

УДК 534.222

ПИЛООБРАЗНЫЕ АКУСТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В СРЕДАХ С ГИСТЕРЕЗИСНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

*В. Е. Назаров**, *С. Б. Кляшко*

Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород, Россия

Исследовано распространение периодических пилообразных волн в недиспергирующих средах с квадратичной упругой и гистерезисной нелинейностью. Из сравнения точных решений для пилообразных волн и их спектральных характеристик выявлены закономерности нелинейных акустических эффектов в таких средах. Показано, что, в отличие от среды с квадратичной упругой нелинейностью, в гистерезисных средах могут проявляться эффекты нелинейной дисперсии.

ВВЕДЕНИЕ

Акустические свойства многих микронеоднородных твёрдых тел, в частности, поликристаллов, характеризуются гистерезисной нелинейностью, связанной с наличием различных дефектов — дислокаций, трещин, границ зёрен и т. д. [1–3]. Различают два основных типа акустических гистерезисов — упругий (гистерезис отрыва) и неупругий (пластический гистерезис или гистерезис трения) [1–3]: они существенно отличаются друг от друга. Гистерезисная нелинейность качественно отличается и от «классической» квадратичной упругой нелинейности однородных сред [4, 5], поэтому закономерности нелинейных эффектов, возникающих при распространении интенсивных акустических волн в гистерезисных и негистерезисных средах, также качественно отличаются друг от друга. Это проявляется в том, что первоначально одинаковые волны в таких средах искажаются по-разному. Знание этих закономерностей необходимо для описания и объяснения результатов экспериментальных исследований нелинейных волновых процессов в различных средах и определения нелинейного уравнения состояния среды. Для установления закономерностей нелинейного распространения акустических волн желательно знать достаточно простые и точные решения нелинейных волновых уравнений, что, конечно, не всегда возможно. Наиболее простые и точные решения нелинейных волновых уравнений удаётся получить для идеальных недиспергирующих сред с безынерционной упругой нелинейностью: решения таких уравнений соответствуют простым волнам [5, 6]. Методом «сшивания» простых волн можно получить и профили «непростых» волн в средах с безынерционной гистерезисной нелинейностью [3, 7–9].

В данной работе проводится теоретическое исследование и сравнительный анализ распространения и эволюции пилообразных волн в гистерезисных средах и в среде с квадратичной упругой нелинейностью. На основе анализа точных решений для пилообразных волн и их спектральных характеристик определяются и сравниваются закономерности нелинейных акустических эффектов для амплитуд волн таких средах. Ранее подобные исследования для гистерезисных сред проводились для первоначально гармонических волн [3, 9], при этом удалось установить амплитудные зависимости нелинейных эффектов на малых и больших расстояниях от излучателя. Для пилообразных периодических волн, спектр которых содержит множество кратных гармоник, такие закономерности удаётся установить на любых расстояниях.

Уравнение состояния нелинейной среды для продольных напряжений σ и деформаций ε (без учёта линейной диссипации) можно представить в виде

$$\sigma(\varepsilon) = E[\varepsilon - f(\varepsilon)], \quad (1)$$

* nazarov@hydro.appl.sci-nnov.ru

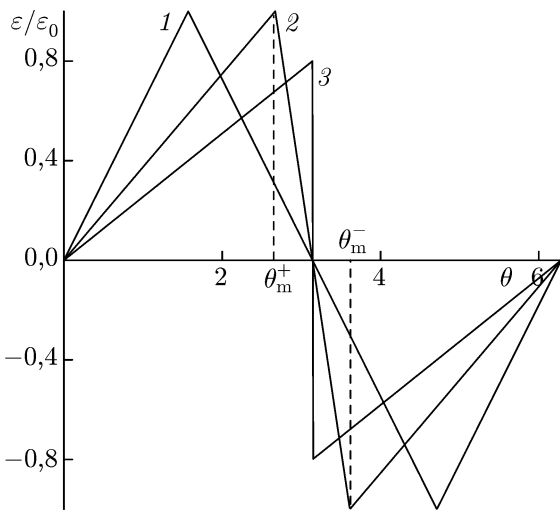


Рис. 1. Форма пилообразной волны в среде с упругой квадратичной нелинейностью на различных расстояниях z : $z = 0$ (1), $z < z_S$ (2) и $z > z_S$ (3)

где E — модуль упругости, $f(\varepsilon)$ — нелинейная функция, $|\partial f(\varepsilon)/\partial \varepsilon| \ll 1$.

Будем считать, что нелинейность уравнения состояния среды преобладает над геометрической нелинейностью уравнений движения и последнюю можно не учитывать. Подставляя уравнение (1) в уравнение движения $\rho U_{tt} = \sigma_x(\varepsilon)$ [4–6], получим одномерное волновое уравнение для смещений $U(x, t)$:

$$U_{tt}'' - C_0^2 U_{xx}'' = -C_0^2 f_x'(\varepsilon), \tag{2}$$

где ρ — плотность, $C_0 = (E/\rho)^{1/2}$, $\varepsilon(x, t) = U_x'(x, t)$. Здесь и далее для частных производных используются обозначения $\partial f(\alpha)/\partial \alpha = f_\alpha'$. Переходя в уравнении (2) к сопровождающей системе координат $\tau = t - x/C_0$, $x' = x$, получим так называемое одноволновое уравнение для простых волн деформации $\varepsilon(x, t)$, бегущих в положительном направлении оси x [6, 10]:

$$\varepsilon_x' = -f_\tau'(\varepsilon)/(2C_0). \tag{3}$$

Граничное условие для одного периода ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) периодической пилообразной волны зададим в следующем виде (см. рис. 1):

$$\varepsilon(0, \theta) = \frac{2\varepsilon_0}{\pi} \begin{cases} \theta, & -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2; \\ \pi - \theta, & \pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2, \end{cases} \tag{4}$$

где $\theta = \omega\tau$, ω — частота волны.

1. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПИЛООБРАЗНОЙ ВОЛНЫ В СРЕДЕ С УПРУГОЙ КВАДРАТИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Вначале кратко опишем распространение пилообразной волны (4) в среде с упругой квадратичной нелинейностью, когда $f(\varepsilon) = \gamma\varepsilon^2/2$, γ — параметр нелинейности, $|\gamma\varepsilon| \ll 1$. До координаты $x \leq x_S = \pi/(|\gamma|k\varepsilon_0)$, где образуется неоднозначность и возникает разрыв в пилообразной волне, форма одного её периода определяется выражением [6, 10]

$$\varepsilon(z, \theta) = \frac{2\varepsilon_0}{\pi} \times \begin{cases} \theta/(1 + \varepsilon_0 z), & \theta_m^-(z) \leq \theta \leq \theta_m^+(z); \\ (\pi - \theta)/(1 - \varepsilon_0 z), & \theta_m^+(z) \leq \theta \leq \theta_m^-(z) + 2\pi, \end{cases} \tag{5}$$

где $z = \gamma kx/\pi$, $z \leq z_S = \varepsilon_0^{-1}$, $k = \omega/C_0$, $\theta_m^+(z) = \pi(1 + \varepsilon_0 z)/2$ и $\theta_m^-(z) = -\pi(1 + \varepsilon_0 z)/2$ — фазы «изломов» пилообразной волны (5). Амплитуда $\varepsilon_m(z)$ такой волны остаётся неизменной и равной первоначальной амплитуде ε_0 .

После возникновения разрыва (при $z > z_S = \gamma kx_S/\pi$) волна перестаёт быть простой и уже не является решением уравнения (3). Однако и при $z > z_S$ волна $\varepsilon(z, \theta)$ также будет пилообразной, а её форма и амплитуда $\varepsilon_m(z)$ будут определяться следующими выражениями [6, 10]:

$$\varepsilon(z, \theta) = \frac{2}{\pi} \frac{\varepsilon_0 \theta}{1 + \varepsilon_0 z}, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi, \quad \varepsilon_m(z) = \frac{2\varepsilon_0}{1 + \varepsilon_0 z}. \tag{6}$$

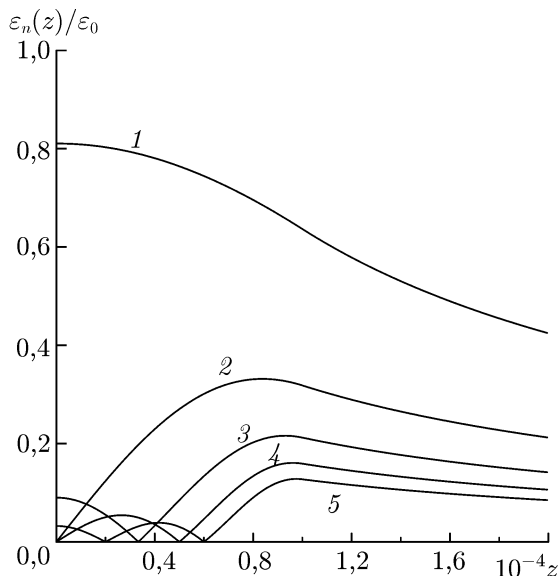


Рис. 2. Зависимости первых пяти фурье-амплитуд $\varepsilon_n(z)$ от расстояния z при начальной амплитуде $\varepsilon_0 = 10^{-4}$; номер кривой соответствует номеру гармоники n

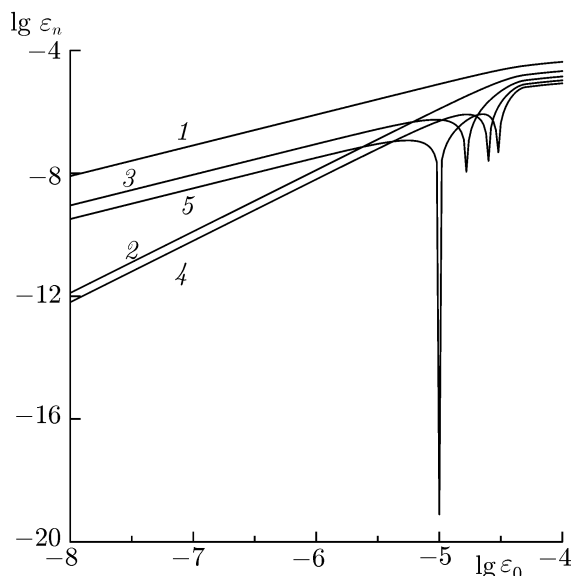


Рис. 3. Зависимости первых пяти фурье-амплитуд $\varepsilon_n(z)$ от начальной амплитуды ε_0 в точке $z = 2 \times 10^4$; номер кривой соответствует номеру гармоники n

Эволюция формы одного временного периода пилообразной волны (4) на различных расстояниях z , описываемая выражениями (5) и (6), показана на рис. 1.

Представим пилообразные волны (5), (6) в виде рядов Фурье. До образования разрыва (при $z \leq z_S$) волна описывается выражением

$$\varepsilon(z, \theta) = \frac{8\varepsilon_0}{\pi^2 (1 + \varepsilon_0 z) (1 - \varepsilon_0 z)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin[n\theta_m^+(z)]}{n^2} \sin(n\theta), \tag{7}$$

а после разрыва (при $z > z_S$) — выражением

$$\varepsilon(z, \theta) = \frac{4\varepsilon_0}{\pi (1 + \varepsilon_0 z)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(n\theta). \tag{8}$$

Из выражений (7) и (8) видно, что все гармоники пилообразной волны (и до, и после возникновения разрыва) распространяются с одной и той же скоростью, равной C_0 . Это соответствует тому, что среда с квадратичной упругой нелинейностью не обладает нелинейной дисперсией.

