i\}_{i=1}^N$, удовлетворяющие формуле (37), запишутся в виде

$$B_n = \gamma_n (A_n - \mathbf{A}_{n-1}^+ \mathbf{C}_{n-1}^{-1} \mathbf{g}_n) / \sqrt{H}, \quad n > 1; \quad B_1 = \gamma_1 A_1 / \sqrt{C_{11}}, \quad (38)$$

где для любого $1 \leq n \leq N$ коэффициент $\gamma_n = 1$ или $\gamma_n = -1$.

Пусть $\beta = 1, \dots, N$, $\alpha = 1, \dots, N$, для определённости положим $\beta > \alpha$. Очевидно, что $\text{cov}(B_1, B_\beta) = 0$. Покажем, что B_α и B_β некоррелированы и в случае, когда $\beta > 1$ и $\alpha > 1$:

$$\begin{aligned} \text{cov}(A_\alpha - \mathbf{A}_{\alpha-1}^+ \mathbf{C}_{\alpha-1}^{-1} \mathbf{g}_\alpha, A_\beta - \mathbf{A}_{\beta-1}^+ \mathbf{C}_{\beta-1}^{-1} \mathbf{g}_\beta) &= \text{cov}(\mathbf{A}_{\alpha-1}^+ \mathbf{C}_{\alpha-1}^{-1} \mathbf{g}_\alpha, \mathbf{A}_{\beta-1}^+ \mathbf{C}_{\beta-1}^{-1} \mathbf{g}_\beta) - \\ &- \text{cov}(A_\alpha, \mathbf{A}_{\beta-1}^+ \mathbf{C}_{\beta-1}^{-1} \mathbf{g}_\beta) - \text{cov}(\mathbf{A}_{\alpha-1}^+ \mathbf{C}_{\alpha-1}^{-1} \mathbf{g}_\alpha, A_\beta) + \text{cov}(A_\alpha, A_\beta) = \\ &= \text{cov}(\mathbf{g}_{\alpha(\beta-1)}^+ \mathbf{C}_{(\alpha-1)(\beta-1)}^{-1} \mathbf{A}_{\beta-1}, \mathbf{g}_\beta^+ \mathbf{C}_{\beta-1}^{-1} \mathbf{A}_{\beta-1}) - \mathbf{g}_{\alpha(\beta-1)}^+ \mathbf{C}_{\beta-1}^{-1} \mathbf{g}_\beta - \mathbf{g}_\alpha^+ \mathbf{C}_{\alpha-1}^{-1} \mathbf{g}_{\beta(\alpha-1)} + C_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (39)$$

В формуле (39) учтено, что $\text{cov}(\mathbf{A}_n, \mathbf{A}_n) = \mathbf{C}_n$ и введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{\alpha(\beta-1)} &= (C_{\alpha 1}, \dots, C_{\alpha(\beta-1)}), \quad \mathbf{g}_{\beta(\alpha-1)} = (C_{1\beta}, \dots, C_{(\alpha-1)\beta}), \\ (\mathbf{C}_{(\alpha-1)(\beta-1)}^{-1})_{ij} &= \begin{cases} (\mathbf{C}_{\alpha-1}^{-1})_{ij}, & i \leq \alpha-1, \quad j \leq \alpha-1; \\ 0, & \alpha-1 < i \leq \beta-1, \quad \alpha-1 < j \leq \beta-1, \end{cases} \end{aligned} \quad (40)$$

где $i = 1, \dots, \beta-1$, $j = 1, \dots, \beta-1$.

Можно показать, что для любых детерминированных векторов $\tilde{\mathbf{Q}}, \tilde{\mathbf{U}}$ и случайного вектора \mathbf{Y} справедливо соотношение $\text{cov}(\tilde{\mathbf{Q}} + \mathbf{Y}, \tilde{\mathbf{U}} + \mathbf{Y}) = \tilde{\mathbf{Q}} + \mathbf{R}\tilde{\mathbf{U}}$, где $\mathbf{R} = \text{cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{Y})$ — матрица корреляционных моментов (матрица ковариаций) вектора \mathbf{Y} . Вычисляя ковариацию (39) с помощью этого соотношения при учёте обозначений (40) получаем

