УДК 534.2

ОСОБЕННОСТИ СТАДИИ ДЕСТАБИЛИЗАЦИИ ПРОФИЛЯ ВОЛНЫ ПРИ ОТРАЖЕНИИ ИНТЕНСИВНОГО АКУСТИЧЕСКОГО ПУЧКА ОТ МЯГКОЙ ГРАНИЦЫ

М. С. Дерябин¹*, Д. А. Касьянов¹, В. В. Курин², М. А. Гарасев³

¹ Научно-исследовательский радиофизический институт;

² Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского;

³ Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород, Россия

В работе показано, что при отражении интенсивного акустического пучка от акустически мягкой границы происходит значительное перераспределение энергии в спектре отражённых нелинейных волн, что проявляется на небольших волновых расстояниях от отражающей границы. Данный эффект приводит к появлению экстремумов в распределениях амплитуды и интенсивности поля отражённого акустического пучка около отражающей границы. Результаты физических экспериментов подтверждаются численным моделированием процесса трансформации нелинейных волн, отражённых от акустически мягкой границы. Численное моделирование проведено с помощью уравнения Хохлова—Заболотской—Кузнецова.

ВВЕДЕНИЕ

Данная статья продолжает цикл экспериментальных исследований, начатый работой [1], где достаточно подробно были изучены основные закономерности трансформации профиля и спектра нелинейных отражённых волн. Одной из целей работы [1] было изучение возможности генерации мощных импульсов, в которых амплитуда давления в фазе разрежения существенно превышала соответствующую величину для фазы сжатия. В качестве модельной ситуации был выбран случай отражения ударной волны, сформированной в поле плоского излучателя, от акустически мягкой границы (т. е. границы с малым относительным волновым сопротивлением). Показано, что таким образом можно сформировать сигнал, в котором амплитуда давления в фазе разрежения многократно превышает соответствующую величину для фазы сжатия.

Дальнейшее детальное экспериментальное исследование формирования фронта разрежения непосредственно после отражения от акустически мягкой границы показало, что амплитуда давления на фронте разрежения ударной волны на некотором расстоянии от этой границы увеличивается. Поскольку данный эффект проявился в условиях, когда акустически мягкая граница располагалась за последним дифракционным максимумом распределения поля плоского излучателя и пилообразный профиль ударной волны к моменту отражения уже был сформирован, потребовались дополнительные исследования с целью объяснения этого эффекта. Итоги данных исследований представлены в настоящей работе. Результаты физических экспериментов сравнивались с результатами численного моделирования трансформации нелинейных волн, отражённых от акустически мягких границ. Численное моделирование проведено с помощью уравнения Хохлова—Заболотской—Кузнецова (XЗК).

1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

Установка, используемая для проведения экспериментов [1], была модифицирована с целью измерения параметров акустического поля непосредственно около границы отражения. На рис. 1

М. С. Дерябин, Д. А. Касьянов, В. В. Курин, М. А. Гарасев

^{*} mmm1984@inbox.ru

изображена блок-схема модифицированной установки. Эксперименты осуществлялись в кювете 1, имеющей форму параллелепипеда с размерами $300 \times 150 \times 700$ мм, изготовленной из прозрачного пластика и установленной на массивном основании 2. В кювету заливалась особо чистая дегазованная и деионизованная вода с удельным сопротивлением не менее 18 МОм · см, произведённая установкой на базе мембранного дистиллятора ДМ-4Б (Россия). Это значение удельного сопротивления примерно на два порядка превосходит соответствующую величину для дистиллированной воды. Уровень поверхности воды в ходе экспериментов регулировался. Параллельность плоскости излучателя и поверхности воды 3 достигалась регулировкой опорных микровинтов 4. Температура контролировалась при помощи лабораторного термометра 5 с точностью 0,1 °C.



