

УДК 621.391.828

ЧАСТОТНО-ВРЕМЕННÓЕ РАЗРЕШЕНИЕ АВТОНОМНОГО И ВЗАИМНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ВИГНЕРА—ВИЛЯ

*Е. И. Шкелёв**

Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия

Оценивается точность измерения мгновенной частоты $\omega(t)$ посредством автономного и взаимного (т. е. с применением опорного сигнала) преобразований Вигнера—Виля. Показано, что оценка частоты $\omega(t)$ по автономному преобразованию Вигнера—Виля в большей степени зависит от характера нелинейности функции $\omega(t)$ и в меньшей степени от скорости её изменения во времени. Описан механизм увеличения частотно-временного разрешения взаимного преобразования Вигнера—Виля за счёт применения согласованного сигнала и рассмотрен способ измерения мгновенной частоты и фазы, основанный на выявлении характера модуляции реальной и мнимой частей распределения взаимной мощности $P_{\text{вз}}(t, \omega)$, определяемой опорным колебанием. Оценена устойчивость взаимного преобразования Вигнера—Виля по отношению к нормальному белому шуму.

ВВЕДЕНИЕ

Одним из средств представления сигналов в плоскости время—частота являются совместные время-частотные распределения $P(t, \omega)$, дающие возможность описания плотности энергии или интенсивности произвольного сигнала $s(t)$ одновременно во временнóй (t) и частотной (ω) областях. Предложено множество подходов и методов такого описания, и в каждом из них возникает вопрос, по каким параметрам и с какой точностью можно оценивать частотно-временнóе свойства сигналов.

К числу совместных время-частотных распределений относится рассматриваемое в данной статье распределение Вигнера—Виля

$$P(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t + \tau/2) s^*(t - \tau/2) \exp(-j\omega\tau) d\tau. \quad (1)$$

Преобразование Вигнера—Виля (1) концептуально связано с традиционным методом построения распределений по их характеристическим функциям. Для распределения Вигнера—Виля таковой является функция неопределённости Вудворда

$$R(\tau, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t + \tau/2) s^*(t - \tau/2) \exp(j\nu t) dt.$$

Поэтому в условиях априорной неопределённости распределение Вигнера—Виля обеспечивает наиболее высокое среди иных совместных распределений (в частности распределений класса Коэна [1]) разрешение Δt по времени и $\Delta\omega$ частоте. Это отмечается в большинстве посвящённых преобразованию Вигнера—Виля публикаций (см., например, [1–7]). Однако в них не полностью отражены факторы, влияющие на время-частотное разрешение. В частности, нет указаний на

* shkelev@rf.unn.ru

то, что преобразование Вигнера—Виля даёт наибольший эффект, когда применяется к сигналам с большой длительностью и непрерывным изменением частоты в широких пределах, т. е. к сигналам которые «удобно» описывать функциями

$$s(t) = U(t) \exp(j\phi t) \quad (2)$$

с амплитудами $U(t)$ и фазами $\phi(t)$ или представить в виде суммы

$$s(t) = \sum_{k=1}^n u_k(t) \quad (3)$$

из n подобных (2) составляющих $u_k(t)$ с амплитудами $U_k(t)$ и фазами $\phi_k(t)$.

Преобразование Вигнера—Виля билинейно, поэтому для многокомпонентных сигналов функция

$$P(t, \omega) = \sum_{k=1}^n P_{kk}(t, \omega) + \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^n P_{kl}(t, \omega) \quad (4)$$

содержит как автономные, $P_{kk}(t, \omega)$, так и взаимные, $P_{kl}(t, \omega)$ ($k \neq l$), члены

$$P_{kl}(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} s_k(t + \tau/2) s_l^*(t - \tau/2) \exp(-j\omega\tau) d\tau. \quad (5)$$

Наличие взаимных членов искажает и маскирует автономные распределения. Существуют различные способы уменьшения влияния взаимных членов на распределение $P(t, \omega)$ [1, 3–7]. Они основаны на включении в преобразование (1) различных фильтрующих ядер [1], что обусловило появление разного рода частных распределений со своим для каждого их них время-частотным разрешением. Однако применение фильтрации уменьшает свойственное автономным распределениям частотно-временное разрешение [8], а ожидаемый эффект может быть достигнут лишь после тщательного и индивидуального для каждого конкретного сигнала подбора способа фильтрации.

Вместе с тем спектрально-временные характеристики сигналов можно определить не только по автономным $P_{kk}(t)$, но и по взаимным составляющим $P_{kl}(t)$, если воспользоваться опорным сигналом $s_0(t) = A_0(t) \exp[j\phi_0(t)]$ ($\phi_0(t) = \int_0^t \omega_0(x) dx + \varphi_0$) с заданной амплитудой $A_0(t)$, частотой $\omega_0(t)$ и фазой φ_0 [9, 10]. С этих позиций в статье рассмотрены свойства взаимного преобразования Вигнера—Виля

$$P_{вз}(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t + \tau/2) s_0^*(t - \tau/2) \exp(-j\omega\tau) d\tau. \quad (6)$$

Для любого совместного распределения $P(t, \omega)$ важно, чтобы его «активные» области соответствовали реальному спектральному распределению сигнала, сгруппированному вблизи мгновенной частоты $\omega(t) = \phi'(t) = d\phi(t)/dt$. Степень этого соответствия зависит как от способа формирования время-частотного распределения, так и от вида сигнала $s(t)$. Локализация и изменение во времени «активных» областей время-частотного распределения находятся по локальному среднему

$$\langle \omega \rangle_t = \frac{1}{P_1(t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega P(t, \omega) d\omega, \quad (7)$$

где $P_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t, \omega) d\omega$. Получаемая таким образом оценка мгновенной частоты $\omega(t)$ адекватно отражает свойства сигнала, если $\langle \omega \rangle_t = \phi'(t)$. Однако распределение Вигнера—Виля из-за свойственной ему нелинейности требуемого соответствия локального среднего мгновенной частоте $\omega(t)$ в общем случае не обеспечивает, а оценка $\langle \omega \rangle_t$ всегда оказывается смещённой, если зависимость $\omega(t)$ отличается от линейной. Последнее обусловлено свойственными преобразованию Вигнера—Виля интерференционными эффектами и не нашло отражения в публикациях, посвящённых спектрально-временному анализу. Поэтому в данной статье рассмотрены свойства автономного распределения Вигнера—Виля и дана оценка расхождения между $\langle \omega \rangle_t$ и $\phi'(t)$.

