

УДК 621.391.1

## РЕГУЛЯРИЗОВАННАЯ ОЦЕНКА ВЕСОВОГО ВЕКТОРА АДАПТИВНОГО КОМПЕНСАТОРА ПОМЕХИ

В. Т. Ермолаев<sup>1</sup>, И. С. Сорокин<sup>1\*</sup>, А. Г. Флакман<sup>1</sup>, А. В. Ястребов<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского;

<sup>2</sup> Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексева, г. Нижний Новгород, Россия

Рассматривается адаптивный многоканальный компенсатор помехи, обеспечивающий минимальное значение её средней выходной мощности. Предлагается формировать весовой вектор такого компенсатора в виде разложения по степенным векторам. Показано, что данный подход позволяет получить точное аналитическое решение для оптимального весового вектора благодаря применению процедуры ортогонализации степенных векторов. В случае ограниченного числа выборок входного процесса решение становится некорректным и требуется его регуляризация. Предложен эффективный метод регуляризации, который обеспечивает высокую степень подавления помехи и не включает в себя процедуру обращения корреляционной матрицы помехи, что существенно снижает вычислительные затраты на оценку весового вектора.

### ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим многоканальный компенсатор помехи (МКП), который состоит из основного (нерегулируемого) и  $N$  компенсационных (регулируемых) входов. Помеха поступает на основной и компенсационные входы МКП в виде случайных стационарных комплексных гауссовых процессов  $x_0$  и  $x_n$  ( $n = 1, \dots, N$ ) с нулевыми средними значениями ( $\langle x_0 \rangle = \langle x_n \rangle = 0$ ) и дисперсиями  $\langle |x_0|^2 \rangle = \sigma_0^2$  и  $\langle |x_n|^2 \rangle = \sigma_n^2$ , где угловыми скобками обозначено статистическое усреднение. Процессы  $x_n$  умножаются на весовые коэффициенты  $w_n^*$  (индекс «звёздочка» означает комплексное сопряжение) и суммируются с процессом  $x_0$ . Схема МКП приведена на рис. 1.

На выходе системы получается случайный процесс

$$y = x_0 + \mathbf{W}^H \mathbf{X}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{X}$  — вектор комплексных амплитуд  $x_n$  помехи на компенсационных входах,  $\mathbf{W}$  — вектор весовых коэффициентов  $w_n$ , индексом «Н» обозначено эрмитово сопряжение. Критерием эффективности МКП является минимум средней мощности выходного процесса, которая определяется выражением

$$I(\mathbf{W}) = \langle |y|^2 \rangle = \langle |x_0 + \mathbf{W}^H \mathbf{X}|^2 \rangle. \quad (2)$$

В отношении полезного сигнала будем считать, что он подаётся только на основной вход МКП и не коррелирован с помехой. Это позволяет ограничиться только анализом помехи, т. к. мощность полезного сигнала остаётся постоянной при изменении весового вектора  $\mathbf{W}$ .

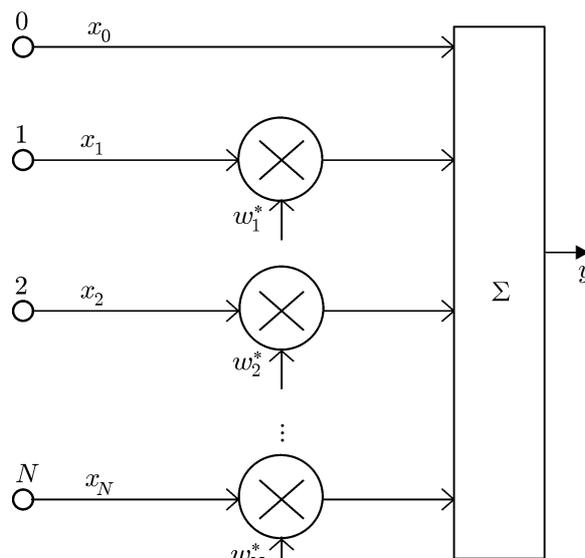


Рис. 1

\* igor.s.sorokin@gmail.com

Минимизация квадратичного функционала  $I(\mathbf{W})$  в выражении (2) приводит к основному уравнению МКП (см., например, [1, 2]):

$$\mathbf{R}\mathbf{W} = -\mathbf{P}. \quad (3)$$

Здесь вектор  $\mathbf{P}$  представляет собой  $N$ -мерный корреляционный вектор  $\langle \mathbf{X}x_0^* \rangle$ , элементами которого являются корреляционные моменты  $\langle x_n x_0^* \rangle$ ,  $\mathbf{R} = \langle \mathbf{X}\mathbf{X}^H \rangle$  — корреляционная матрица помехи с размерностью  $N \times N$ . Элементами этой матрицы являются взаимные корреляции  $\langle x_n x_m^* \rangle$  помехи на компенсационных входах МКП.

Формальное решение уравнения (3) требует обращения матрицы, т. к.

$$\mathbf{W} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{P}. \quad (4)$$

Подставив оптимальный весовой вектор (4) в выражение (2), получим минимальное значение средней мощности шума на выходе МКП

$$I_{\min} = \sigma_0^2 - \mathbf{P}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{P} = \sigma_0^2 + \mathbf{P}^H \mathbf{W}. \quad (5)$$

Эффективность МКП обычно оценивается величиной коэффициента подавления помехи, который определяется как отношение средней мощности  $\sigma_0^2$  помехи на основном входе к средней мощности  $I_{\min}$  помехи на выходе МКП. Однако удобнее пользоваться величиной  $B$ , обратной коэффициенту подавления, которая даёт нормированную выходную мощность помехи и равна

$$B = \frac{I_{\min}}{\sigma_0^2} = 1 + \frac{\mathbf{P}^H \mathbf{W}}{\sigma_0^2}. \quad (6)$$