На рис. 2 и 3 приведены зависимости первых пяти фурье-амплитуд $\varepsilon_n(z)$ от расстояния z (при $\varepsilon_0 = 10^{-4}$) и от ε_0 (при $z = 2 \cdot 10^4$). Из рис. 2 видно, что с ростом z фурье-амплитуда $\varepsilon_1(z)$ монотонно уменьшается: при $z \leq z_S = \varepsilon_0^{-1} = 10^4$ её энергия уходит на генерацию высших гармоник, а при $z > z_S$ волна нелинейно затухает на разрыве. Амплитуды $\varepsilon_{2l}(z)$ чётных гармоник при малых z растут от нуля, достигают максимумов, а затем уменьшаются, при этом до координаты образования разрыва z_S амплитуды $\varepsilon_{2l}(z)$ гармоник $2l \geq 4$ испытывают пространственные биения (до нуля). Амплитуды $\varepsilon_{2l+1}(z)$ нечётных гармоник ($\varepsilon_{2l+1}(0) \neq 0$) при $z \leq z_S$ также испытывают пространственные биения (до нуля), а при $z > z_S$ монотонно затухают. С ростом номера гармоники частота биений увеличивается.

Из выражений (7) и рис. 3 следует, что при увеличении начальной амплитуды ε_0 фурье-амплитуды $\varepsilon_n(z)$ растут: причём $\varepsilon_{2l}(z) \propto \varepsilon_0^2$, $\varepsilon_{2l+1}(z) \propto \varepsilon_0$ при малых ε_0 , затем в зависимостях

от ε_0 фурье-амплитуд $\varepsilon_n(z)$ гармоник $n \geq 2$ наблюдаются биения, а после образования разрыва ($\varepsilon_0 \geq \varepsilon_S = 5 \cdot 10^{-5}$) фурье-амплитуды не зависят от ε_0 , $\varepsilon_n(z) \propto (nz)^{-1}$.

Координаты z_0 нулевых значений амплитуд, когда $\varepsilon_n(z_0) = 0$, где $n \geq 2$, определяются из уравнения $\sin[n\theta_m^+(z_0)] = 0$. В этих точках фазы высших гармоник изменяются на π . Механизм таких биений связан с резонансными трёхволновыми взаимодействиями бесконечно большого числа кратных гармоник, составляющих непрерывно меняющуюся форму периодической пилообразной волны: форма волны меняется, меняются и соотношения между амплитудами её гармоник. После образования разрыва форма пилообразной волны не меняется, поэтому биений амплитуд высших гармоник не наблюдается. Отметим, что для амплитуд $B_n(y)$ высших гармоник, возникающих при распространении в такой же среде первоначально гармонической волны (решение Бесселя—Фубини [6, 10]), никаких биений не наблюдается: эти амплитуды определяются выражением $B_n(y) = J_n(ny)/(ny) \geq 0$, где $y = \gamma\varepsilon_0 kx \leq 1$, $J_n(ny)$ — функция Бесселя. В этом случае все гармоники нелинейной волны (ближе и дальше точки образования разрывов) также распространяются со скоростью C_0 .

2. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПИЛООБРАЗНОЙ ВОЛНЫ В СРЕДЕ С УПРУГИМ ГИСТЕРЕЗИСОМ

Далее рассмотрим распространение пилообразной волны (4) в среде с упругим квадратичным гистерезисом, для которого нелинейная функция $f(\varepsilon)$ имеет вид [3, 9]

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{2} \times \begin{cases} \gamma_1 \varepsilon^2, & \varepsilon > 0, \quad \varepsilon'_t > 0; \\ -\gamma_2 \varepsilon^2 + (\gamma_1 + \gamma_2) \varepsilon_m \varepsilon, & \varepsilon > 0, \quad \varepsilon'_t < 0; \\ -\gamma_3 \varepsilon^2, & \varepsilon < 0, \quad \varepsilon'_t < 0; \\ \gamma_4 \varepsilon^2 + (\gamma_3 + \gamma_4) \varepsilon_m \varepsilon, & \varepsilon < 0, \quad \varepsilon'_t > 0. \end{cases} \quad (9)$$

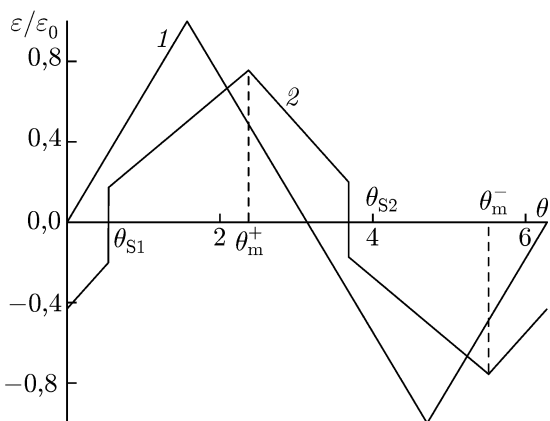


Рис. 4. Форма пилообразной волны в среде с упругим гистерезисом при $z = 0$ (1) и $z > 0$ (2)

Здесь $\varepsilon_m(z)$ — амплитуда деформации, $\gamma_1 + \gamma_2 > 0$, $\gamma_3 + \gamma_4 > 0$, $|\gamma_n \varepsilon_m| \ll 1$, $n = 1, \dots, 4$. Для такого гистерезиса $\sigma(\varepsilon = 0) = 0$, поэтому его называют упругим или гистерезисом отрыва [1–3].

В гистерезисных средах, кроме взаимодействия гармоник, имеют место эффекты амплитудно-зависимого внутреннего трения; они определяются параметрами гистерезисной нелинейности [3, 9]. Здесь для упрощения расчётов параметры гистерезисной нелинейности $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ и γ_4 при растяжении ($\varepsilon > 0$) и сжатии ($\varepsilon < 0$) среды полагаются попарно одинаковыми: $\gamma_1 = \gamma_3, \gamma_2 = \gamma_4$.