Преобразование (1) нелокально, и наличие помех в сигнале $s(t)$ приводит к сильной зашумлённости первого. Значительно меньше помехи влияют на взаимное распределение Вигнера—Виля, т. к. их нет в опорном сигнале $s_0(t)$, а заложенный в (6) корреляционный механизм уменьшает действие помех, содержащихся в сигнале, особенно тогда, когда помехи представлены широкополосным шумом. В настоящей статье количественно оценена помехозащищённость взаимного преобразования Вигнера—Виля.

1. СВОЙСТВА АВТОНОМНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВИГНЕРА—ВИЛЯ

Как было отмечено, нелинейность преобразования Вигнера—Виля проявляется двояко: а) в виде взаимных членов $P_{kl}(t, \omega)$; б) в виде интерференционных эффектов, свойственных автономным распределениям $P_{kk}(t, \omega)$. Если мгновенная частота $\phi'(t)$ с достаточной точностью описывается автономными распределениями, то из рассмотрения можно исключить изменения амплитуды сигнала $s(t)$, приняв $U(t) = U = \text{const}$. В этом случае для сигнала (2) с фазой $\phi(t) = \omega_0 t + \varphi(t)$ распределение

$$P(t, \omega) = \frac{U^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{j[\omega_0 \tau + \varphi(t + \tau/2) - \varphi(t - \tau/2)]\} \exp(-j\omega \tau) d\tau. \quad (8)$$

Зависимость фазы φ от «сдвигового» времени τ различна при разных временах t . В частности, зависимость $\varphi(t + \tau/2)$ может быть чётной функцией τ , т. е. $\varphi(t + \tau/2) = \varphi(t - \tau/2)$. В таких случаях обусловленный угловой модуляцией набег фазы компенсируется, и распределение

$$P(t, \omega) = \frac{U^2}{2\pi} \int_{-T_w/2}^{T_w/2} \exp[-j(\omega - \omega_0)\tau] d\tau$$

реализует максимальное разрешение по частоте $\Delta\omega \sim 2\pi/T_w$, которое зависит только от ширины текущего (т. е. соответствующего времени t) окна T_w .

Вместе с тем, если частота ω меняется по линейному закону ($\omega(t) = \omega_0 + \beta t$), то это свойство распределения Вигнера—Виля распространяется на всё время \mathfrak{Z} существования сигнала, т. к. при линейной частотной модуляции функция

$$P(t, \omega) = \int_{-T_w/2}^{T_w/2} U(t + \tau/2)U(t - \tau/2) \exp[j(\omega_0 + \beta t - \omega)\tau] d\tau = P_U(t, \omega - \omega_0 - \beta t)$$

представляет собой смещённое на частоту $\omega_0 + \beta t$ распределение Вигнера—Виля $P_U(t, \omega)$ для амплитуды $U(t)$. Другими словами, «активный» спектр сигнала с линейной частотной модуляцией локализован вблизи частоты $\omega(t) = \omega_0 + \beta t$ и не зависит от скорости β изменения частоты.

При длительности сигнала $\mathfrak{S} \geq T_w$ ширина «активного» спектра $\Delta\omega$ определяется размером окна T_w и видом амплитудной зависимости $U(t)$, а при $U(t) = \text{const}$ — только размером окна (для прямоугольного окна $\Delta\omega \approx 2\pi/T_w$). Если размер окна $T_w \geq \mathfrak{S}$, то ширина $\Delta\omega \sim 2\pi/\mathfrak{S}$. Этим объясняется известный факт, что наиболее высокое разрешение по частоте и времени преобразование Вигнера—Виля обеспечивает для сигналов с линейно изменяющейся частотой.

Наличие нелинейности в зависимости $\omega(t)$ снижает точность её определения по распределению Вигнера—Виля. В этом легко убедиться, вычислив последнее для сигнала, частота которого изменяется по некоторому полиномиальному закону $\omega(t) = \omega_0 + \beta t + \gamma t^2 + \dots$. Ограничившись первым нелинейным членом, получим

$$P(t, \omega) = \frac{U^2}{2\pi} \int_{-T_w/2}^{T_w/2} \exp[j(\omega(t)\tau + \gamma\tau^3/12)] \exp(-j\omega\tau) d\tau.$$

При $\gamma \neq 0$, а также при нелинейности более высокого порядка всегда присутствует дополнительный, зависящий от τ набег фазы. Наиболее сильно нелинейность проявляется в те времена t , при которых фаза $\varphi(t + \tau/2)$ становится нечётной функцией τ и интерференционные эффекты из-за удвоения набег фазы разностью $\varphi(t + \tau/2) - \varphi(t - \tau/2)$ усиливаются.

Сказанное поясняет рис. 1, на котором показано распределение Вигнера—Виля (рис. 1б) для сигнала, образованного двумя импульсными составляющими (рис. 1а) с малым временным интервалом $t_2 - t_1 = 10$ между ними. На нём использованы (и будут использоваться в дальнейшем) принятые при цифровой обработке сигналов шкала времени t в отсчётах, следующих с частотой дискретизации f_d , и шкала частот $\omega = 2\pi f$, отнесённых к $\omega_d = 2\pi f_d$.