Важное свойство МКП заключается в том, что в оптимальном режиме выходной сигнал декоррелирует со всеми сигналами на компенсационных входах, т. е.  $\langle \mathbf{X}y^* \rangle = 0$ . Это свойство широко использовалось на начальном этапе развития теории и техники компенсаторов, когда ещё не существовало цифровой обработки сигналов. Дело в том, что с помощью аналоговых устройств реализовать требуемую в (4) нелинейную процедуру обращения матрицы  $\mathbf{R}$  было сложно. Поэтому применялись градиентные алгоритмы поиска весового вектора МКП [3–8], которые использовали только оценку градиента функционала (2). Исследование статистических характеристик компенсаторов выполнено в работах [3–5]. Один из существенных недостатков градиентных алгоритмов заключается в том, что при их применении наблюдается затягивание переходных процессов, особенно при большом числе компенсационных входов. Это объясняется плохой обусловленностью корреляционной матрицы  $\mathbf{R}$ .

Для преодоления указанного недостатка были предложены алгоритмы обработки, основанные на предварительной декорреляции помехи. Декоррелятор обеспечивает такое преобразование помехи, при котором корреляционная матрица становится диагональной и имеющей одинаковые собственные числа. Это позволяет в некоторой степени ускорить процесс адаптации. В частности, в работе [9] предложена и исследована структура МКП в виде последовательно-параллельного соединения одноканальных компенсаторов. В работе [10] изучены структуры МКП на основе решётчатых фильтров. Подобные структуры образованы однотипными элементами, что важно с технологической точки зрения. Однако число этих элементов быстро увеличивается при увеличении числа компенсационных входов. Так, число одноканальных компенсаторов в последовательно-параллельной структуре растёт пропорционально  $N^2$ .

Современные методы цифровой обработки сигналов позволяют выполнять непосредственное обращение корреляционной матрицы  $\mathbf{R}$ . При этом вместо неизвестной точной матрицы  $\mathbf{R}$  и вектора  $\mathbf{P}$  используются их максимально правдоподобные оценки [7, 8, 11]:

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \mathbf{X}(l)\mathbf{X}^H(l), \quad \hat{\mathbf{P}} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \mathbf{X}(l)x_0^*(l), \quad (7)$$

где  $L$  — число временных обучающих выборок вектора  $\mathbf{X}$  случайных комплексных амплитуд входного шума,  $l$  — номер выборки. Временной интервал  $\Delta t$  между соседними выборками выбирается таким, чтобы обеспечить некоррелированность этих выборок, т. е.  $\Delta t \geq (\Delta f)^{-1}$ , где  $\Delta f$  — ширина полосы.

Вычислительная сложность процедуры обращения матрицы пропорциональна  $N^3$  и, следовательно, резко возрастает с ростом числа компенсационных входов. Другая проблема связана с тем, что при  $L \approx N$  матрица  $\mathbf{R}$  в выражении (7) является плохообусловленной, а в важном случае короткой выборки входного процесса, когда число выборок меньше числа компенсационных входов ( $L < N$ ), становится вырожденной. Задачи, связанные с обращением плохообусловленных матриц, относятся к классу некорректных задач [12]. Для их решения следует использовать методы регуляризации [12, 13].

Подобные проблемы характерны для адаптивных антенных решёток [11, 14–20]. Для таких систем предложен ряд методов регуляризации весового вектора. В частности, представляют интерес методы обработки сигналов на основе ортогонализации степенных векторов [16–19]. Такие методы обеспечивают высокую эффективность подавления источников помехи и характеризуются относительно невысокой вычислительной сложностью.

С учётом схожести принципов обработки сигналов в антенных решётках и компенсаторах помехи, представляет интерес исследование эффективности работы регуляризационных алгоритмов, разработанных для антенных решёток, в МКП. В данной работе изучается эффективность подавления помехи в МКП и сложность вычислительного алгоритма при оценке весового вектора с помощью ортогонализации степенных векторов.

## 1. РЕШЕНИЕ ДЛЯ ОПТИМАЛЬНОГО ВЕСОВОГО ВЕКТОРА

Сначала рассмотрим работу МКП в простом случае одного источника помехи. В этой ситуации входные процессы  $x_0$  и  $x_n$  зададим следующим образом:

$$x_0 = x + \xi_0, \quad x_n = \mu_n \exp(i\varphi_n)x + \xi_n, \quad (8)$$

где  $n = 1, \dots, N$ ,  $x$  — внешняя помеха, мощность которой равна  $\sigma^2$ ;  $\xi_0$  и  $\xi_n$  — собственный шум в основном и  $n$ -ом компенсационном каналах МКП с мощностью  $\sigma_{\text{noise}}^2$ ; коэффициенты  $\mu_n$  характеризуют различие коэффициентов усиления процесса  $x$  в основном и  $n$ -ом компенсационном входах МКП;  $\varphi_n$  — разность фаз комплексных амплитуд на этих входах. Будем считать, что собственные шумы  $\xi_0$  и  $\xi_n$  взаимно не коррелированы и не коррелированы с внешней помехой  $x$ .