Для сред с гистерезисной нелинейностью каждой ветви гистерезиса соответствует своя

простая волна. Методом «сшивания» таких простых волн определим и форму всей «непростой» волны в гистерезисной среде [3, 7, 9]. Здесь она также будет пилообразной, но в ней сразу же, на сколько угодно малом расстоянии от излучателя, образуются неоднозначности, которые устраняются «сшиванием» простых волн в точках, где $|\varepsilon(z, \theta)| = \varepsilon_m$, и введением разрывов в профиль волны вблизи точек, где $\varepsilon(z, \theta) = 0$ [3] (см. рис. 4). Один период такой волны определяется

следующим выражением:

$$\varepsilon(z, \theta) = \frac{2\varepsilon_0}{\pi} \times \begin{cases} \theta/(1 + \varepsilon_0 z), & \theta_{S1}(z) \leq \theta \leq \theta_m^+(z); \\ \frac{\pi \sqrt{1 + (1 + \mu) \varepsilon_0 z/2} - \theta}{1 + \mu \varepsilon_0 z}, & \theta_m^+(z) \leq \theta \leq \theta_{S2}(z); \\ (\pi - \theta)/(1 + \varepsilon_0 z), & \theta_{S2}(z) \leq \theta \leq \theta_m^-(z); \\ \frac{\theta - \pi \sqrt{1 + (1 + \mu) \varepsilon_0 z/2} - \pi}{1 + \mu \varepsilon_0 z}, & \theta_m^-(z) \leq \theta \leq \theta_{S1}(z) + 2\pi. \end{cases} \quad (10)$$

Здесь $z = \gamma_1 kx/\pi$, $\mu = \gamma_2/\gamma_1$, а фазы разрывов

$$\theta_{S1}(z) = \pi \left[\sqrt{1 + (1 + \mu) \varepsilon_0 z/2} - 1 \right] \left(1 + \sqrt{\frac{1 + \mu \varepsilon_0 z}{1 + \varepsilon_0 z}} \right)^{-1}, \quad \theta_{S2}(z) = \theta_{S1}(z) + \pi;$$

фазы, при которых $\varepsilon[z, \theta_m^+(z)] = \varepsilon_m(z)$ и $\varepsilon[z, \theta_m^-(z)] = -\varepsilon_m(z)$, равны

$$\theta_m^+(z) = \frac{\pi(1 + \varepsilon_0 z)}{2\sqrt{1 + (1 + \mu) \varepsilon_0 z/2}}, \quad \theta_m^-(z) = \theta_m^+(z) + \pi, \quad \theta_{S1}(z) < \theta_m^+(z). \quad (11)$$

Из-за гистерезисных потерь амплитуда $\varepsilon_m(z)$ такой пилообразной волны затухает по закону

$$\varepsilon_m(z) = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{1 + (1 + \mu) \varepsilon_0 z/2}}. \quad (12)$$

Разложим периодическую пилообразную волну (10) в ряд Фурье. Из-за нечётной зависимости гистерезисной функции (9) от ε ряд Фурье не содержит чётных гармоник:

$$\varepsilon(z, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(z) \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)] = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n(z) \sin[n\theta + \psi_n(z)], \quad (13)$$

где

$$\varepsilon_n(z) = [a_n^2(z) + b_n^2(z)]^{1/2}, \quad \operatorname{tg} \psi_n(z) = a_n(z)/b_n(z), \quad (14)$$

$$\begin{aligned} a_{2l}(z) &= 0, & a_{2l-1}(z) &= \frac{2}{\pi} \int_{\theta_{S1}(z)}^{\theta_{S2}(z)} \varepsilon(z, \theta) \cos[(2l-1)\theta] d\theta = \\ &= \frac{-4\varepsilon_0}{(2l-1)\pi} \frac{\sqrt{1 + (1 + \mu) \varepsilon_0 z/2} - 1}{\sqrt{(1 + \varepsilon_0 z)(1 + \mu \varepsilon_0 z)}} \sin[(2l-1)\theta_{S1}(z)] + \\ &+ \frac{4(1 - \mu) \varepsilon_0^2 z}{(2l-1)^2 \pi^2 (1 + \mu \varepsilon_0 z)(1 + \varepsilon_0 z)} \cos[(2l-1)\theta_{S1}(z)] + \\ &+ \frac{4\varepsilon_0 [2 + (1 + \mu) \varepsilon_0 z]}{(2l-1)^2 \pi^2 (1 + \mu \varepsilon_0 z)(1 + \varepsilon_0 z)} \cos[(2l-1)\theta_m^+(z)], \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} b_{2l}(z) &= 0, & b_{2l-1}(z) &= \frac{2}{\pi} \int_{\theta_{S1}(z)}^{\theta_{S2}(z)} \varepsilon(z, \theta) \sin[(2l-1)\theta] d\theta = \\ &= \frac{4(1 - \mu) \varepsilon_0^2 z}{(2l-1)^2 \pi^2 (1 + \mu \varepsilon_0 z)(1 + \varepsilon_0 z)} \sin[(2l-1)\theta_{S1}(z)] + \end{aligned}$$