В описываемых экспериментах использовался плоский пьезокерамический излучатель 6 фирмы «Olympus», вмонтированный в дно кюветы, имеющий радиус апертуры a = 2 см и работающий в импульсном режиме. Этот преобразователь имеет низкую добротность $Q \leq 3$, что позволяет генерировать импульсы с небольшой длительностью всего в несколько периодов. Использование коротких акустических импульсов позволяет проводить измерения практически у поверхности воды. Параметры излучаемых сигналов не изменялись при проведении всего цикла измерений. Длительность импульсов и частота излучения составляла $\tau = 5$ мкс и $f_0 = 1$ МГц соответственно, частота повторения импульсов равна F = 10 Гц. Регистрация формы нелинейных волн в произвольной точке отражённого пучка осуществлялась миниатюрным калиброванным гидрофоном 7 фирмы «Precision Acoustics» с размером активного элемента $\delta = 0.04$ мм, имеющим заводскую калибровку в диапазоне до 20 МГц (для нужд эксперимента гидрофон был откалиброван в полосе до 40 МГц [1]). Автоматическое устройство перемещения гидрофона 8 обеспечивало точность позиционирования не хуже 0,1 мм по всем координатам. Излучающая часть установки, состоит из задающего генератора 9 «Tektronix AFG3022», высококачественного усилителя мощности 10 «Amplifier Research 800A100A», контрольного цифрового осциллографа 11 «Tektronix TDS3032B» и согласователя импедансов 12 «Amplifier Research I1003». Интенсивность излучения и расстояние между апертурой излучателя и поверхностью воды подбирались таким образом, чтобы обеспечить продолжение эффективного нелинейного взаимодействия волн после отражения. Принятый с гидрофона 7 сигнал, усиленный блоком кондиционирующих усилителей 13 (моделей HP1, DC3, HA2 фирмы «Precision Acoustics»), регистрировался и предварительно анализировался осциллографом 14 «Tektronix DPO4032». Вопросы, связанные с калибровками гидрофонов PVDF, предназначенных для корректной регистрации ударных волн, рассмотрены в работе [1]. Особенности методики измерений параметров интенсивных акустических полей, распространяющихся в ограниченных средах, представлены в работе [2].

2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Для моделирования распространения нелинейных акустических волн используется уравнение Хохлова—Заболотской—Кузнецова (ХЗК). Оно описывает нелинейное распространение акустических пучков с узким угловым спектром. Ниже представлена схема численного решения уравнения ХЗК, адаптированная для исследуемой ситуации.

Запишем уравнение X3K для колебательной скорости u в акустическом пучке, распространяющемся вдоль оси z (см., например, работу [3]):

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\beta}{c^2} u \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{b}{2c^3 \rho_0} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \right) = \frac{c}{2} \Delta_\perp u, \tag{1}$$

где c — скорость звука в среде, β — параметр нелинейности, b — параметр затухания в среде, $\tau = t - z/c, t$ — время, ρ_0 — плотность среды, $\Delta_{\perp} = \partial^2/(\partial r^2) + r^{-1}[\partial/(\partial r)]$ — поперечный оператор Лапласа, который описывает дифракцию акустических волн, r — поперечная координата.

Данное уравнение решалось численно с помощью разработанной программы, основанной на «спектральном» методе, с помощью которого удобно решать некоторые задачи. Пример подобного подхода представлен в работе [4]. Суть спектрального метода состоит в следующем. С помощью замены переменных

$$T = 2\pi f_0 \tau, \qquad Z = z/z_{\rm d}, \qquad R = r/a, \qquad N = \frac{\beta \omega^2 a^2 p_0}{2c^4 \rho_0}, \qquad A = \frac{b \omega^3 a^2}{4c_0^4 \rho_0},$$

где f_0 — частота колебаний акустической волны, $z_d = ka^2/2$, $k = \omega/c$ — волновое число, a — радиус апертуры излучателя, $\omega = 2\pi f_0$, p_0 — акустическое давление на апертуре излучателя, уравнение (1) приводится к безразмерному виду

$$\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial V}{\partial Z} - NV \frac{\partial V}{\partial T} - A \frac{\partial^2 V}{\partial T^2} \right) = \frac{1}{4} \Delta_{\perp} V, \tag{2}$$

где $V = u/u_0, u_0$ — колебательная скорость на поверхности излучателя, $\Delta_{\perp} = \partial^2/(\partial R^2) + R^{-1}[\partial/(\partial R)].$

Представим решения полученного уравнения в виде разложения в ряд Фурье:

$$V(Z, R, T) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} C_n(Z, R) \exp(-jnT),$$
(3)

где C_n — комплексная амплитуда *n*-й гармоники. Подставляя решение (3) в уравнение (2), приходим к системе связанных уравнений для комплексных амплитуд:

$$\frac{\partial C_n}{\partial Z} = -\frac{in}{2} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} C_m C_{n-m} - An^2 C_n + \frac{i}{4n} \Delta_\perp C_n.$$
(4)

Первый член правой части полученного уравнения описывает нелинейное взаимодействие гармоник, второй — диссипацию вследствие вязкости среды, третий — дифракцию волн.