Запишем корреляционный вектор  $\mathbf{P}$  в виде

$$\mathbf{P} = \langle \mathbf{X}x_0^* \rangle = \sigma^2 \mathbf{\Phi}, \quad (9)$$

где компонентами вектора  $\mathbf{\Phi}$  являются комплексные числа  $\mu_n \exp(i\varphi_n)$ ,  $n = 1, \dots, N$ . Корреляционную матрицу  $\mathbf{R}$  можно представить в виде

$$\mathbf{R} = \langle \mathbf{X}\mathbf{X}^H \rangle = \sigma_{\text{noise}}^2 \mathbf{I} + \sigma^2 \mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}^H. \quad (10)$$

Обратим внимание на то, что корреляционный вектор (9) является собственным вектором матрицы (10). Действительно, умножим (9) на (10) и получим, что

$$\mathbf{R}\mathbf{P} = (\sigma_{\text{noise}}^2 \mathbf{I} + \sigma^2 \mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}^H) \mathbf{P} = \lambda \mathbf{P}, \quad (11)$$

где  $\lambda = (\sigma_{\text{noise}}^2 + \sigma^2 \mathbf{\Phi}^H \mathbf{\Phi}) = \sigma_{\text{noise}}^2 + \sigma^2 (\mu_1^2 + \mu_2^2 \cdots + \mu_N^2)$  — собственное число матрицы  $\mathbf{R}$ . Решение уравнения (3) в этом случае имеет простой вид

$$\mathbf{W} = -\mathbf{P}/\lambda. \quad (12)$$

Отсюда следует важный вывод, что в случае одного источника помехи нет необходимости обрабатывать корреляционную матрицу, а достаточно вычислить корреляционный вектор и определить скалярный множитель. Из выражения (5) находим, что минимальное значение мощности шума на выходе компенсатора равно

$$I_{\min} = \sigma_0^2 - |\mathbf{P}|^2/\lambda. \quad (13)$$

Построим решение уравнения (3) в случае  $J$  ( $J \leq N$ ) внешних некоррелированных источников шума. При этом для входных сигналов вместо (8) имеем

$$x_0 = \sum_{j=1}^J x^{(j)} + \xi_0, \quad x_n = \sum_{j=1}^J \mu_{nj} \exp(i\varphi_{nj}) x^{(j)} + \xi_n, \quad (14)$$

где  $n = 1, \dots, N$ ,  $x^{(j)}$  — помеха на входе основного канала от  $j$ -го источника с мощностью  $p_j$ .

Теперь вместо (9) и (10) получим следующие выражения для корреляционного вектора и корреляционной матрицы:

$$\mathbf{P} = \langle \mathbf{X}x_0^* \rangle = \sum_{j=1}^J p_j \mathbf{\Phi}_j, \quad \langle \mathbf{X}\mathbf{X}^H \rangle = \sigma_{\text{noise}}^2 \mathbf{I} + \sum_{j=1}^J p_j \mathbf{\Phi}_j \mathbf{\Phi}_j^H. \quad (15)$$

Корреляционный вектор  $\mathbf{P}$  лежит в подпространстве, образованном векторами  $\mathbf{\Phi}_j$ . Корреляционная матрица  $\mathbf{R}$  имеет в этом подпространстве  $J$  собственных векторов  $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_J$ , соответствующих  $J$  собственным числам  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_J$ . Другие собственные векторы сосредоточены в ортогональном подпространстве, свободном от источников помехи и имеющем размерность  $(N - J)$ . Применяя разложение по проекционным матрицам, получим, что обратная корреляционная матрица и весовой вектор равны

$$\mathbf{R}^{-1} = \sum_{j=1}^J \frac{1}{\lambda_j} \mathbf{U}_j \mathbf{U}_j^H + \frac{1}{\sigma_{\text{noise}}^2} \left( \mathbf{I} - \sum_{j=1}^J \mathbf{U}_j \mathbf{U}_j^H \right), \quad \mathbf{W} = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{P} = - \sum_{j=1}^J \frac{1}{\lambda_j} (\mathbf{U}_j^H \mathbf{P}) \mathbf{U}_j. \quad (16)$$

Формула (16) показывает, что оптимальный весовой вектор МКП принадлежит только подпространству, образованному векторами  $\mathbf{\Phi}_j$ . В этом подпространстве можно ввести другую базисную систему векторов, а именно:  $\mathbf{P}, \mathbf{R}\mathbf{P}, \mathbf{R}^2\mathbf{P}, \dots, \mathbf{R}^{K-1}\mathbf{P}$ , где  $K \leq J$ . Это так называемые степенные векторы [21]. Число  $K$  линейно независимых степенных векторов равно степени минимального многочлена, аннулирующего вектор  $\mathbf{P}$  [21].

Степенные векторы применялись для построения и регуляризации весового вектора адаптивной антенной решётки [16–19]. Покажем, что решение для МКП можно получить аналогичным образом.

Ортогонализация и нормировка степенных векторов начинается с вектора  $\mathbf{P}$  и выполняется по следующей схеме [22, 23]:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{F}}_1 &= \mathbf{P}, & \mathbf{F}_1 &= (\hat{\mathbf{F}}_1^H \hat{\mathbf{F}}_1)^{-1/2} \hat{\mathbf{F}}_1, \\ \hat{\mathbf{F}}_2 &= \mathbf{R}\mathbf{F}_1 - \alpha_1 \mathbf{F}_1, & \mathbf{F}_2 &= (\hat{\mathbf{F}}_2^H \hat{\mathbf{F}}_2)^{-1/2} \hat{\mathbf{F}}_2, \\ \hat{\mathbf{F}}_3 &= \mathbf{R}\mathbf{F}_2 - \alpha_2 \mathbf{F}_2 - \beta_1 \mathbf{F}_1, & \mathbf{F}_3 &= (\hat{\mathbf{F}}_3^H \hat{\mathbf{F}}_3)^{-1/2} \hat{\mathbf{F}}_3, \\ & & & \dots, \\ \hat{\mathbf{F}}_K &= \mathbf{R}\mathbf{F}_{K-1} - \alpha_{K-1} \mathbf{F}_{K-1} - \beta_{K-2} \mathbf{F}_{K-2}, & \mathbf{F}_K &= (\hat{\mathbf{F}}_K^H \hat{\mathbf{F}}_K)^{-1/2} \hat{\mathbf{F}}_K, \end{aligned} \tag{17}$$

где  $\alpha_{k-1} = (\mathbf{F}_{k-1}^H \mathbf{R}\mathbf{F}_{k-1})$  для  $2 \leq k \leq K$  и  $\beta_{k-2} = (\mathbf{F}_{k-1}^H \mathbf{R}\mathbf{F}_{k-2})$  для  $3 \leq k \leq K$  — действительные коэффициенты.