В области максимума зависимость $\omega(t)$ при $t = t_m \approx 1024$ присутствует сильно выраженная побочная модуляция распределения $P(t, \omega)$, допускающая его неоднозначную интерпретацию. Подобный эффект проявляется везде, где зависимость $\omega(t)$ нелинейна (области 2, 3 на рис. 1б). При этом ширина «активного» спектра $\Delta\omega$ зависит от скорости изменения частоты $\omega'(t) = d\omega/dt$. На участках, где зависимость $\omega(t)$ почти линейна, а $\omega'(t)$ максимальна (в окрестности точки 1 на рис. 1б) ширина $\Delta\omega$ имеет наименьшее, а в области экстремума 2 — наибольшее значения. Это свойство распределения Вигнера—Виля отличается от общепринятого представления (см., например, [1, 2]), согласно которому произведение $\Delta f_d \Delta t_r$ динамической полосы $\Delta f_d = 1/\sqrt{|d\tau_g/df|}$ (где τ_g — групповая задержка) и времени релаксации $\Delta t_r = 1/\sqrt{|df(t)/dt|}$ есть величина постоянная ($\Delta f_d \Delta t_r = \text{const}$).

Вклад в распределение Вигнера—Виля эффектов интерференции и их влияние на частотно-временное разрешение можно оценить, применив преобразование Вигнера—Виля к сигналу, образованному двумя переходящими одна в другую линейно модулированными по частоте составляющими с равными амплитудами $U_1 = U_2 = U$ и противоположными скоростями изменения частоты:

$$\omega(t) = \begin{cases} \omega_1(t) = \omega_0 + \beta t, & t < 0; \\ \omega_2(t) = \omega_0 - \beta t, & t \geq 0. \end{cases}$$

На рис. 2 представлено распределение Вигнера—Виля сигнала, у которого частота $\omega(t)$ изменяется в пределах от $\omega_n = 0,05$ до $\omega_b = 0,25$ на интервале времени $\mathfrak{S} = 800$ при скорости $\beta = 2D/\mathfrak{S}$ (где $D = \omega_b - \omega_n$ — девиация частоты). Применялось 1024-точечное быстрое преобразование Фурье с прямоугольным перемещаемым окном интегрирования с шириной T_w . В области, где частота сигнала ω максимальна, присутствует, как и на рис. 1б, побочная модуляция распределения Вигнера—Виля. Характер модуляции поясняет график функции $P_m(\omega) = P(t_m, \omega)$, представляющей собой разрез распределения $P(t, \omega)$ в точке максимума $t = t_m = 0$. Для сигнала

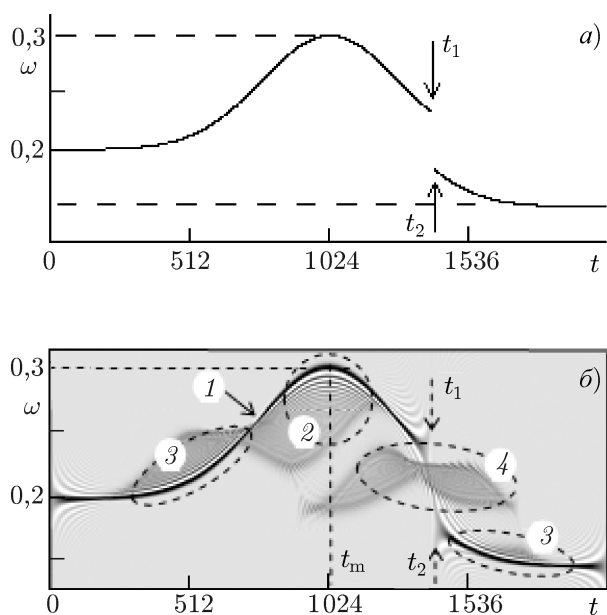


Рис. 1. Частотно-временной профиль сигнала, образованного двумя составляющими: при $t < t_1$ и при $t > t_2$ (а) и распределение Вигнера–Виля (б) для указанного двухкомпонентного сигнала с нелинейной зависимостью мгновенной частоты от времени

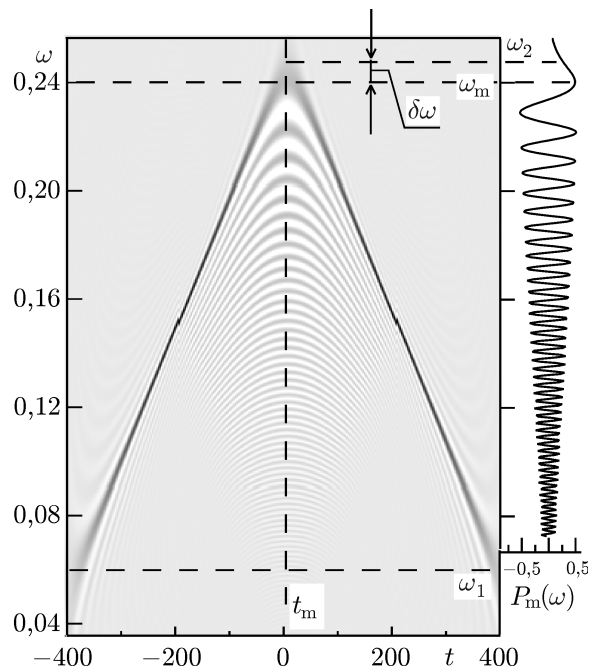


Рис. 2. Распределение Вигнера–Виля сигнала, образованного двумя линейно модулированными по частоте составляющими

с большой базой $B = DT_w/2 \gg 1$ зависимость P_m от частоты можно получить, выполнив преобразование (1) с заменой переменной τ на $y = \sqrt{\beta} \tau/2 + d$ ($d = (\omega_0 - \omega)/\sqrt{\beta}$) при $\tau < 0$ и на $z = \sqrt{\beta} \tau/2 - d$ при $\tau \geq 0$. Это даёт функцию

$$P_m(\omega) \approx \frac{4U^2}{\sqrt{\beta}} [C(v) \cos(v^2) + S(v) \sin(v^2)], \tag{9}$$

которая в верхней (близкой к ω_B) области частот выражается через интегралы Френеля

$$C(v) = \int_0^v \cos(y^2) dy, \quad S(v) = \int_0^v \sin(z^2) dz \tag{10}$$

с верхним пределом интегрирования $v = \sqrt{B}(\omega_0 - \omega)/D \propto \sqrt{B}$.