$$\begin{aligned} \text{cov}(\mathbf{g}_{\alpha(\beta-1)}^+ \mathbf{C}_{(\alpha-1)(\beta-1)}^{-1} \mathbf{A}_{\beta-1}, \mathbf{g}_\beta^+ \mathbf{C}_{\beta-1}^{-1} \mathbf{A}_{\beta-1}) - \mathbf{g}_{\alpha(\beta-1)}^+ \mathbf{C}_{\beta-1}^{-1} \mathbf{g}_\beta - \mathbf{g}_\alpha^+ \mathbf{C}_{\alpha-1}^{-1} \mathbf{g}_{\beta(\alpha-1)} + C_{\alpha\beta} &= \\ = \mathbf{g}_\alpha^+ \mathbf{C}_{\alpha-1}^{-1} \mathbf{g}_{\beta(\alpha-1)} - \mathbf{g}_\alpha^+ \mathbf{C}_{\alpha-1}^{-1} \mathbf{g}_{\beta(\alpha-1)} - \mathbf{g}_{\alpha(\beta-1)}^+ \mathbf{C}_{\beta-1}^{-1} \mathbf{g}_\beta + C_{\alpha\beta} &= \\ = C_{\alpha\beta} - \mathbf{g}_{\alpha(\beta-1)}^+ \mathbf{C}_{\beta-1}^{-1} \mathbf{g}_\beta = C_{\alpha\beta} - C_{\alpha\beta} = 0. \end{aligned} \quad (41)$$

Из выражения (41) следует, что случайные величины B_α и B_β некоррелированы для любых $\beta \neq \alpha$. Таким образом, случайные величины $\{B_i\}_{i=1}^N$, удовлетворяющие выражению (33), попарно некоррелированы.

Обозначим дисперсию случайной величины B_n как $D(B_n) = \text{cov}(B_n, B_n)$. Очевидно, что $D(B_1) = 1$, и при $n > 1$ имеем

$$D(B_n) = D\left[\gamma_n (A_n - \mathbf{A}_{n-1}^+ \mathbf{C}_{n-1}^{-1} \mathbf{g}_n) / \sqrt{H}\right] = \\ = [D(\mathbf{A}_{n-1}^+ \mathbf{C}_{n-1}^{-1} \mathbf{g}_n) + D(A_n) - 2 \text{cov}(\mathbf{A}_{n-1}^+ \mathbf{C}_{n-1}^{-1} \mathbf{g}_n, A_n)] / H = 1.$$

Таким образом, случайные величины из множества $\{B_n\}_{n=1}^N$ обладают единичной дисперсией.

Заметим, что в утверждении 1 и его доказательстве можно интерпретировать случайные величины A_n как векторы в линейном векторном пространстве, а ковариацию — как скалярное произведение векторов в этом пространстве. Действительно, свойства ковариации случайных величин, использованные в доказательстве утверждения 1, также справедливы и для скалярного произведения векторов. В такой интерпретации векторы B_n (34) задают процедуру ортогонализации для векторов A_n , аналогичную процедуре Грама—Шмидта.

Пусть \mathbf{U} — обратимая матрица с размерностью $N \times N$, \mathbf{E} — вектор-столбец с размерностью N . Предположим, что матрица \mathbf{W} и вектор \mathbf{R} получены из матрицы \mathbf{U} и вектора \mathbf{E} следующим образом:

$$W_{ij} = \begin{cases} U_{gj}, & i = q; \\ U_{qj}, & i = g; \\ U_{ig}, & j = q; \\ U_{iq}, & j = g; \\ U_{ij}, & i \neq g \wedge i \neq q \wedge j \neq g \wedge j \neq q, \end{cases} \quad R_i = \begin{cases} E_g, & i = q; \\ E_q, & i = g; \\ E_i, & i \neq g \wedge i \neq q. \end{cases}$$

Тогда можно показать, что матрица \mathbf{W} обратима и имеет место равенство

$$\mathbf{E}^+ \mathbf{U}^{-1} \mathbf{E} = \mathbf{R}^+ \mathbf{W}^{-1} \mathbf{R}. \quad (42)$$

Последовательно переставляя строки и столбцы в матрице \mathbf{G}_ν^{-1} в выражении (25), а также элементы вектора \mathbf{X}_ν в (25) и используя формулу (42), получаем соотношения