В результате ортогонализации (17) образуется система из  $K$  ортонормированных векторов  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_K$ . Представим весовой вектор в виде разложения по этим векторам:

$$\mathbf{W} = c_1 \mathbf{F}_1 + c_2 \mathbf{F}_2 + \dots + c_K \mathbf{F}_K = \mathbf{F}\mathbf{C}. \tag{18}$$

Здесь введены матрица  $\mathbf{F}$ , составленная из вектор-столбцов  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_K$ , и вектор-столбец  $\mathbf{C}$ , элементами которого являются коэффициенты разложения  $c_1, c_2, \dots, c_K$ . Чтобы найти вектор  $\mathbf{C}$ , подставим (18) в (3) и умножим слева на матрицу  $\mathbf{F}^H$ . В результате получим следующую систему уравнений с размерностью  $K \times K$ :

$$\mathbf{F}^H \mathbf{R}\mathbf{F}\mathbf{C} = -\mathbf{F}^H \mathbf{P}. \tag{19}$$

Из (17) следует, что каждый ортогональный вектор, начиная с третьего, формируется с использованием только двух предыдущих векторов. Благодаря такому свойству системы степенных векторов, матрица  $\mathbf{F}^H \mathbf{R}\mathbf{F}$  является трёхдиагональной, а вектор  $\mathbf{F}^H \mathbf{P}$  имеет только первый ненулевой элемент, равный  $\beta_0 = |\mathbf{P}|$  [22, 23]:

$$\mathbf{F}^H \mathbf{R}\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \alpha_3 & \ddots & 0 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \ddots & \beta_j & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_j & \alpha_{j+1} & \ddots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \ddots & \beta_{K-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{K-1} & \alpha_K \end{pmatrix}; \quad \mathbf{F}^H \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Такой вид матрицы  $\mathbf{F}^H \mathbf{R}\mathbf{F}$  и вектора  $\mathbf{F}^H \mathbf{P}$  позволяет получить точное аналитическое решение для коэффициентов  $c_1, c_2, \dots, c_K$  [22, 23]:

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{\beta_0}{\alpha_1 - \frac{\beta_1^2}{\alpha_2 - \frac{\beta_2^2}{\ddots - \frac{\beta_{K-1}^2}{\alpha_K}}}}, & c_2 &= -\frac{\alpha_1 c_1 + \beta_0}{\beta_1}, \\ c_n &= -\frac{\beta_{n-2} c_{n-2} + \alpha_{n-1} c_{n-1}}{\beta_{n-1}}, & n &= 3, 4, \dots, K. \end{aligned} \tag{21}$$

Учитывая ортогональность векторов  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_K$ , получим, что минимальное значение мощности помехи на выходе компенсатора равно

$$I_{\min}(K) = \sigma_0^2 + \mathbf{P}^H \mathbf{F} \mathbf{C} = \sigma_0^2 + \mathbf{P}^H (\mathbf{F}_1 c_1 + \mathbf{F}_2 c_2 + \dots + \mathbf{F}_K c_K) = \sigma_0^2 + c_1 |\mathbf{P}|, \quad (22)$$

или, используя (21), найдём, что

$$I_{\min}(K) = \sigma_0^2 - \frac{|\mathbf{P}|^2}{\alpha_1 - \frac{\beta_1^2}{\alpha_2 - \frac{\beta_2^2}{\dots \frac{\beta_{K-1}^2}{\alpha_K}}}}. \quad (23)$$

Если процесс ортогонализации обрывать принудительно при некотором  $k < K$ , то обработка будет квазиоптимальной. Например, можно ограничиться одним вектором  $\mathbf{F}_1$  или двумя векторами  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ . Тогда выражение (23) принимает вид

$$I_{\min} = \sigma_0^2 - \frac{|\mathbf{P}|^2}{\mathbf{F}_1^H \mathbf{R} \mathbf{F}_1}, \quad I_{\min} = \sigma_0^2 - \frac{|\mathbf{P}|^2}{\mathbf{F}_1^H \mathbf{R} \mathbf{F}_1 - (\mathbf{F}_2^H \mathbf{R} \mathbf{F}_2)^2 / (\mathbf{F}_2^H \mathbf{R} \mathbf{F}_2)} \quad (24)$$

соответственно. По мере увеличения числа базисных векторов, как показывает формула (23), средняя мощность помехи на выходе компенсатора уменьшается и достигает минимального значения при полном размере базиса, равном  $K$ .

Полученное решение будем использовать для построения адаптивного алгоритма.

## 2. АДАПТИВНЫЙ АЛГОРИТМ

На практике мы имеем дело с  $L$  обучающими выборками помехи и пользуемся максимально правдоподобными оценками (7) для матрицы  $\mathbf{R}$  и вектора  $\mathbf{P}$ . В этом случае число  $K$  независимых базисных степенных векторов становится равным числу компенсационных входов  $N$ , если  $L \geq N$ , или числу выборок  $L$ , если  $L < N$  (короткая выборка входного процесса). Это обусловлено случайным характером оценок (7) и связано с ограниченным числом выборок  $L$ . Формальное применение процесса ортогонализации (17) приводит к формированию ортонормированной системы векторов с максимальной размерностью. В свою очередь, это приводит к уменьшению эффективности подавления помехи и возрастанию вычислительной сложности.