Зависимость P_m от частоты имеет вид колебаний, амплитуда и период которых уменьшаются по мере уменьшения ω . Мгновенная частота сигнала, оцениваемая по частоте ω_m первого интерференционного максимума, смещена вниз на $\delta\omega = 0,01$ по отношению к верхней частоте ω_B . Сам интерференционный максимум значительно расширен по сравнению с шириной $\Delta\omega$ «активного» спектра в средней области частотного диапазона $\omega_n \div \omega_B$. Подобная интерференционная картина всегда имеет место вблизи экстремумов частотно-временного профиля $\omega(t)$, что даёт смещённую оценку мгновенной частоты — тем большую, чем острее выражен экстремум.

2. СВОЙСТВА ВЗАИМНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВИГНЕРА—ВИЛЯ

В случае многокомпонентного сигнала $s(t)$ к интерференционным эффектам, присущим автономным распределениям, добавляются эффекты взаимодействия между отдельными составляющими $u_k(t)$ в виде взаимных членов (5). Последствия такого взаимодействия иллюстрирует рис. 2 и область 4 на рис. 1б. Взаимное преобразование Вигнера—Виля как средство спектрально-временного анализа основано на взаимодействии исследуемого и опорного сигналов и обладает повышенным частотно-временным разрешением, в том числе при наличии помех [11–13].

Взаимное преобразование Вигнера—Виля, как и автономное, наиболее эффективно в отношении сигналов, обладающих большой длительностью и непрерывным в широких пределах изменением частоты. В общем случае такие сигналы могут содержать некоторое число мод $u_k = U_k(t) \exp\{j[\int_0^t \omega_k(x) dx + \varphi_k]\}$, где k — номер моды. «Активные» области спектра согласуются с частотно-временными профилями исследуемого и опорного сигналов и локализованы вблизи средних частот $\bar{\omega}_k(t) = [\omega_k(t) + \omega_0(t)]/2$ [11]. При постоянной амплитуде A_0 опорного колебания получаемое из (6) взаимное распределение Вигнера—Виля для сигнала из n мод равно

$$P_{\text{вз}}(t, \omega) = \sum_{k=1}^n P_{ck}(t, \omega),$$

где

$$P_{ck}(t, \omega) = A_0 \exp[j \Delta\phi_k(t)] \int_{-T_w/2}^{T_w/2} U_k \exp\{j[\phi_k(t + \tau/2) + \phi_0(t - \tau/2)]\} \exp(-j\omega\tau) d\tau, \quad (11)$$

$$\Delta\phi_k(t) = \int_0^t [\omega_k(x) - \omega_0(x)] dx + \Delta\varphi_k, \quad \Delta\varphi_k = \varphi_k - \varphi_0.$$

Пределы интегрирования $-T_w/2$ и $T_w/2$ в (11) зависят от того, насколько быстро и в каких пределах изменяются частоты $\omega_k(t)$ и $\omega_0(t)$, и выбираются исходя из условия достижения наиболее высокого (или требуемого) разрешения $\Delta\omega = 2\pi \Delta f$ по частоте и Δt по времени. При монотонном изменении $\omega_k(t)$ пределы интегрирования могут быть близки или превышать длительность сигнала. Немонотонная, в частности периодическая, зависимость $\omega_k(t)$, а также наличие многих экстремумов налагают ограничения на ширину окна T_w .

Процедура измерения мгновенной частоты $\omega_k(t)$ и фазы φ_k по взаимному преобразованию Вигнера—Виля включает в себя: а) оценку мгновенной частоты $\omega_k(t)$ по распределению модуля $|P_{\text{вз}}(t, \omega)|$; б) уточнение результата оценки по распределению реальной, $\text{Re}[P_{\text{вз}}(t, \omega)]$, и мнимой, $\text{Im}[P_{\text{вз}}(t, \omega)]$, частям взаимного распределения Вигнера—Виля.

Оценить разрешающую способность взаимного распределения Вигнера—Виля по частоте можно, приняв к рассмотрению только одну моду $u_1(t)$ и предположив, что в пределах окна анализа T_w её частота $\omega_1(t)$ и частота опорного сигнала $\omega_0(t)$ изменяются по линейным законам:

$$\omega_1(t) = \omega_{10} + \beta_1 t, \quad \omega_0(t) = \omega_{00} + \beta_0 t.$$

Для определённости будем считать, что $\beta_1 > \beta_0$ и $\omega_{10} > \omega_{00}$. Если амплитуды U_1 и A_0 постоянны и окно интегрирования с шириной T_w не выходит за временные границы сигналов, то

$$P_{\text{вз}}(t, \omega) = U_1 A_0 \int_{-T_w/2}^{T_w/2} \exp(j\{\pi t \tau^2 / T_w^2 - [\omega - \bar{\omega}_1(t)] \tau\}) d\tau, \quad (12)$$

где

$$\bar{\omega}_1(t) = [\omega_1(t) + \omega_0(t)]/2 = \bar{\omega}_0 + \bar{\beta}t,$$