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}_{ci} \\ \mathbf{X}_{si} \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{ci} & \mathbf{G}_{csi} \\ \mathbf{G}_{sci} & \mathbf{G}_{si} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{ci} \\ \mathbf{X}_{si} \end{pmatrix} = \mathbf{Y}_i^+ \mathbf{F}_i^{-1} \mathbf{Y}_i, \\ \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{ci} \\ \mathbf{X}_{s(i-1)} \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{ci} & \mathbf{G}_{csi(i-1)} \\ \mathbf{G}_{sc(i-1)i} & \mathbf{G}_{s(i-1)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{ci} \\ \mathbf{X}_{s(i-1)} \end{pmatrix} = \mathbf{Y}_{i-1}^+ \mathbf{F}_{i-1}^{-1} \mathbf{Y}_{i-1}, \\ \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{c(i-1)} \\ \mathbf{X}_{s(i-1)} \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{c(i-1)} & \mathbf{G}_{cs(i-1)} \\ \mathbf{G}_{sc(i-1)} & \mathbf{G}_{s(i-1)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{c(i-1)} \\ \mathbf{X}_{s(i-1)} \end{pmatrix} = \mathbf{Y}_{i-2}^+ \mathbf{F}_{i-2}^{-1} \mathbf{Y}_{i-2}.$$

где $Y_k = X_{ck}$ для чётных индексов k и $Y_k = X_{sk}$ для нечётных k , $\mathbf{Y}_i = (Y_1, \dots, Y_i)$, $\mathbf{F}_i = \text{cov}(\mathbf{Y}_i, \mathbf{Y}_i)$. Отсюда следует, что величины l_{si}^2, l_{ci}^2 ($i = 1, \dots, \nu_{\max}$) можно представить в виде

$$l_{si}^2 = \mathbf{Y}_i^+ \mathbf{F}_i^{-1} \mathbf{Y}_i - \mathbf{Y}_{i-1}^+ \mathbf{F}_{i-1}^{-1} \mathbf{Y}_{i-1}, \quad l_{ci}^2 = \mathbf{Y}_{i-1}^+ \mathbf{F}_{i-1}^{-1} \mathbf{Y}_{i-1} - \mathbf{Y}_{i-2}^+ \mathbf{F}_{i-2}^{-1} \mathbf{Y}_{i-2}. \quad (43)$$

В утверждении 1 было показано, что случайные величины B_i^2 являются квадратами гауссовских случайных величин B_i . Аналогичным образом можно показать, используя формулы (43), что случайные величины l_{ci}^2 и l_{si}^2 также являются квадратами гауссовских случайных величин l_{ci} и l_{si} соответственно. Укажем свойства гауссовских случайных величин из множеств $\{l_{ci}\}_{i=1}^{\nu_{\max}}$ и $\{l_{si}\}_{i=1}^{\nu_{\max}}$.

Утверждение 2. Гауссовские случайные величины из множества $\{l_{ci}\}_{i=1}^{\nu_{\max}} \cup \{l_{si}\}_{i=1}^{\nu_{\max}}$ независимы в совокупности, имеют дисперсии равные единице, и, кроме того, математические ожидания случайных величин из множества $\{l_{ci}\}_{i=\nu_0+1}^{\nu_{\max}} \cup \{l_{si}\}_{i=\nu_0+1}^{\nu_{\max}}$ равны нулю.

Доказательство утверждения 2 сразу следует из утверждения 1 и формул (43).

3. ХАРАКТЕРИСТИКИ ОЦЕНОК ЧИСЛА РАДИОСИГНАЛОВ С НЕИЗВЕСТНЫМИ АМПЛИТУДАМИ И ФАЗАМИ

Проведём анализ алгоритмов (28)–(31) в терминах укороченной вероятности ошибки. Для этого подставим в выражение для модифицированного максимизированного логарифма функционала отношения правдоподобия (27) явный вид реализации принимаемых данных (2). Исходя из формулы (32) и утверждения 1, выражение для максимизированного логарифма функционала отношения правдоподобия (26) можно переписать как

$$L_m(\nu) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\nu} Q_i, \quad (44)$$