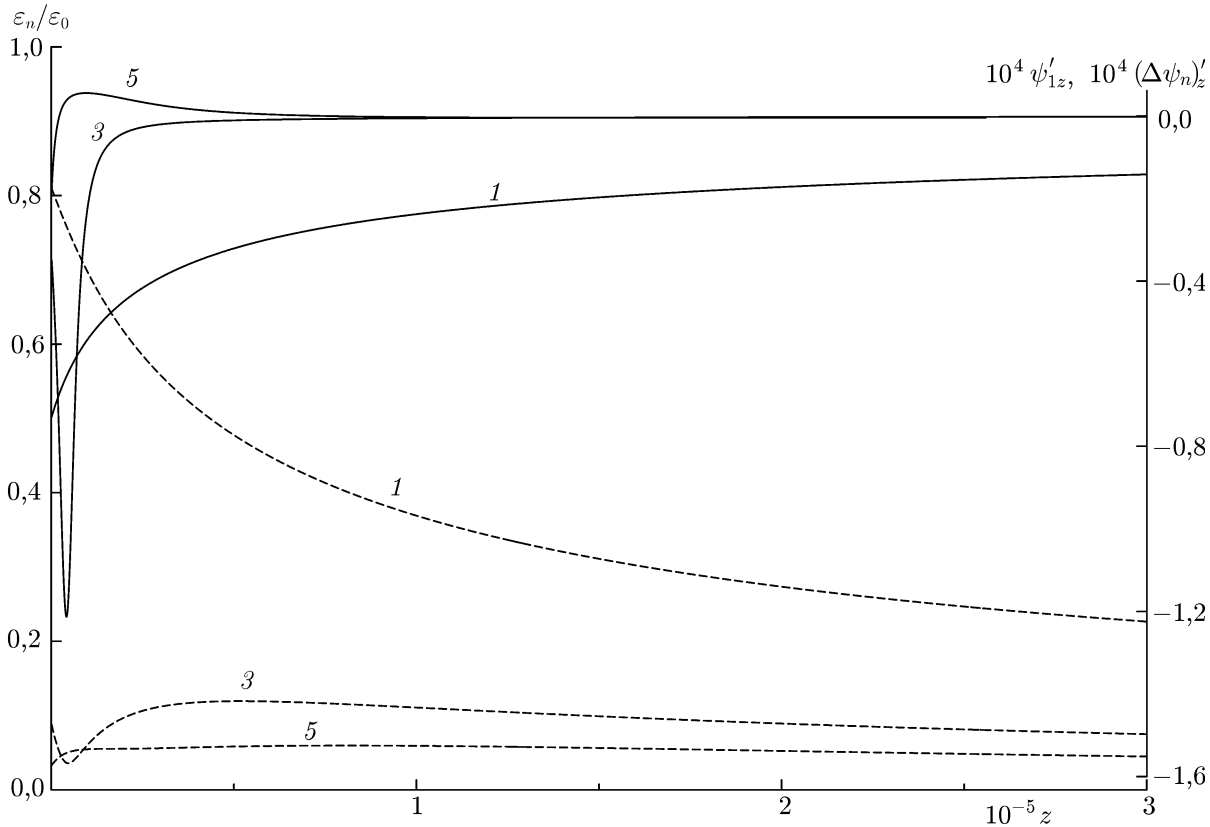


Рис. 5. Зависимости амплитуд $\varepsilon_n(z)$ (пунктирные линии) и производных фаз $\psi'_{1z}(z)$, $[\Delta\psi_n(z)]'_z$ (сплошные линии) для $n = 1, 3, 5$ от расстояния z при $\varepsilon_0 = 10^{-4}$. Номера кривых соответствуют номеру гармоники n

$$\begin{aligned}
 &+ \frac{4\varepsilon_0}{(2l-1)\pi} \frac{\sqrt{1+(1+\mu)\varepsilon_0 z/2}-1}{\sqrt{(1+\varepsilon_0 z)(1+\mu\varepsilon_0 z)}} \cos[(2l-1)\theta_{S1}(z)] + \\
 &+ \frac{4\varepsilon_0 [2+(1+\mu)\varepsilon_0 z]}{(2l-1)^2 \pi^2 (1+\mu\varepsilon_0 z)(1+\varepsilon_0 z)} \sin[(2l-1)\theta_m^+(z)]. \quad (16)
 \end{aligned}$$

В соотношениях (13)–(16) индекс $l = 1, 2, \dots$

На рис. 5 и 6 приведены зависимости амплитуд $\varepsilon_{2l-1}(z)$ первых трёх нечётных гармоник от расстояния z ($\varepsilon_0 = 10^{-4}$) и от ε_0 ($z = 3 \cdot 10^5$) при $\mu = 0,5$. Из рис. 5 видно, что амплитуда $\varepsilon_1(z)$ первой гармоники монотонно уменьшается с ростом z из-за нелинейных потерь и генерации высших гармоник. Амплитуда $\varepsilon_3(z)$ третьей гармоники сначала, при малых z , уменьшается до некоторого минимума ($\varepsilon_3(0) > 0$), а далее немного растёт и вместе с амплитудой $\varepsilon_5(z)$ пятой гармоники медленно и монотонно затухает. Соответственно ведут себя и производные фаз этих гармоник. Из рис. 5 видно, что производная $\psi'_{1z}(z)$ монотонно изменяется по z , при этом $\psi'_{1z}(z) < 0$, а производные $[\Delta\psi_{2l-1}(z)]'_z = \psi'_{(2l-1)z}(z)/(2l-1) - \psi'_{1z}(z)$, где $2l-1 \geq 3$, изменяются немонотонно. Из рис. 5 можно заметить, что минимумы амплитуд $\varepsilon_{2l-1}(z)$ совпадают с экстремумами производных $[\Delta\psi_{2l-1}(z)]'_z$. Эти производные определяют зависимости изменения фазовых скоростей $C_1(z)$ и $C_{2l-1}(z)$ гармоник волны от расстояния z и от начальной амплитуды ε_0 :

$$\eta(\varepsilon_1) = \frac{\Delta C_1(z)}{C_0} = \frac{C_1(z) - C_0}{C_0} = a^* \psi'_{1z}(z) < 0,$$