$\bar{\omega}_0 = (\omega_{10} + \omega_{00})/2$, $\bar{\beta} = (\beta_1 + \beta_0)/2$, $m = 2f_m T_w$, $2f_m = |\beta| T_w$ — девиация частоты $\bar{\omega}_1(t)$ в пределах текущего окна анализа с шириной T_w , $\omega_m = 2\pi f_m$ и $\beta = (\beta_1 - \beta_0)/4$. Введя новые переменные

$$v_1 = \sqrt{\frac{\pi m}{4}} \left(1 + \frac{\omega - \bar{\omega}_1}{\omega_m}\right), \quad v_2 = \sqrt{\frac{\pi m}{4}} \left(1 - \frac{\omega - \bar{\omega}_1}{\omega_m}\right),$$

из (12) получим согласно [14] распределение модуля $|P_{\text{вз}}(t, \omega)|$, выраженное, как и (9), через интегралы Френеля (10):

$$|P_{\text{вз}}(t, \omega)| = \frac{U_1 A_0 T_w}{2\pi \sqrt{m}} \sqrt{[C(v_1) + C(v_2)]^2 + [S(v_1) + S(v_2)]^2}. \quad (13)$$

Получаемая из (13) оценка $\tilde{\omega}_1(t)$ частоты $\bar{\omega}_1(t)$ зависит от величины m . При больших $m \gg 1$ взаимный спектр в каждый момент времени t занимает полосу частот вблизи $\bar{\omega}_1(t)$, близкую к полосе качания $\Pi \approx 2f_m$, вызванного изменением τ , что не даёт нужного частотного разрешения $\Delta\omega$. Приемлемое значение $\Delta\omega$ достигается тогда, когда $m < 10$. Отсюда следует налагаемое на ширину окна ограничение

$$T_w < 5/f_m \approx 10/\Pi. \quad (14)$$

При сближении скоростей β_0 и β_1 диапазон изменения средней частоты $\bar{\omega}_1(t)$ уменьшается и становится пренебрежимо малым, если $\beta_0 \approx \beta_1$. В этом случае снимается ограничение сверху на ширину окна, а величина $\Delta\omega$ становится близкой к минимальной, т.е. к $\Delta\omega \approx 2\pi/T_w$, если ширина T_w меньше длительности сигнала \mathfrak{S} ($T_w \leq \mathfrak{S}$), или к $\Delta\omega \approx 2\pi/\mathfrak{S}$ при $T_w > \mathfrak{S}$.

Наличие во взаимном преобразовании (11) фазовых множителей $\exp[j\Delta\phi_k(t)]$ приводит к низкочастотной, зависящей от разности частот $\omega_k(t) - \omega(t)$ и фаз $\varphi_k - \varphi_0$ модуляции функций $\text{Re}[P_{\text{вз}}(t, \omega)]$ и $\text{Im}[P_{\text{вз}}(t, \omega)]$. Эта модуляция наиболее отчётливо выражена вблизи максимумов $|P_{\text{вз}}(t, \omega)|$ и представлена временными вариациями реальной $R(t) = \text{Re}[P_{\text{вз}}(t, \omega)]$ и мнимой $I(t) = \text{Im}[P_{\text{вз}}(t, \omega)]$ частей взаимного распределения Вигнера—Виля на временном профиле $\tilde{\omega}_k(t)$ оценки средней частоты $\bar{\omega}_k(t)$ соответствующей моды k .

Для иллюстрации на рис. 3 показаны распределения $|P_{\text{вз}}(t, \omega)|^2$ (рис. 3а) и $\text{Re}[P_{\text{вз}}(t, \omega)]$ (рис. 3б) взаимного распределения Вигнера—Виля с синусоидальным опорным колебанием на частоте $f_0 = 0,14$ для сигнала $s(t)$, частотно-временной профиль которого изображён на рис. 1а. Использовалось 256-точечное быстрое преобразование Фурье. Отложенные по вертикальным осям значения мгновенной частоты $\omega(t)$ на рис. 3а–в соответствуют пересчитанным средним значениям $\bar{\omega}(t) = [\omega(t) + \omega_0]/2$, взятым из распределения $|P_{\text{вз}}(t, \omega)|^2$. Здесь же представлены увеличенный фрагмент функции $\text{Re}[P_{\text{вз}}(t, \omega)]$ (рис. 3в) из области со скачкообразным изменением $\omega(t)$ (области 1 и 2 на рис. 3а, б) и выделенные из зависимости $\text{Re}[P_{\text{вз}}(t, \omega)]$ вариации $R(t)$ на частотно-временном профиле $\tilde{\omega}(t) = 2\bar{\omega}(t) - \omega_0$ (рис. 3г).

Модуляция реальной, $R(t)$, и мнимой, $I(t)$, частей фазовыми множителями взаимного распределения Вигнера—Виля не зависит (как это имеет место, например, в «скользящем» быстром преобразовании Фурье) от положения окна T_w и полностью определяется разностью фаз $\Delta\phi_k(t)$ опорного и исследуемого сигналов. Это даёт привязку функций $\text{Re}[P_{\text{вз}}(t, \omega)]$ и $\text{Im}[P_{\text{вз}}(t, \omega)]$ к фазе опорного колебания, вследствие чего повышается точность измерения мгновенной частоты и фазы и точность определения времени существования отдельных мод в сигнале.