где

$$Q_i = \begin{cases} (d_{ci} + \xi_{ci})^2 + (d_{si} + \xi_{si})^2, & i \leq \nu_0; \\ \xi_{ci}^2 + \xi_{si}^2, & i > \nu_0, \end{cases}$$

$i = 1, \dots, \nu_{\max}$; d_{ci} , d_{si} — математические ожидания случайных величин l_{ci} и l_{si} , а ξ_{ci} и ξ_{si} — независимые в совокупности гауссовские случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями. Из выражения (44) следует, что логарифм функционала отношения правдоподобия (26) является неубывающей функцией числа сигналов. Кроме того, можно показать, что для любого $i \leq \nu_0$ величина $d_i^2 = d_{ci}^2 + d_{si}^2$ монотонно возрастает с ростом отношения сигнал/шум z_i^2 .

С помощью формулы (44) модифицированный максимизированный логарифм функционала отношения правдоподобия с линейной штрафной функцией (28) можно переписать в виде

$$L_D(\nu; \mathbf{X}_\nu, \kappa) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\nu} Q_i - \kappa\nu. \quad (45)$$

Теперь, используя выражение (45), можно вычислить укороченную вероятность ошибки (13) для алгоритма с линейной штрафной функцией (28)

$$p_{t1} = 1 - p(Q_{\nu_0} > 2\kappa, Q_{\nu_0+1} < 2\kappa) = 1 - F_{\nu_0+1}(2\kappa) + F_{\nu_0}(2\kappa)F_{\nu_0+1}(2\kappa). \quad (46)$$

Здесь $F_{\nu_0}(x)$ — функция нецентрального χ^2 -распределения с двумя степенями свободы и параметром нецентральности $d_{\nu_0}^2 = d_{c\nu_0}^2 + d_{s\nu_0}^2$, $F_{\nu_0+1}(x)$ — функция центрального χ^2 -распределения с двумя степенями свободы. Учитывая свойства функции $F_{\nu_0}(x)$, можно показать, что при неограниченном увеличении параметра $d_{\nu_0}^2$ укороченная вероятность ошибки запишется как

$$p_{t1} \rightarrow 1 - F_{\nu_0+1}(2\kappa). \quad (47)$$

Получаем, что укороченная вероятность ошибки стремится к постоянной величине с ростом параметра $d_{\nu_0}^2$. Предельное значение вероятности ошибки (47) можно использовать для приближённого выбора коэффициента κ в (28). Действительно, можно рекомендовать выбор κ по значению допустимой вероятности ошибки p_{t1} .

Как было отмечено выше, укороченная вероятность ошибки является нижней границей полной вероятности ошибки. Поэтому из формул (44) и (47) следует, что с ростом величины $d_{\nu_0}^2$, а значит, и отношения сигнал/шум $z_{\nu_0}^2$ полная вероятность ошибки не стремится к нулю. Это свойство является серьёзным недостатком алгоритма (28).

К сожалению, найти аналитически даже укороченную вероятность ошибки для алгоритма (29) в общем случае затруднительно. Рассчитать эту вероятность можно, когда радиосигналы

ортогональны, т. е. алгоритмы (29) и (30) совпадают. При оценке числа коррелированных радиосигналов вероятность ошибки для алгоритма (29) можно получить с помощью статистического моделирования.

Теперь проанализируем алгоритм с инвариантной случайной штрафной функцией (30). Для этого снова воспользуемся формулой (44), чтобы представить модифицированный максимизированный логарифм функционала отношения правдоподобия с инвариантной случайной штрафной функцией (30) в виде

$$L_{D2}(\nu; \mathbf{X}_\nu, \kappa_2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\nu} Q_i - \frac{1}{2} \kappa_2 \nu \max_i Q_i, \quad i = 1, \dots, \nu_{\max}. \quad (48)$$

Вычислим укороченную вероятность ошибки (13)

$$p_{t2} = 1 - p(Q_{\nu_0} > \kappa_2 \max_i Q_i, Q_{\nu_0+1} < \kappa_2 \max_i Q_i), \quad i = 1, \dots, \nu_{\max}. \quad (49)$$

Для дальнейшего вычисления вероятности p_{t2} сформулируем вспомогательное утверждение.