Для решения уравнения (4) необходимо выбрать координатную сетку и максимальный номер гармоники. Оценить нужное число гармоник можно воспользовавшись известным решением одномерного уравнения Бюргерса, из которого следует, что для описания фронта ударной волны необходимо учитывать как минимум $n \approx \pi N/A$ гармоник [3, 4].

М. С. Дерябин, Д. А. Касьянов, В. В. Курин, М. А. Гарасев

На первом шаге работы алгоритма вычисляется сумма $\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} C_m C_{n-m}$, которую удобно считать с помощью преобразования Фурье:

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} C_m C_{n-m} = \text{FFT}^{-1} \left[|\text{FFT}(\mathbf{C})|^2 \right],$$
(5)

где FFT(**C**) — оператор быстрого преобразования Фурье, **C** — вектор с бесконечной размерностью, составленный из амплитуд гармоник. Таким образом, для вычисления этой суммы мы возвращаемся к временному, а не спектральному представлению сигнала. Данный приём позволяет значительно ускорить расчёт, если число гармоник велико.

На втором шаге система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial C_n}{\partial Z} = -\frac{in}{2} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} C_m C_{n-m} - An^2 C_n \tag{6}$$

решалась на интервале [Z, Z + dZ] с помощью адаптивного алгоритма, основанного на методе Адамса—Башфорта—Мултона [5]. На следующем шаге учитывалась поперечная дифракция волн на интервале [R, R + dR]. Параболическое уравнение

$$\frac{\partial C_n}{\partial Z} = \frac{i}{4n} \; \Delta_\perp C_n$$

аппроксимировалось неявной конечно-разностной схемой второго порядка точности:

$$\frac{C_n^l(Z + dZ) - C_n^l(Z)}{dZ} = \frac{i}{4n \, dR^2} \left[\left(1 - \frac{1}{2l} \right) C_n^{l-1}(Z + dZ) - 2C_n^l(Z + dZ) + \left(1 + \frac{1}{2l} \right) C_n^{l+1}(Z + dZ) \right], \quad (7)$$

где величина $C_n^l(Z)$ соответствует амплитуде *n*-й гармоники на расстоянии $R = l \, \mathrm{d}R$ от оси (l = 0, 1, ...). На оси в силу симметрии производная $\partial C_n / \partial R$ равна нулю, что может быть записано в виде

$$\frac{C_n^0(Z + \mathrm{d}Z) - C_n^0(Z)}{\mathrm{d}Z} = \frac{i(C_n^1 - C_n^0)}{n\,\mathrm{d}R^2}\,.$$
(8)

После решения данной системы линейных уравнений программа возвращается к первому шагу для расчёта поля в следующей плоскости, ортогональной оси распространения.

Для проверки полученной программы результаты её работы сравнивались с известными аналитическими решениями одномерного уравнения Бюргерса, с решением линейного уравнения Гельмгольца для осесимметричного излучателя и с результатами моделирования уравнения Хохлова—Заболотской—Кузнецова, полученными в работе [4].

Для моделирования распространения отражённого сигнала использовались следующие параметры, которые максимально приближены к экспериментальным условиям: c = 1.480 м/с, $\beta = 3.5$, $b = 4.33 \cdot 10^{-3}$ кг/(м·с), a = 2 см, $f_0 = 1$ МГц, $\rho_0 = 10^3$ кг/м³ и $p_0 = 0.7$ МПа. Граничное условие на поверхности излучателя имеет вид $u = p_0 \sin(2\pi f_0 t)/(\rho_0 c)$ при $r \leq a$ и u = 0 при r > a.

Граница рассматривалась как идеально гладкая и плоская поверхность с коэффициентом отражения, равным –1. Условия применимости данной идеализации при отражении интенсивных пучков рассмотрены в работе [6]. Взаимодействие падающего и отражённого акустического поля не учитывалось, что справедливо при малой длительности импульса. Для расчёта поля нелинейных волн, отражённых от акустически мягкой границы, вычисления проводились в два этапа.