Далее при моделировании будем рассматривать 15-канальный МКП ( $N = 15$ ). Число источников помехи  $J = 1$  или  $J = 5$ , а их мощности равны 1000 (при  $J = 1$ ) и 200 (при  $J = 5$ ). Средняя мощность собственного шума  $\sigma_{\text{noise}}^2 = 1$ . Коэффициенты усиления  $\mu_{nj}$  в (14) для всех компенсационных входов ( $n = 1, 2, \dots, 15$ ) равны  $\mu_{nj} = 1,4; 1,2; 5,5, 5,5$  и  $-3,4$  дБ для  $j = 1, 2, 3, 4, 5$  соответственно, а фазы  $\varphi_{nj}$  равномерно распределены в интервале  $[0, 2\pi]$ . Число выборок входного процесса  $L = 15$  или  $L = 60$ . Оценка корреляционной матрицы и корреляционного вектора выполнялась с помощью (7), а оценка нормированной выходной мощности  $B$  помехи в формуле (6) выполнялась по 10 000 реализациям входного процесса после завершения процесса обучения.

На рис. 2 показаны результаты моделирования для нормированной выходной мощности  $B$  помехи в зависимости от числа  $k$  базисных векторов. Горизонтальная штриховая линия соответствует предельному (вычисленному по формуле (6)) значению нормированной мощности на выходе МКП при точно известных корреляционной матрице и корреляционном векторе (т. е. при

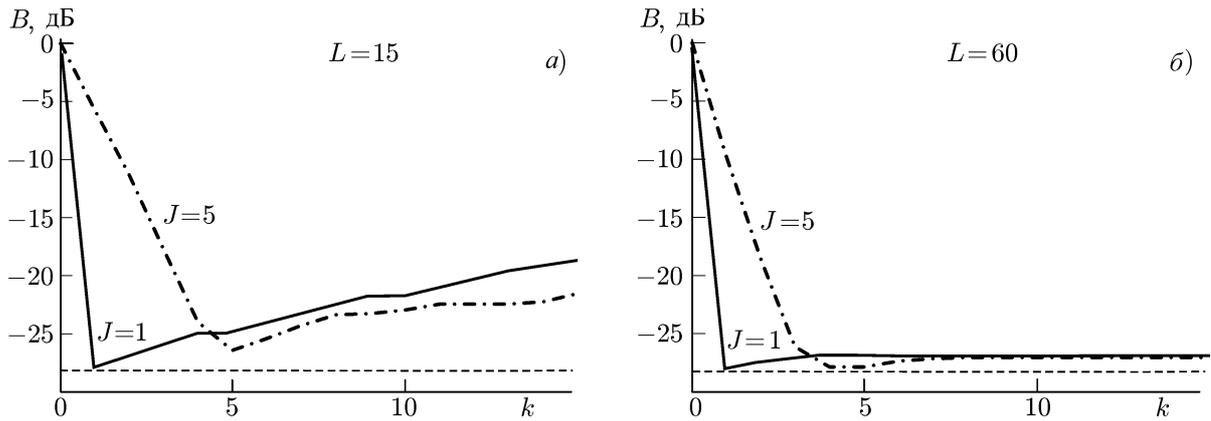


Рис. 2

$L = \infty$ ). Как видно, мощность помехи на выходе МКП достигает минимального значения, когда число сформированных вспомогательных векторов равно числу источников помехи ( $k = J$ ). Формирование базисных векторов сверх необходимого числа ( $k > J$ ) приводит к снижению эффективности МКП, особенно в случае короткой выборки входного процесса.

Этот эффект можно объяснить следующим образом. Собственные числа матрицы  $\hat{\mathbf{R}}$  из (7) являются неотрицательными случайными числами и могут принимать значения, близкие или равные нулю, а корреляционный вектор  $\hat{\mathbf{P}}$  имеет ненулевые случайные компоненты в подпространстве с размерностью  $(N - J)$ , ортогональном подпространству источников помехи. В результате вместо (16) для оценки весового вектора МКП получим

$$\hat{\mathbf{W}} = -\hat{\mathbf{R}}^{-1}\hat{\mathbf{P}} = -\left[ \sum_{j=1}^J \frac{1}{\hat{\lambda}_j} (\hat{\mathbf{U}}_j^H \hat{\mathbf{P}}) \hat{\mathbf{U}}_j + \sum_{j=J+1}^N \frac{1}{\hat{\lambda}_j} (\hat{\mathbf{U}}_j^H \hat{\mathbf{P}}) \hat{\mathbf{U}}_j \right]. \quad (25)$$

Второе слагаемое в квадратных скобках может принимать большие значения, когда собственные числа близки к нулю, или быть полностью неопределённым, если хотя бы одно собственное число равно нулю. В этом проявляется некорректность решения. Заметим, что этот эффект имеет общий характер и проявляется при использовании любого адаптивного алгоритма, если регуляризация не применяется. При  $L = \infty$  второе слагаемое в (25) стремится к нулю и решение становится корректным.

Для устранения указанного эффекта выполним регуляризацию решения, ограничивая число базисных векторов. Для регуляризации обычно рекомендуется использовать имеющуюся априорную информацию, исходящую из физического содержания задачи [12]. В данном случае учтём, что в системе имеется собственный шум с известными статистическими характеристиками. Корреляционная матрица этого шума в компенсационных каналах имеет вид  $\gamma \mathbf{I}$ . Такой же корреляционная матрица собственного шума должна быть и после ортогонализации, поскольку система базисных векторов ортонормирована. Каждый дополнительный базисный вектор в разложении (18) не только способствует уменьшению мощности помехи на выходе МКП, но и добавляет долю собственного шума величины  $\gamma$ . Минимум мощности помехи на выходе МКП должен получаться тогда, когда доля компенсированной помехи равна добавленному собственному шуму. Если доля компенсированной помехи становится меньше добавленного собственного шума, то процесс ортогонализации следует останавливать и такой базисный вектор не следует принимать во внимание. Такова идея регуляризации в нашем случае.