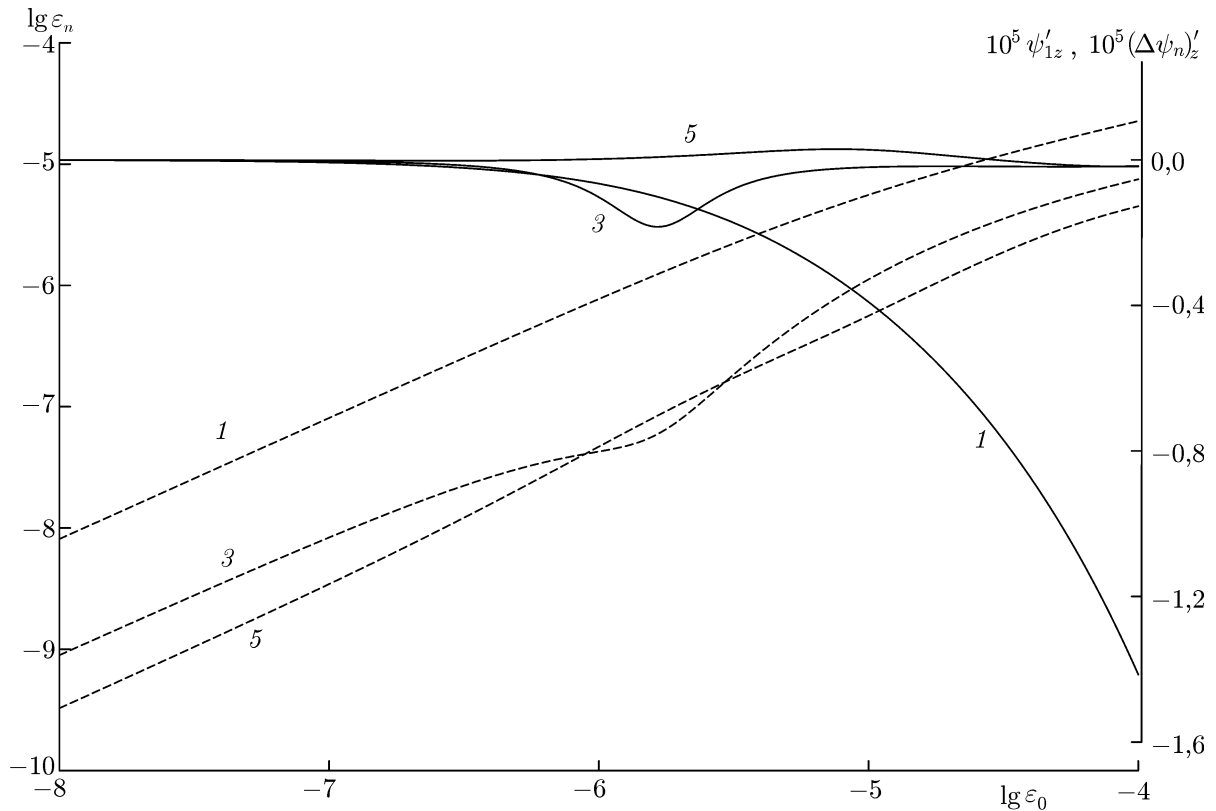


Рис. 6. Зависимости от ε_0 фурье-амплитуд $\varepsilon_n(z)$ (пунктирные линии) и производных фаз $\psi'_{1z}(z)$, $[\Delta\psi_n(z)]'_z$ (сплошные линии) для $n = 1, 3, 5$ в точке $z = 3 \cdot 10^5$. Номера кривых соответствуют номеру гармоники n

$$\eta_{2l-1}(\varepsilon_1) = \frac{C_{2l-1}(z) - C_1(z)}{C_0} = a^* [\Delta\psi_{2l-1}(z)]'_z, \quad (17)$$

где $2l - 1 \geq 3$, $a^* = \gamma_1/\pi$.

Из выражений (17) и рис. 5 следует, что распространение сильной и слабых гармоник с частотами ω и $(2l - 1)\omega$ соответственно происходит с близкими ($|\eta(\varepsilon_1)| \ll 1$, $|\eta_{2l-1}(\varepsilon_1)| \ll 1$), но различными фазовыми скоростями $C_1(z)$ и $C_{2l-1}(z) > C_1(z)$, которые зависят от расстояния z и начальной амплитуды ε_0 . Это соответствует тому, что в гистерезисной среде, описываемой уравнением (9), проявляется нелинейная дисперсия [10]. Об этом свидетельствует и вторая серия зависимостей амплитуд $\varepsilon_{2l-1}(z)$ и производных фаз $\psi'_{1z}(z)$ и $[\Delta\psi_{2l-1}(z)]'_z$ от начальной амплитуды ε_0 в точке $z = 3 \cdot 10^5$ (см. рис. 6). Из рис. 6 видно, что при увеличении ε_0 фурье-амплитуды $\varepsilon_{2l-1}(z)$ растут, причём $\varepsilon_{2l-1}(z) \propto \varepsilon_0$ при малых ε_0 , а при больших ε_0 из-за нелинейных потерь $\varepsilon_{2l-1}(z) \propto \varepsilon_0^{1/2}$, при $\varepsilon_0 \approx 10^{-6}$ в зависимости $\varepsilon_3(z)$ от ε_0 имеет место «провал». Из рис. 6 видно, что при увеличении ε_0 производные $\psi'_{1z}(z)$ и $[\Delta\psi_{2l-1}(z)]'_z$ также ведут себя по-разному: производная $\psi'_{1z}(z) < 0$ и монотонно уменьшается, а производные $[\Delta\psi_{2l-1}(z)]'_z$ изменяются немонотонно и имеют экстремумы. Из сравнения рис. 5 и 6 также можно заметить, что положение «провала» амплитуды $\varepsilon_3(z)$ совпадает с «провалом» производной $[\Delta\psi_3(z)]'_z$. Заметные отличия значений $\psi'_{1z}(z)$ и $[\Delta\psi_{2l-1}(z)]'_z$ и, соответственно, скоростей $C_1(z)$ и $C_{2l-1}(z)$, имеют место при больших амплитудах ε_0 , а при малых ε_0 они исчезают.

3. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПИЛООБРАЗНОЙ ВОЛНЫ В СРЕДЕ С НЕУПРУГИМ ГИСТЕРЕЗИСОМ

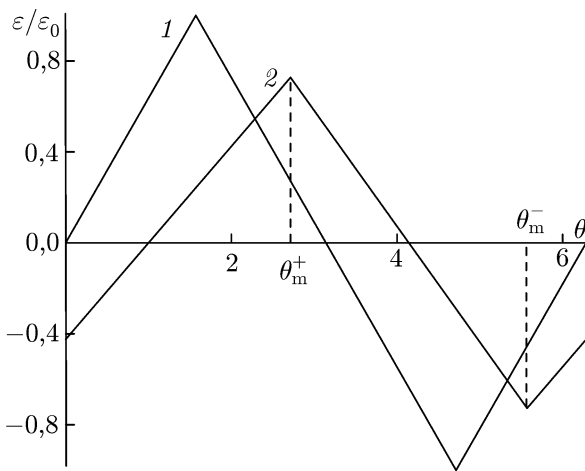


Рис. 7. Форма пилообразной волны в среде с неупругим гистерезисом при $z = 0$ (1) и $z > 0$ (2)

такого гистерезиса $\sigma(\varepsilon = 0) \neq 0$ и $\varepsilon(\sigma = 0) \neq 0$, поэтому его называют неупругим, или пластическим, гистерезисом, или гистерезисом трения [1–3].