Пусть $\{\tilde{A}_i\}_{i=1}^M$ — множество попарно независимых случайных величин; $k = 1, \dots, M$; $0 \leq h \leq 1$; $\tilde{B} = \max_i \tilde{A}_i$, $i = 1, \dots, M$, $i \neq k$, $i \neq k+1$, тогда

$$p(\tilde{A}_k > h \max_{i=1, \dots, M} \tilde{A}_i, \tilde{A}_{k+1} < h \max_{i=1, \dots, M} \tilde{A}_i) = p(\tilde{A}_k > h \tilde{A}_{k+1}, \tilde{A}_k > h \tilde{B}) - \\ - p(\tilde{A}_k > \tilde{A}_{k+1}, \tilde{A}_{k+1} > h \tilde{A}_k, \tilde{A}_{k+1} > h \tilde{B}) - p(\tilde{A}_{k+1} > \tilde{A}_k, \tilde{A}_k > h \tilde{A}_{k+1}, \tilde{A}_k > h \tilde{B}). \quad (50)$$

Используя (49) и (50), можно записать окончательную формулу для укороченной вероятности ошибки алгоритма с инвариантной штрафной функцией (30):

$$p_{t2} = 1 - \int_0^\infty W_{\nu_0}(x) F_{\nu_0+1}\left(\frac{x}{\kappa_2}\right) F_{Q_{\max}}\left(\frac{x}{\kappa_2}\right) dx + \int_0^\infty W_{\nu_0+1}(x) F_{Q_{\max}}\left(\frac{x}{\kappa_2}\right) \times \\ \times \left[F_{\nu_0}\left(\frac{x}{\kappa_2}\right) - F_{\nu_0}(x) \right] dx + \int_0^\infty W_{\nu_0}(x) F_{Q_{\max}}\left(\frac{x}{\kappa_2}\right) \left[F_{\nu_0+1}\left(\frac{x}{\kappa_2}\right) - F_{\nu_0+1}(x) \right] dx. \quad (51)$$

Здесь $W_i(x)$, $F_i(x)$ — плотность вероятности и функция распределения случайной величины Q_i , а $W_{Q_{\max}}(x)$, $F_{Q_{\max}}(x)$ — плотности вероятности и функции распределения случайной величины $Q_{\max} = \max_i Q_i$, $i = 1, \dots, \nu_{\max}$, $i \neq \nu_0$, $i \neq \nu_0 + 1$.

Функцию распределения $F_{Q_{\max}}(x)$ представим в виде

$$F_{Q_{\max}}(x) = \prod_{\substack{i=1, \\ i \neq \nu_0, i \neq \nu_0+1}}^{\nu_{\max}} F_i(x).$$

Здесь и далее при $i \leq \nu_0$ зависимости $W_i(x)$ и $F_i(x)$ — плотность вероятности и функция распределения нецентрального χ^2 -распределения с параметром нецентральности $d_i^2 = d_{c_i}^2 + d_{s_i}^2$ и двумя степенями свободы соответственно [14], а при $i > \nu_0$ плотность вероятности и функция распределения центрального χ^2 -распределения с двумя степенями свободы соответственно [14].

Опять применяя формулу (44), перепишем модифицированный максимизированный логарифм функционала отношения правдоподобия с обратной штрафной функцией (31) в виде

$$L_B(\nu; \mathbf{X}_\nu, n) = \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\nu} Q_i \right)^n / \nu. \tag{52}$$

Используя выражение (52), можно вычислить укороченную вероятность ошибки (13) для алгоритма с обратной штрафной функцией

$$p_{t3} = 1 - \int_0^{\infty} W_{\nu_0+1}(y) \int_0^{\infty} W_{\nu_0}(x) [F_0(x/A^*) - F_0(y/B^* - x)] dx dy. \tag{53}$$

Здесь $F_0(x)$ — функция нецентрального χ^2 -распределения с параметром нецентральности $\sum_{i=1}^{\nu_0-1} (d_{ci}^2 + d_{si}^2)$ и $2(\nu_0 - 1)$ степенями свободы; как и выше, $W_{\nu_0}(x)$ — функция плотности вероятности нецентрального χ^2 -распределения с двумя степенями свободы и параметром нецентральности $d_i^2 = d_{ci}^2 + d_{si}^2$, $W_{\nu_0+1}(x)$ — функция плотности вероятности центрального χ^2 -распределения с двумя степенями свободы [14], $A^* = \sqrt{\nu_0/(\nu_0 - 1)} - 1$, $B^* = \sqrt{(\nu_0 + 1)/\nu_0} - 1$.