Рис. 3

В первую очередь рассчитывалось поле, падающее на границу раздела. Затем вычислялось отражённое от неё поле, при этом в качестве начального условия использовалась амплитуда поля, вычисленная на границе раздела на первом этапе и умноженная на коэффициент отражения. Экспериментальные данные сравнивались с численными результатами, полученными с использованием этой модели.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

На рис. 2*a* представлены результаты абсолютных измерений амплитуды давления в фазах сжатия и разрежения в нелинейных акустических волнах на оси пучка в зависимости от расстояния *z* от апертуры излучателя в «безграничной» среде. Сплошная линия соответствует результатам измерений амплитуды давления в фазе сжатия нелинейной волны, пунктирная — измерениям амплитуды давления в фазе разрежения. На рис. 2*б* представлены результаты численного моделирования; значения параметров, используемые при моделировании, представлены выше. В рассматриваемом эксперименте давление на фронте сжатия имеет максимум на расстоянии 27 см от поверхности излучателя. При этом амплитуда давления в фазе сжатия более чем в 2,5 раза превосходит соответствующую величину для фазы разрежения.

Профиль волны, соответствующий максимуму давления в фазе сжатия, приведён на рис. 3a. Для наглядности показаны два периода T волны. Вид зависимостей, представленных на рис. 2a

М. С. Дерябин, Д. А. Касьянов, В. В. Курин, М. А. Гарасев



и 3*a*, предсказуем и многократно обсуждался (см., например, работу [7]). На рис. 3*б* приведены результаты численного моделирования. Детали получения «истинного» профиля ударной волны с учётом индивидуальной градуировки гидрофонов PVDF подробно обсуждаются в работе [1].

На расстоянии 27 см от излучателя, в области максимума давления в фазе сжатия, располагалась акустически мягкая граница раздела вода—воздух. В эксперименте её положение тщательно контролировалось.

На рис. 4*a* представлена зависимость амплитуды давления на фронтах сжатия и разрежения от абсолютного значения пройденного волной пути. Положение границы отмечено на рисунке вертикальной штрихпунктирной линией. Здесь, как и на рис. 2, сплошная линия соответствует результатам измерений амплитуды давления в фазе сжатия нелинейной волны, пунктирная — в фазе разрежения. Числа Маха и Рейнольдса в эксперименте были подобраны таким образом, чтобы спектр волны в области последнего дифракционного максимума имел устойчивый вид с законом спадания амплитуд гармоник 1/N, где N — номер гармоники.

На рис. 46 представлены результаты численного моделирования в условиях рассматриваемого эксперимента. Сравнение экспериментальных и численных зависимостей показывает, что выбранная численная модель достаточно корректно отражает реальную ситуацию, возникающую при отражении интенсивного акустического пучка от акустически мягкой границы.

Как видно из приведённых графиков, давление на фронте разрежения нарастает после отражения, и на расстоянии около 1,5 см от границы достигается максимум давления. При этом абсолютное значение амплитуды давления в фазе разрежения превосходит амплитуду давления на фронте сжатия в волне, распространяющей в безграничном пространстве: это видно из сравнения зависимостей, представленных на рис. 2 и 4.

Особенности поведения профиля нелинейной отражённой волны подробно обсуждались ранее [1], однако эффект нарастания давления на фронте разрежения после отражения от мягкой границы не был отмечен из-за отсутствия возможности измерений вблизи границы раздела вода воздух. В работе [1] использовался высокодобротный излучатель, излучающий в среду импульсы с длительностью более 20 мкс. Вследствие этого наложение падающего и отражённого сигналов делали невозможным измерения на расстоянии менее 2 см от отражающей границы. Характерные формы профиля отражённой волны и его эволюция на расстоянии более 2 см от границы представлены в работе [1], где детально исследован переход из области дестабилизации фронта в область его стабилизации. Характерное расстояние стабилизации фронта после отражения составляет величину порядка $1/(k\beta M)$, где M — число Маха. Здесь величины M и k соответствуют первой гармонике, причём значение M рассчитывается в точке отражения.

М. С. Дерябин, Д. А. Касьянов, В. В. Курин, М. А. Гарасев



Необходимо отметить, что интенсивность поля на оси пуска после отражения также имеет экстремум.

На рис. 5*a* приведено распределение интенсивности волны $I = \hat{p}^2/(2\rho_0 c)$, где \hat{p} — среднее по модулю давление за период волны, вдоль акустической оси излучателя, полученное экспериментально в «безграничном» пространстве; интенсивность нормирована на интенсивность поля I_0 на начальной апертуре. Рисунок 6*a* демонстрирует экспериментально найденное распределение интенсивности вдоль акустической оси в отражённом пучке (на расстояниях от начальной апертуры, больших 27 см). На рис. 5*b* и 6*b* представлены соответствующие результаты численных расчётов.