Один период пилообразной волны в такой среде определяется следующим выражением (см. рис. 7):

$$\varepsilon(z, \theta) = \frac{2\varepsilon_0}{\pi} \times \begin{cases} \frac{1}{1 + \varepsilon_0 z} \left\{ \theta - \frac{\pi\alpha}{\beta_1 + \beta_2} \ln[1 + (1 + \mu)\varepsilon_0 z/2] \right\}, & \theta_m^-(z) \leq \theta \leq \theta_m^+(z); \\ \frac{1}{1 + \mu\varepsilon_0 z} \left\{ \pi - \theta + \frac{\pi\alpha}{\beta_1 + \beta_2} \ln[1 + (1 + \mu)\varepsilon_0 z/2] \right\}, & \theta_m^+(z) \leq \theta \leq \theta_m^-(z) + 2\pi. \end{cases} \quad (19)$$

Здесь $z = \beta_1 kx/\pi$, $\mu = \beta_2/\beta_1 \geq 0$, а фазы

$$\begin{aligned} \theta_m^+(z) &= \frac{\pi}{2} \frac{1 + \varepsilon_0 z}{1 + (1 + \mu)\varepsilon_0 z/2} + \frac{\alpha\pi}{\beta_1 + \beta_2} \ln[1 + (1 + \mu)\varepsilon_0 z/2], \\ \theta_m^-(z) &= \pi + \frac{\pi}{2} \frac{1 + \mu\varepsilon_0 z}{1 + (1 + \mu)\varepsilon_0 z/2} + \frac{\alpha\pi}{\beta_1 + \beta_2} \ln[1 + (1 + \mu)\varepsilon_0 z/2]. \end{aligned}$$

В такой среде при $\{\beta_1, \beta_2\} \geq 0$ разрывы в волне не образуются, а её амплитуда определяется выражением $\varepsilon_m(z) = \varepsilon_0/[1 + (1 + \mu)\varepsilon_0 z/2]$.

Разложим периодическую волну (19) в ряд Фурье:

$$\varepsilon(z, \theta) = \frac{4\varepsilon_0 [2 + (1 + \mu)\varepsilon_0 z]}{\pi^2 (1 + \varepsilon_0 z) (1 + \mu\varepsilon_0 z)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin[n\Phi(z)]}{n^2} \sin\{n[\theta - \Psi(z)]\}, \quad (20)$$

где

$$\Phi(z) = \frac{\pi}{2} \frac{1 + \varepsilon_0 z}{1 + (1 + \mu)\varepsilon_0 z/2}, \quad \Psi(z) = \frac{\pi\alpha}{\beta_1 + \beta_2} \ln[1 + (1 + \mu)\varepsilon_0 z/2].$$

Из выражения (20) следует, что скорость распространения гармоник пилообразной волны зависит от начальной амплитуды ε_0 и от расстояния z , однако все гармоники бегут с одной и той же скоростью

$$C(z) = C_0 \left[1 - \frac{\alpha\varepsilon_0}{2 + (1 + \mu)\varepsilon_0 z} \right] = C_0 [1 - \alpha\varepsilon_m(z)/2]. \quad (21)$$

Рассмотрим теперь распространение пилообразной волны (4) в среде с неупругим гистерезисом, для которого нелинейная функция $f(\varepsilon)$ имеет вид [3]:

$$f(\varepsilon) = \alpha\varepsilon_m\varepsilon + \frac{1}{2} \times \begin{cases} \beta_1\varepsilon^2 - (\beta_1 + \beta_2)\varepsilon_m^2/2, & \varepsilon'_t > 0; \\ -\beta_2\varepsilon^2 - (\beta_1 + \beta_2)\varepsilon_m^2/2, & \varepsilon'_t < 0, \end{cases} \quad (18)$$

где α, β_1, β_2 — параметры нелинейности, $|\alpha|\varepsilon_m \ll \ll 1, \beta_1 + \beta_2 > 0, |\beta_1|\varepsilon_m \ll 1, |\beta_2|\varepsilon_m \ll 1$.

В этом уравнении первое (негистерезисное) слагаемое $\alpha\varepsilon_m\varepsilon$ определяет дефект модуля (или нелинейную поправку к скорости распространения волны), а второе (гистерезисное) — амплитудно-зависимые потери и генерацию гармоник. Для

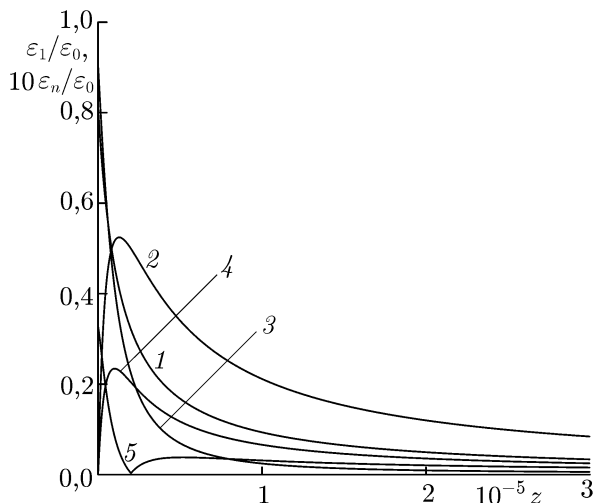


Рис. 8. Зависимости амплитуд $\varepsilon_n(z)$ первых пяти фурье-гармоник от расстояния z при $\varepsilon_0 = 10^{-4}$. Номер кривой соответствует номеру гармоники n