Исследуем зависимость укороченной вероятности ошибки алгоритмов (30) и (31) от отношения сигнал/шум. Для большей наглядности положим: $a_i = a_0$ для всех i ; $K_{ij} = E$, если $i = j$, и $K_{ij} = 0$, если $i \neq j$. Тогда для любого i величины d_{ci} , d_{si} являются функциями только отношения сигнал/шум $z = a_0 \sqrt{2E/N_0}$ и запишутся как

$$d_{ci} = d_{si} = z/\sqrt{2}. \tag{54}$$

Кроме того, в этом случае укороченная вероятность ошибки для алгоритма (29) совпадает с вероятностью (51).

Для исследования алгоритмов (30) и (31) были выполнены численные расчёты по полученным аналитическим формулам (51) и (53) и статистическое моделирование алгоритмов. По результатам численных расчётов с использованием формул (51) и (53) установлено, что укороченная вероятность ошибки алгоритмов (30) и (31) существенно зависит от параметров κ_2 и n соответственно. В связи с этим предлагается искать оптимальные в смысле минимума укороченной вероятности ошибки параметры исследуемых алгоритмов. Для этого достаточно подставить в формулы (51) и (53) значения d_{ν_0} и d_{ν_0-1} при любых конкретных значениях вектора отношения сигнал/шум $\mathbf{z}_{\nu_{\max}}$, а затем найти минимумы укороченных вероятностей ошибок (51) и (53) как функций от соответствующего параметра (κ_1 для вероятности p_{t2} и n для вероятности p_{t3}).

Данная процедура была проведена для описанного выше случая (54). После этого были найдены величины $\kappa_2^{\text{opt}} = 0,31$: $p_{t2}(\kappa_2^{\text{opt}}) = \inf p_{t2}(\kappa_2)$, и $n^{\text{opt}} = 2,5$: $p_{t3}(n^{\text{opt}}) = \inf p_{t3}(n)$. Эти значения были приняты в качестве параметров алгоритмов (30) и (31) при статистическом моделировании и численных расчётах. Необходимо отметить, что данная оптимизация имеет смысл, только если оптимальное значение параметра алгоритма слабо зависит от отношения сигнал/шум.

В ходе исследований выяснено, что оптимальные значения параметров κ_1 и κ_2 в алгоритмах (29) и (30) существенно зависят только от максимального возможного числа сигналов ν_{\max} (при условии ортогональности сигналов). В то же время оптимальные значения параметра n в (31) практически одинаковы для всех значений отношения сигнал/шум и $\nu_{\max} \leq 21$.

На рис. 2 приведены результаты вычисления укороченной вероятности ошибки алгоритмов (30) и (31) с использованием формул (51) и (53). Сплошной линией построена зависимость от

отношения сигнал/шум z вероятности ошибки определения числа радиосигналов ν_0 с известными амплитудами и фазами алгоритмом (8). Пунктирной линией построена теоретическая зависимость вероятности ошибки определения значения ν_0 алгоритмом (30) от отношения сигнал/шум (формула (51)). Штриховой линией построена теоретическая зависимость вероятности ошибки определения значения ν_0 алгоритмом (31) от отношения сигнал/шум (формула (53)). Квадратами и кружками показаны вероятности ошибки определения значения ν_0 алгоритмами (30) и (31), соответственно, от отношения сигнал/шум. Последние значения получены с помощью статистического моделирования. Алгоритм с линейной штрафной функцией (28) не представлен на рис. 2, поскольку для него оптимальное значение параметра κ существенно зависит от отношения сигнал/шум.

Из результатов расчётов, приведённых на рис. 2, видно, что найденные для укороченных вероятностей ошибок формулы удовлетворительно согласуются с данными статистического моделирования алгоритмов оценки числа сигналов.

Из рис. 2 также следует, что априорное незнание амплитуд и фаз принимаемых сигналов существенно сказывается на точности оценки их числа. Можно также отметить, что качество функционирования предложенных оптимизированных алгоритмов (30) и (31) практически одинаково.