Наиболее высокое частотно-временное разрешение во взаимном распределении Вигнера—Виля достигается, если опорный сигнал согласован с исследуемым и обладает близким к зависимости $\omega(t)$ законом модуляции. В этом случае девиация частоты $\bar{\omega}(t)$ продукта взаимодействия

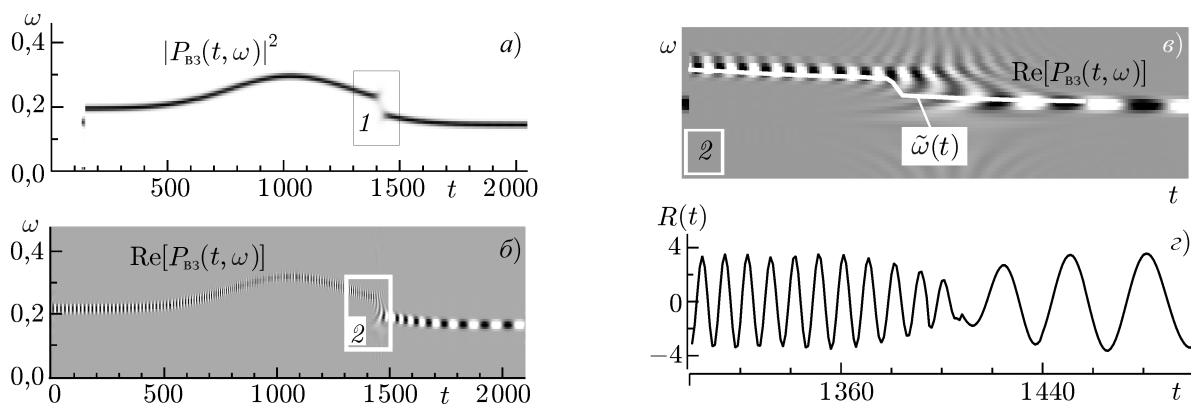


Рис. 3. Взаимные распределения квадрата модуля (а), реальной части (б), увеличенный фрагмент области 2 (в) и колебания реальной части $R(t)$ (г) вдоль контура оценки мгновенной частоты

с опорным сигналом уменьшается, и допустимо, как это следует из (14), значительное увеличение ширины окна T_w , что положительно сказывается на фильтрующих свойствах взаимного распределения Вигнера—Виля. При необходимости к функциям $R(t)$ и $I(t)$ можно применять операции сдвига по частоте и выбирать тем самым наиболее подходящую для анализа частотную область. Для этого достаточно частоту опорного колебания $\omega_0(t)$ сместить на постоянную величину $\pm\Omega$, т. е. заменить $\omega_0(t)$ на $\omega_0(t) \pm \Omega$ [11].

По отношению к функциям $R(t)$ и $I(t)$ применимы любые из известных методов спектрально-временного анализа, в том числе автономное преобразование Вигнера—Виля и обладающие эффектом «сверхразрешения» параметрические методы (см., например, [15]). Последние плохо работают при наличии помех, но приемлемы для анализа колебаний $R(t)$ и $I(t)$, поскольку действие помех в них значительно снижено.

При наличии помех $n(t)$, когда $s(t) = \sum_k u_k + n(t)$, к взаимному распределению (11) добавляется помеховая составляющая

$$P_n(t, \omega) = \int_{-T_w/2}^{T_w/2} n(t + \tau/2) s_0^*(t - \tau/2) \exp(-j\omega\tau) d\tau. \tag{15}$$

Влияние помех на точность измерений оценим в предположении, что полезная составляющая (3) сигнала $s(t)$ формируется только одной модой $u_1(t)$ с частотой $\omega_1(t)$, а помеха $n(t)$ является нормальным белым шумом со спектральной плотностью мощности N . Точность оценки $\tilde{\omega}_1(t)$ частоты сигнала зависит от ошибки измерения средней частоты $\bar{\omega}_1(t)$. Если ширина окна T_w выбрана в соответствии с условием (14), то частотная модуляция продукта взаимодействия сигнала с опорным колебанием в пределах ширины окна T_w не имеет существенного значения и вычисление взаимного преобразования Вигнера—Виля равносильно вычислению функции взаимной корреляции между модой $u_1(t)$ и сдвинутым по частоте на $\omega(t) = \bar{\omega}_1(t)$ опорным сигналом $s_0(t)$. Это соответствует оптимальной процедуре измерения частоты импульсного радиосигнала по методу максимума функции правдоподобия [16, 17], которая в данном случае выражается в оценке мгновенной частоты $\bar{\omega}_1(t)$ по распределению модуля $|P_{B3}(t, \omega)|$.

Дисперсия $\sigma_{\tilde{\omega}}^2(t)$ оценки частоты $\bar{\omega}_1(t)$ зависит от длительности и формы окна T_w . При большом по сравнению с единицей отношении $Q = E_1/N \gg 1$ энергии сигнала $E_1 = \int_{-T_w/2}^{T_w/2} u_1^2(t) dt$ к спектральной плотности N отклонение $\delta\omega_1$ оценки $\tilde{\omega}_1(t) = \bar{\omega}_1(t) + \delta\omega_1$ от истинного значения $\bar{\omega}_1(t)$ мало. В этом приближении для прямоугольного окна с шириной T_w при постоянной амплитуде U_1

оценку дисперсии частоты σ_f можно определить по выражению [16],

$$\sigma_f^2(t) = \sigma_\omega^2(t)/(4\pi^2) \approx 3Q/(\pi T_w)^2, \quad (16)$$

из которого при учёте неравенства (14) получается

$$\sigma_f \approx \frac{\sqrt{3}}{\pi T_w} \sqrt{\frac{P_{\text{ш}}}{P_c}} \approx 0,056 \sqrt{\frac{P_{\text{ш}}}{P_c}} \Pi. \quad (17)$$

Здесь P_c и $P_{\text{ш}}$ — соответственно мощности сигнала и шума. Такую же оценку дисперсии σ_f даёт корреляционный метод в условиях априорно заданной частоты $\bar{\omega}_1(t)$. Существенным отличием взаимного преобразования Вигнера—Виля является то, что для него априорно задавать зависимость $\bar{\omega}_1(t)$ не требуется, т. к. определение функции $\bar{\omega}_1(t)$ заложено в алгоритм вычисления взаимного распределения Вигнера—Виля. При выполнении условия (14) полоса Π , в пределах которой изменяется частота $f_1(t) = \bar{\omega}_1(t)/(2\pi)$, близка к $\Delta f \approx 1/T_w$. Следовательно, соответствующее ширине окна (14) разрешение $\Delta f \approx 1/T_w$ может быть достигнуто при значительных отношениях $P_{\text{ш}}/P_c$ вплоть до $P_{\text{ш}}/P_c \sim 5$, когда $\sigma_f \approx 0,1 \Delta f$.