С учётом имитации вклада собственного шума оценку выходной мощности помехи на каждом шаге ортогонализации (17) будем выполнять по обучающей выборке длины  $L$  следующим

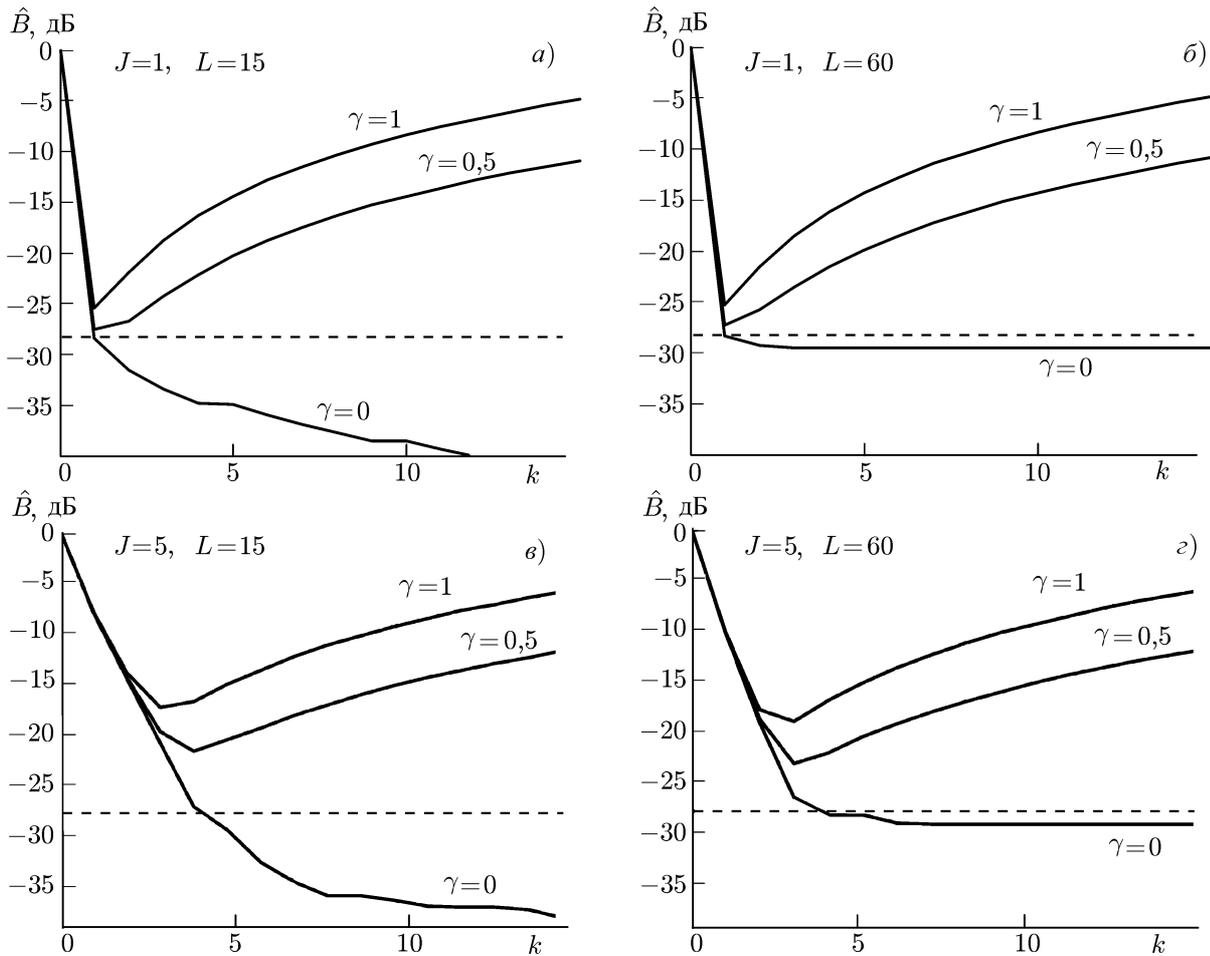


Рис. 3

образом:

$$\hat{I}_{\min}(k) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L |y(l, k)|^2 + \gamma k = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L |x_0(l) + \hat{\mathbf{W}}^H(k)\mathbf{X}(l)|^2 + \gamma k. \tag{26}$$

Учтём, что формула (26) при  $k = 0$  даёт оценку входной мощности помехи в основном канале МКП. Поэтому оценка нормированной мощности помехи (6) на выходе МКП будет равна  $\hat{B}(k) = \hat{I}_{\min}(k)/\hat{I}_{\min}(0)$ . Поведение этой оценки в зависимости от числа  $k$  базисных векторов при различных значениях  $\gamma$  приведено на рис. 3 для  $J = 1, L = 15$  (а);  $J = 1, L = 60$  (б);  $J = 5, L = 15$  (в) и  $J = 5, L = 60$  (г). Горизонтальные штриховые линии показывают минимальное значение нормированной выходной мощности МКП при точно известных корреляционной матрице и корреляционном векторе (т. е. при  $L = \infty$ ).