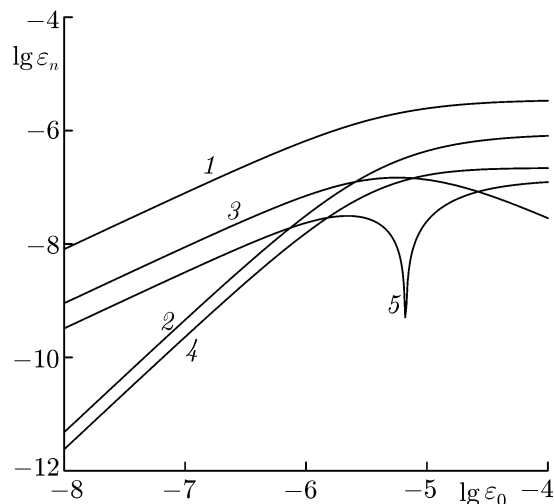


Рис. 9. Зависимости амплитуд $\varepsilon_n(z)$ первых пяти фурье-гармоник от ε_0 при $z = 3 \cdot 10^5$. Номер кривой соответствует номеру гармоники n

Таким образом, в среде с неупругим гистерезисом (19) нелинейной дисперсии нет, и пилообразная волна качественно эволюционирует так же, как и в упругой среде с квадратичной нелинейностью. Отличие заключается лишь в том, что в среде с неупругим гистерезисом разрывы в волне не образуются, но, из-за гистерезисных потерь, волна нелинейно затухает.

На рис. 8 и 9 приведены зависимости амплитуд $\varepsilon_n(z)$ первых пяти гармоник от расстояния z (при $\varepsilon_0 = 10^{-4}$) и от ε_0 (при $z = 3 \cdot 10^5$) при $\mu = 0,5$. Из рис. 8 видно, что с ростом z амплитуды первой $\varepsilon_1(z)$ и третьей $\varepsilon_3(z)$ фурье-гармоник из-за гистерезисных потерь монотонно уменьшаются. Амплитуда $\varepsilon_5(z)$ пятой фурье-гармоники при малых z уменьшается до нуля, а далее немного растёт и вместе с амплитудами $\varepsilon_1(z)$ и $\varepsilon_3(z)$ медленно и монотонно затухает. Амплитуды чётных фурье-гармоник $\varepsilon_2(z)$ и $\varepsilon_4(z)$ при малых z увеличиваются от нуля, достигают максимума и затем монотонно затухают. Соответственно ведут себя и зависимости амплитуд фурье-гармоник от ε_0 при $z = \text{const}$. Из рис. 9 видно, что при увеличении ε_0 фурье-амплитуды $\varepsilon_{2l-1}(z)$ растут, причём при малых ε_0 амплитуды $\varepsilon_{2l-1}(z) \propto \varepsilon_0$, $\varepsilon_{2l}(z) \propto \varepsilon_0^2$, а при больших ε_0 из-за нелинейных потерь

$$\varepsilon_1(z) = \frac{4(1 + \mu)}{\pi^2 \mu z} \sin\left(\frac{\pi}{1 + \mu}\right) \propto z^{-1}.$$

Координаты z_0 нулевых значений амплитуд $\varepsilon_n(z_0) = 0$ гармоник $n \geq 2$ определяются из уравнения $\sin[n\Phi(z_0)] = 0$. Здесь биения амплитуд высших фурье-гармоник также связаны с резонансными взаимодействиями кратных гармоник, составляющих непрерывно меняющуюся форму периодической пилообразной волны.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе сравнительного анализа точных решений задач о распространении и эволюции периодических пилообразных акустических волн в гистерезисных средах и в среде с упругой квадратичной нелинейностью в работе определены основные закономерности для характеристик этих волн, а также принципиальные отличия таких сред друг от друга. Показано, что среды с упругим гистерезисом, в отличие от сред с упругой квадратичной нелинейностью и сред с неупругим ги-

стерезисом, обладают нелинейной дисперсией. Изучение эффектов, связанных с нелинейной дисперсией среды, может способствовать правильному выбору гистерезисного уравнения состояния, что необходимо для объяснения и интерпретации результатов экспериментальных исследований нелинейных акустических эффектов в средах с гистерезисной нелинейностью.

Авторы благодарят Е. А. Шеронова за интерес к работе и полезные дискуссии. Работа поддержана РФФИ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Asano S. // J. Phys. Soc. Jap. 1970. V. 29, No. 4. P. 952.
2. Лебедев А. Б. // Физика твёрдого тела. 1999. Т. 41, № 7. С. 1214.
3. Назаров В. Е., Радостин А. В., Островский Л. А., Соустова И. А. // Акуст. журн. 2003. Т. 49, № 3. С. 405.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с.
5. Зарембо Л. К., Красильников В. А. Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1966.
6. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 288 с.
7. Назаров В. Е. // Акуст. журн. 1997. Т. 43, № 2. С. 81.
8. Gusev V. // J. Acoust. Soc. Amer. 2000. V. 107, No. 6. P. 3047.
9. Назаров В. Е., Сутин А. М. // Акуст. журн. 1989. Т. 35, № 4. С. 711.
10. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. М.: Наука, 1990.

Поступила в редакцию 24 февраля 2014 г.; принята в печать 12 января 2015 г.

SAW-TOOTH ACOUSTIC WAVES IN MEDIA WITH HYSTERESIS NONLINEARITY

V. E. Nazarov and S. B. Kiyashko

We study propagation of periodic saw-tooth waves in nondispersive media with quadratic elastic and hysteresis nonlinearity. By comparing exact solutions for saw-tooth waves and their spectral characteristics, we identified regularities in the behavior of nonlinear acoustic effects in such media. It is shown that as distinct from the case of a medium with quadratic elastic nonlinearity, the effects of nonlinear dispersion can manifest themselves in hysteresis media.