За счёт частотно-временной селекции, заключающейся в определении временного профиля средней частоты $\bar{\omega}_1(t)$ и в выделении примыкающей к $\bar{\omega}_1(t)$ области взаимного распределения Вигнера—Виля, действие помех на функции $R(t)$ и $I(t)$ значительно снижено. Такая селекция не затрагивает энергию $E \approx A_0 U_1 T_w/2$ сигнальной составляющей функций $R(t)$ и $I(t)$, но от неё зависит дисперсия оставшегося в функциях $R(t)$ и $I(t)$ шума $n_{\Delta\omega}(t)$. Спектр мощности шумам $n_{\Delta\omega}(t)$ в каждый момент времени сосредоточен в узкой полосе $\Delta\omega \sim 2\pi/T_w$ вблизи средней частоты $\bar{\omega}_1(t)$ и отслеживает её временные вариации. Интервал корреляции шумовых составляющих в функциях $R(t)$ и $I(t)$ близок к длительности окна T_w . Исходя из этого, при статистически независимых величинах $n_{\Delta\omega}(t)$ и $s_0(t)$ и при постоянных параметрах шума и опорного сигнала, дисперсии реальной, σ_R^2 , и мнимой, σ_I^2 , частей взаимного распределения Вигнера—Виля для сигнала приближённо можно оценить по формуле

$$\sigma_R^2 = \sigma_I^2 \approx \frac{1}{N^2} \int_{-T_w/2}^{T_w/2} \langle n_{\Delta\omega}^2(\tau) \rangle s_0^2(\tau) d\tau \approx \frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_{\text{ш}}/2} \frac{E_0}{N}. \quad (18)$$

В формуле (18) угловые скобки обозначают усреднение по ансамблю реализаций $n_{\Delta\omega}(t)$; $N_{\text{ш}}$ и $\Delta\omega_{\text{ш}}$ — спектральная плотность мощности и ширина спектра шума $n(t)$; $E_0 \approx A_0^2 T_w/2$ — энергия опорного колебания. При этом учтено, что взаимное преобразование Вигнера—Виля вдвое сжимает диапазон частот, занимаемый «активным» взаимным спектром. Таким образом, фильтрующие свойства взаимного преобразования Вигнера—Виля снижают действие шума в функциях $R(t)$ и $I(t)$, увеличивая отношение сигнал/шум примерно в $\Delta\omega_{\text{ш}}/(2\Delta\omega)$ раз. На этом основана возможность повышения избирательности по частоте и времени за счёт дополнительной обработки функций $R(t)$ и (или) $I(t)$ каким-либо из известных методов, имеющих высокое разрешение по частоте, но чувствительных к действию шумовой помехи.

Этот вывод подтверждает рис. 4, где представлены те же, что и на рис. 3, распределения квадрата модуля и реальной части взаимного распределения Вигнера—Виля, но при наличии шума $n(t)$, мощность которого равна мощности полезной составляющей $u(t)$. Как видно из рис. 4в, г помеха с $P_{\text{ш}}/P_c = 1$ не вызывает существенных изменений характера колебаний функции $R(t)$. Такой результат получен при относительно малой ширине окна $T_w = 250$, выбор которой был

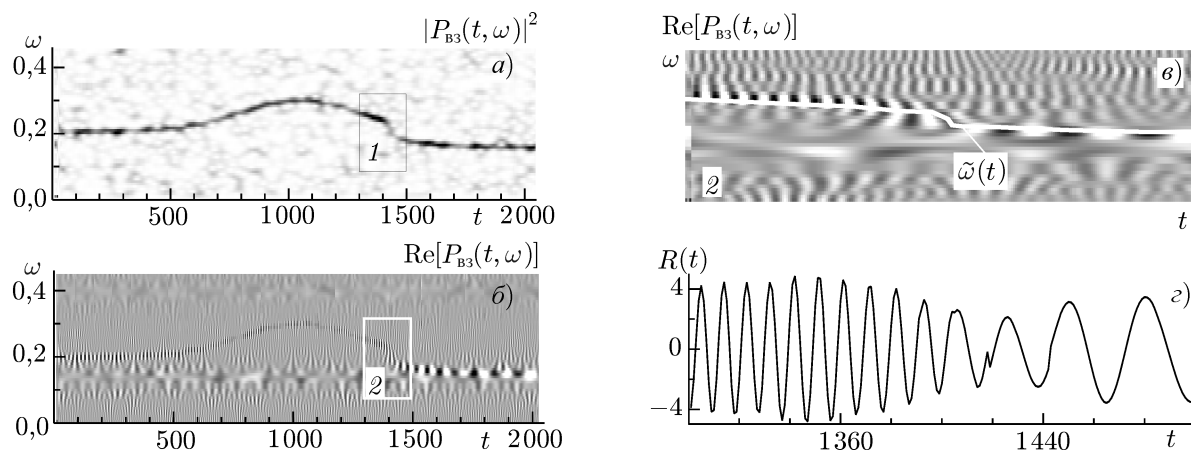


Рис. 4. Те же, что и на рис. 3 распределения при наличии шума при отношении сигнал/шум, равном 1