Если  $\gamma = 0$  (нет регуляризации), то оценка нормированной выходной мощности МКП непрерывно уменьшается и уходит в область ниже штрихованной прямой, т. е. принимает значения меньше теоретически допустимого. Область ниже штрихованной прямой можно назвать областью некорректного решения. При  $\gamma > 0$  регуляризованная оценка нормированной выходной мощности МКП имеет минимум, что позволяет делать оценку необходимого и достаточного числа базисных векторов. Для этого в процессе ортогонализации на каждом шаге должна выполняться оценка (26) выходной мощности, и этот процесс останавливается при достижении минимального значения оценки. При моделировании предполагалось, что средняя мощность собственного шума

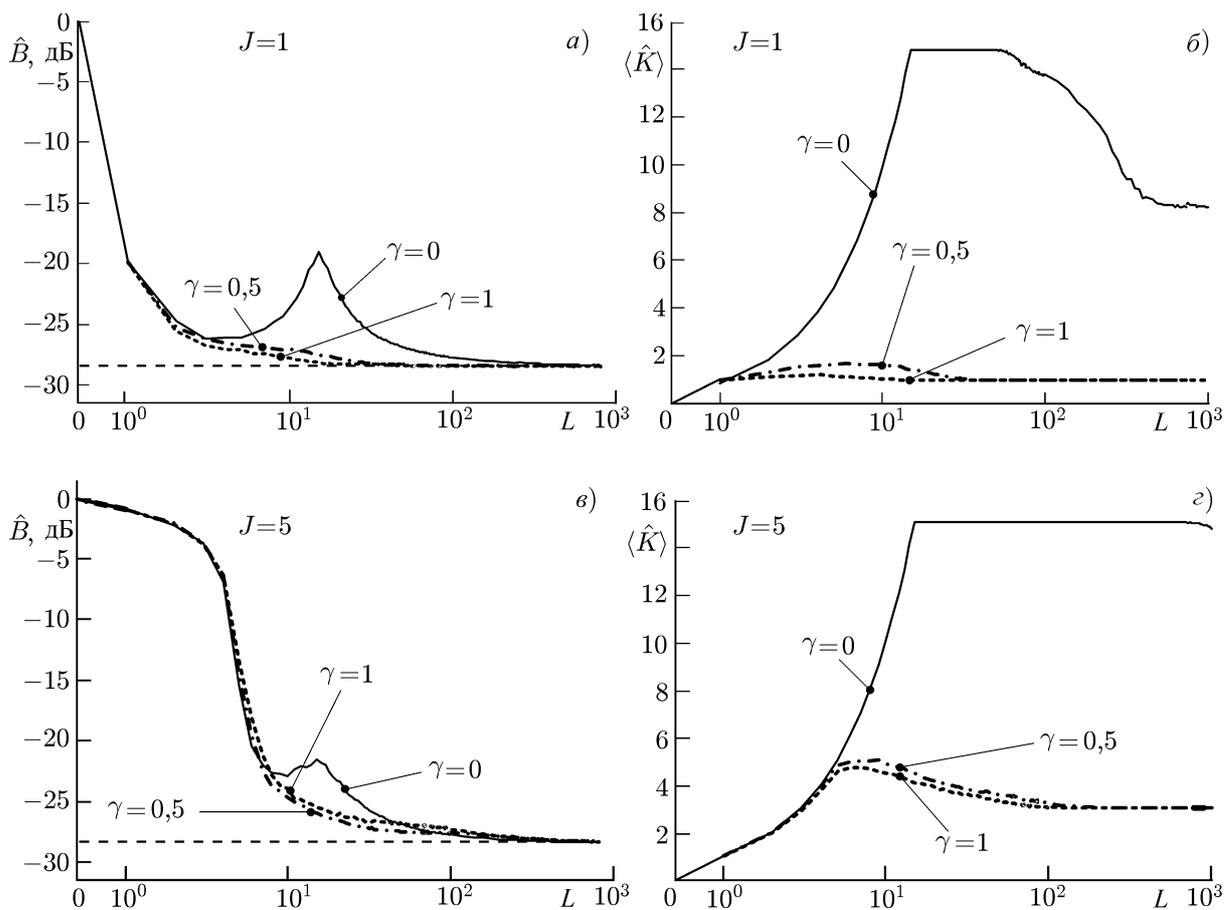


Рис. 4

$\sigma_{\text{noise}}^2 = 1$ . Поэтому параметр регуляризации  $\gamma$  выбирался равным единице ( $\gamma = 1$ ), в два раза меньшим единицы ( $\gamma = 0,5$ ) и равным нулю ( $\gamma = 0$ ).

Найдём вычислительную сложность предложенного алгоритма оценивания весового вектора (18), используя формулы (7), (17) и (21). При этом ограничимся подсчётом числа комплексных умножений. В наиболее простом случае одного источника помехи ( $K = J = 1$ ) требуется только один базисный вектор, поэтому необходимо выполнить  $2N(L + 1)$  комплексных умножений. В случае двух источников помехи требуются два базисных вектора, поэтому необходимо дополнительно сделать  $2NL$  умножений. В случае трёх источников помехи дополнительно требуется сделать  $N$  комплексных умножений, что в результате даёт  $N(4L + 3)$ . Затраты на вычисление каждого последующего базисного вектора равны затратам на вычисление третьего базисного вектора. При формировании  $K$  базисных векторов число необходимых комплексных умножений приближённо можно оценить, как  $NL(K + 1)$ . Таким образом, вычислительные затраты для реализации данного алгоритма пропорциональны числу  $N$  компенсационных входов МКП, числу  $L$  выборок помехи и числу  $K$  базисных векторов.