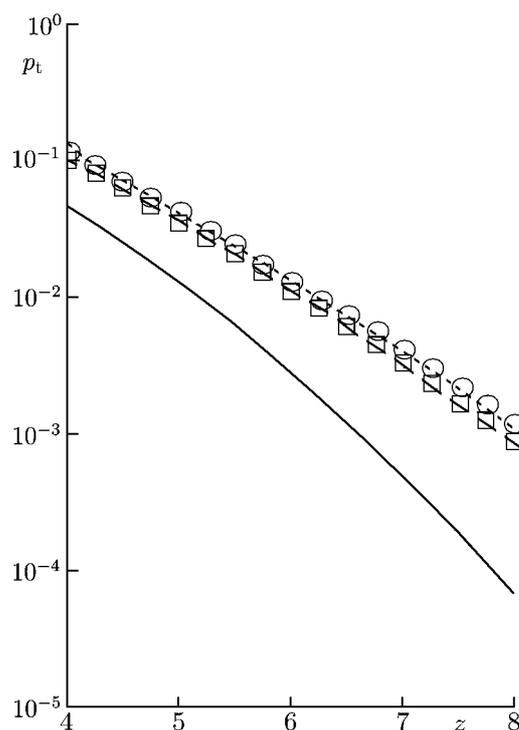


Рис. 2. Вероятность ошибки при априори неизвестных амплитудах и фазах

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенная укороченная вероятность ошибки оценки числа радиосигналов позволяет относительно просто количественно характеризовать эффективность различных алгоритмов оценки числа радиосигналов. Полученные результаты анализа нескольких алгоритмов оценки числа сигналов дают возможность сделать обоснованный выбор необходимого алгоритма оценки и оптимизировать его параметры. Результаты теоретических расчётов удовлетворительно согласуются с результатом статистического моделирования. Показано, что априорное незнание амплитуд и фаз принимаемых радиосигналов может существенно ухудшить качество функционирования алгоритмов оценки числа сигналов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 13-01-97504, 13-08-00735), Российского научного фонда (проект 14-49-00079) и Минобрнауки РФ (проект 978).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Волков Л. И., Немировский М. С., Шинаков Ю. С. Системы цифровой радиосвязи. М.: Эко-Трендз, 2005. 392 с.

2. Флакман А. Г. // Изв. вузов. Радиофизика. 2002. Т. 45, № 12. С. 1064.
3. Манелис В. Б. // Радиотехника. 2007. № 4. С. 16.
4. El-Behery I. N., Macphie R. H. // IEEE Trans. Antennas Propagat. 1978. V. 26, No. 2. P. 294.
5. Трифонов А. П., Шинаков Ю. С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. М.: Радио и связь, 1986. 264 с.
6. Ратынский М. В. Адаптация и сверхразрешение в антенных решётках. М.: Радио и связь, 2003. 200 с.
7. Kundu D. // J. Statist. Plann. Inference. 2000. V. 90, No. 1. P. 57.
8. Wax M., Kailath T. // IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process. 1985. V. 33, No. 2. P. 387.
9. Логинов А. А., Морозов О. А., Семёнова Ю. М. и др. // Изв. вузов. Радиофизика. 2013. Т. 56, № 7. С. 513.
10. Куликов Е. И., Трифонов А. П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. М.: Сов. радио, 1978. 296 с.
11. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. М.: Радио и связь, 1982. 624 с.
12. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988. 552 с.
13. Zhang F. The Schur complement and its applications. Springer, 2005. 295 p.
14. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.

Поступила в редакцию 25 марта 2014 г.; принята в печать 30 июня 2014 г.

ESTIMATION OF THE NUMBER OF RADIO SIGNALS WITH UNKNOWN AMPLITUDES AND PHASES

A. P. Trifonov and A. V. Kharin

Some algorithms for estimating the number of radio signals with known and unknown amplitudes and phases are synthesized and analyzed. Modified maximum-likelihood algorithms are used to obtain consistent algorithms for estimating the number of radio signals for the case of unknown amplitudes and phases. Efficiency of the estimation algorithms is quantitatively characterized by the abridged probability of the signal-number estimation error. The studied-algorithm parameters are optimized according to the analysis results.