обусловлен использованием простого синусоидального опорного сигнала и необходимостью подстройки ширины T_w под максимальную скорость изменения мгновенной частоты $\omega(t)$. Применение согласованного или близкого к зависимости $s(t)$ опорного сигнала позволяет измерять частоты $\tilde{\omega}(t)$ и определять параметры колебаний функций $R(t)$ и $I(t)$ при наличии помех, мощность которых в несколько раз превышает мощность полезных составляющих в анализируемом сигнале.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Описанные выше свойства автономного и взаимного преобразований Вигнера—Виля касаются соответствия получаемых с их помощью время-частотных распределений реальным спектрально-временным характеристикам исследуемых сигналов, а также точности воспроизведения этих характеристик. Показано, что точность оценки мгновенной частоты сигнала $\omega(t)$ с помощью преобразования Вигнера—Виля в большей степени зависит от нелинейности функции $\omega(t)$, а не от скорости её изменения во времени, как это принято считать. Напротив, разрешающая способность взаимного преобразования Вигнера—Виля, как и других линейных методов, зависит от скорости изменения частоты $\omega(t)$ и падает с её увеличением, если это увеличение не отслеживается опорным сигналом. Возможность применения согласованного опорного сигнала является преимуществом взаимного преобразования Вигнера—Виля, особенно тогда, когда требуется определить различие между передаваемым (используемым в качестве опорного) и принимаемым по каналу связи сигналами. Таким образом можно получать сведения о свойствах среды распространения. Опорный сигнал, близкий к согласованному, всегда можно сформировать при активной локации или при активном дистанционном зондировании физических сред и объектов, когда отражённый (или принятый) сигнал мало отличается от зондирующего (или переданного) сигнала. Неизвестное время прихода определяется подбором соответствующей временной задержки опорного сигнала.

При наличии помех эффективно работает взаимное преобразование Вигнера—Виля, особенно тогда, когда опорный сигнал согласован с исследуемым. Применение согласованного сигнала позволяет увеличить ширину окна интегрирования T_w и, как следствие, повысить точность оценки мгновенной частоты и фазы. Точность повышается за счёт определения области локализации «активных» областей распределения $|P_{B3}(t, \omega)|$, измерения средних значений $\tilde{\omega}(t) = [\omega(t) + \omega_0]/2$ частот продукта взаимодействия опорного и исследуемого сигналов, а также измерения мгновенной частоты и фазы по функциям $R(t)$ и $I(t)$, отслеживающим модуляцию взаимного распределе-

ния Вигнера–Виля на разностной частоте $\bar{\omega}(t) - \omega_0(t)$. Малая зашумлённость функций $R(t)$ и $I(t)$ даёт возможность более детального анализа частотно-временных свойств сигнала и возможность применения чувствительных к помехам методов с высоким частотно-временным разрешением.

Настоящая работа выполнена в рамках программы развития Государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского» на 2009–2018 годы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коэн Л. // ТИИЭР. 1989. Т. 77, № 10. С. 120.
2. Макс Ж. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях. Т. 2. М.: Мир, 1983. 256 с.
3. Кравченко В. Ф., Лазоренко О. В., Пустовойт В. И., Черногор Л. Ф. // Докл. РАН. 2006. Т. 410, № 1. С. 38.
4. Qazi S. A., Stergioulas L. K. // IEEE Trans. Signal Proces. 2006. V. 54, No. 2. P. 4662.
5. Qian S., Chen D. // IEEE Trans. Signal Proces. 1994. V. 42, No. 10. P. 2836.
6. Boultadakis G. E., Kalognomos G. K., Karakasiliotis A. V., et al. // Electron. Electrical Engineering. 2009. No. 4 (92). P. 87.
7. Канаков В. А., Лупов С. Ю., Орехов Ю. И., Родионов А. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 2008. Т. 51, № 3. С. 234.
8. Шкелёв Е. И., Кисляков А. Г., Лупов С. Ю. // Изв. вузов. Радиофизика. 2002. Т. 45, № 5. С. 433.
9. Voashash B. // IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Proces. 1988. V. 36, No 9. P. 1518.
10. Си Х. Х., Колфилд Х. Дж. // ТИИЭР. 1984. Т. 42, № 7. С. 173.
11. Шкелёв Е. И., Земнюков Н. Е. // Изв. вузов. Радиофизика. 2010. Т. 53, № 2. С. 134.
12. Шкелёв Е. И., Земнюков Н. Е. // Датчики и системы. 2011. № 12. С. 15.
13. Шкелёв Е. И., Земнюков Н. Е., Корокозов М. Н. и др. // Вестник ННГУ им. Н. И. Лобачевского. 2011. № 5 (3). С. 97.
14. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Сов. радио, 1977. 608 с.
15. Сергиенко А. Б. Цифровая обработка сигналов. СПб.: Питер, 2002. 608 с.
16. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. М.: Сов. радио, 1966. 678 с.
17. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Кн. 2. М.: Сов. радио, 1968. 504 с.

Поступила в редакцию 23 апреля 2014 г.; принята в печать 14 июля 2014 г.

FREQUENCY-TIME RESOLUTION OF THE AUTONOMOUS AND MUTUAL WIGNER–VILLE TRANSFORMATIONS

E. I. Shkelev

The accuracy of the instantaneous-frequency $\omega(t)$ measurement by the autonomous and mutual (i.e., using the reference signal) Wigner–Ville transformations is estimated. The frequency $\omega(t)$ estimation by the autonomous Wigner–Ville transformations is shown to depend on the character of the function $\omega(t)$ nonlinearity and its time-variation rate to a greater and lesser degree, respectively. The mechanism of increasing the frequency-time resolution of the mutual Wigner–Ville transformation due to using

the matched signal is described and the method for measuring the instantaneous frequency and the phase, which is based on revealing the character of modulation of the real and imaginary parts of the mutual power $P_m(t, \omega)$ determined by the reference oscillation is considered. Stability of the mutual Wigner–Ville transformation with respect to normal white noise is estimated.