Об эффективности работы алгоритма для рассматриваемого 15-канального МКП в зависимости от длины  $L$  обучающей выборки можно судить по результатам моделирования, показанным на рис. 4, для чисел источников помехи  $J = 1$  и  $5$ , параметров регуляризации  $\gamma = 0,5; 1,0$  и  $0,0$  (в последнем случае нет регуляризации). Оценивалась нормированная мощность  $B$  помехи, определялось число  $\hat{K}$  сформированных базисных векторов и находилось среднее  $\langle \hat{K} \rangle$  по различным реализациям. Как видно из рис. 4а и в, некорректность решения ( $\gamma = 0$ ) наиболее сильно про-

является при  $L \approx N$ , а введение регуляризации решения повышает эффективность подавления помехи. Из рис. 4б и з можно видеть, что регуляризация решения позволяет ограничить число базисных векторов на теоретически обоснованном уровне, т. е. выбрать  $\hat{K} \leq L$ .

### 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрен адаптивный многоканальный компенсатор помехи, обеспечивающий минимальное значение её средней выходной мощности. Предложено представление весового вектора компенсатора в виде разложения по степенным векторам. С использованием ортогонализации степенных векторов получено точное решение для коэффициентов разложения в случае известных корреляционной матрицы помехи и корреляционного вектора. На основе данного решения разработан адаптивный алгоритм оценки регуляризованного весового вектора. Предложенный метод является эффективным по двум показателям. Во-первых, обеспечивается достаточно высокая степень подавления помехи при ограниченном объёме информации о ней, в частности при числе выборок, меньшем числа компенсационных каналов компенсатора. Во-вторых, метод имеет невысокую вычислительную сложность, т. к. требуемое число комплексных умножений линейно зависит от числа выборок, числа компенсационных каналов и числа источников помехи.

Работа поддержана Минобрнауки РФ в рамках ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технического комплекса России на 2014–2020 годы» (соглашение 14.578.21.0033 от 05.06.2014, уникальный идентификатор RFMEFI57814X0033).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Радиозлектронные системы: Основы построения и теория. Справочник / Под ред. Я. Д. Ширмана. М.: Радиотехника, 2007. 512 с.
2. Уидроу Б. И. др. // ТИИЭР. 1975. Т. 63, № 12. С. 69.
3. Мальцев А. А., Музычук О. В., Позументов И. Е. // Радиотехника и электроника. 1978. Т. 23, № 7. С. 1401.
4. Мальцев А. А., Саичев А. И. // Радиотехника и электроника. 1978. Т. 23, № 12. С. 2543.
5. Мальцев А. А., Позументов И. Е. // Изв. вузов. Радиофизика. 1979. Т. 22, № 2. С. 150.
6. Монзинго Р. А., Миллер Т. У. Адаптивные антенные решётки: Введение в теорию. М.: Радио и связь, 1986. 448 с.
7. Уидроу Б., Стирнз С. Адаптивная обработка сигналов. М.: Радио и связь, 1989. 440 с.
8. Цыпкин Я. З. Основы теории обучающихся систем. М.: Наука, 1970. 400 с.
9. Полов К. П. // Радиотехника. 1979. № 1. С. 19.
10. Леховицкий Д. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1992. Т. 35, № 9–10. С. 790.
11. Ширман Я. Д., Манжос В. Н. Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех. М.: Радио и связь, 1981. 416 с.
12. Тихонов А. И., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
13. Абрамович Ю. И. // Радиотехника и электроника. 1981. Т. 26, № 3. С. 543.
14. Журавлев А. К., Лукошкин А. П., Поддубный С. С. Обработка сигналов в адаптивных антенных решётках. Ленинград: изд. Ленинградского университета, 1983. 240 с.
15. Пистолькорс А. А., Литвинов О. С. Введение в теорию адаптивных антенн. М.: Наука, 1991. 200 с.
16. Ермолаев В. Т., Флакман А. Г. // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25, № 4. С. 472.

17. Ермолаев В. Т., Краснов Б. А., Флакман А. Г. // Изв. вузов. Радиофизика. 1983. Т. 26, № 7. С. 874.
18. Ермолаев В. Т., Краснов Б. А., Соломатин В. Я., Флакман А. Г. // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29, № 5. С. 551.
19. Ermolayev V. T., Flaksman A. G. // Int. J. Electron. 1993. V. 75, No. 4. P. 753.
20. Ermolayev V. T., Flaksman A. G., Rodygin Yu. L. // Int. J. Electron. 1994. V. 76, No. 3. P. 497.
21. Воеводин В. В. Линейная алгебра. М.: Наука, 1980. 400 с.
22. Ермолаев В. Т., Флакман А. Г., Сорокин И. С. // Изв. вузов. Радиофизика. 2012. Т. 55, № 9. С. 641.
23. Ермолаев В. Т., Сорокин И. С., Флакман А. Г. // Вестник ННГУ им. Н. И. Лобачевского. Сер. Радиофизика. 2014. № 4. С. 79.

Поступила в редакцию 10 марта 2015 г.; принята в печать 16 июля 2015 г.

### REGULARIZED ESTIMATE OF THE WEIGHT VECTOR OF AN ADAPTIVE INTERFERENCE CANCELLER

*V. T. Ermolayev, I. S. Sorokin, A. G. Flaksman, and A. V. Yastrebov*

An adaptive multichannel interference canceller, which ensures a minimum value of the average output of interference, is considered. It is proposed to form the weight vector of such a canceller as the power-vector expansion. It is shown that this approach allows one to obtain an exact analytical solution for the optimal weight vector due to using the procedure of the power-vector orthogonalization. In the case of a limited number of the input-process samples, the solution becomes incorrect and its regularization is required. An effective regularization method, which ensures high degree of the interference suppression and does not involve the procedure of inversion of the correlation matrix of interference, which significantly reduces the computational cost of the weight-vector estimation, is proposed.