Как видно из представленных зависимостей, интенсивность нелинейной волны в данном эксперименте имеет максимум на расстоянии 4÷5 см от границы вода—воздух, что несколько дальше точки максимума абсолютного значения давления в фазе разрежения (см. рис. 4).

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Наличие экстремума в распределении амплитуды давления на фронте разрежения и интенсивности отражённой волны от акустически мягкой границы не кажется очевидным и требует объяснений. Данный эффект определённо не связан с воздействием интенсивного акустического пучка на границу раздела вода—воздух. При параметрах излучения, применяемых в эксперименте, можно считать, что акустический пучок отражается от практически невозмущённой гладкой поверхности [6]. Также данный эффект нельзя объяснить чисто дифракционными явлениями в отражённом пучке. Был проделан следующий численный эксперимент. Для каждой из первых 20 гармоник поля было решено уравнение Гельмгольца, в качестве граничных условий для которого были взяты экспериментально найденные зависимости амплитуд и фаз гармоник от поперечной

М. С. Дерябин, Д. А. Касьянов, В. В. Курин, М. А. Гарасев



координаты в плоскости отражающей границы. Таким образом были получены распределения амплитуд гармоник вдоль акустической оси в случае, если бы после отражения гармоники распространялись независимо друг от друга. Амплитуда первой гармоники, что естественно, спадала, т. к. эта гармоника распространялась за последним для неё дифракционным максимумом. Остальные гармоники имели экстремумы, расположенные на порядок дальше наблюдаемого максимума давления на фронте разрежения, и в разы дальше наблюдаемого экстремума интенсивности.

Далее, необходимо отметить, что экстремальные значения давления на фронтах разрежения и интенсивности проявляются и в случаях, когда отражающая граница отстоит по оси z более, чем на 27 см, т. е. находится за последним дифракционным максимумом. При этом характерные расстояния рассматриваемых экстремумов от отражающей границы увеличиваются с удалением самой отражающей границы от последнего дифракционного максимума. Более того, чем дальше сдвинута отражающая граница, тем точнее совпадают расположения экстремумов давления на фронтах разрежения и интенсивности в отражённом сигнале.

Рассмотрим распределения амплитуд гармоник вдоль акустической оси в отражённом от акустически мягкой границы сигнале (распределения строятся с использованием экспериментально найденных осциллограмм, амплитуды гармоник нормируются на значение первой гармоники поля $A_{\rm I}$ на расстоянии 27 см от начальной апертуры, т. е. в месте границы). Эти распределения показаны на рис. 7 точками; на нём же приведены распределения, полученные в численном эксперименте (сплошные линии). Необходимо отметить некоторые закономерности поведения гармоник. Они проявляются вне зависимости от положения акустически мягкой отражающей границы, но при условии, что на неё падает интенсивный акустический сигнал с установившимся спектром с законом спадания вида 1/N. Ситуация непосредственно сразу после отражения выглядит следующим образом. Амплитуды низкочастотных гармоник нарастают, а высокочастотных, начиная с некоторого номера, — убывают, т. е. в области дестабилизации фронта волны перекачка энергии в низкочастотную область спектра происходит значительно быстрее, чем в случае распространения интенсивной акустической волны устойчивой формы в безграничной среде. В рассмотренном эксперименте экстремум интенсивности поля на акустической оси связан с экстремумами амплитуд первых двух гармоник, а нарастание амплитуды давления на фронте разрежения обусловлено поведением гармоник с 3-й по 8-ую, т. к. амплитуды следующих гармоник сразу спадают. Результаты численного моделирования достаточно хорошо отражают реальную ситуацию.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе показано, что при отражении интенсивного акустического пучка от акустически мягкой границы происходит значительное перераспределение энергии в спектре отражённых нелинейных волн, что проявляется на небольших волновых расстояниях от отражающей границы. На таких расстояниях имеет место достаточно редкое для классической нелинейной акустики явление: энергия в низкочастотную область спектра передаётся гораздо эффективнее, чем в случае, например, распространения нелинейной волны в безграничном пространстве. Данный эффект приводит к появлению экстремумов в распределениях амплитуды и интенсивности поля в отражённом акустическом пучке около отражающей границы. Удалось зафиксировать рост амплитуды давления в фазе разрежения, что кажется весьма необычным.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 14-12-00882).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Дерябин М. С., Касьянов Д. А, Курин В. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 2014. Т. 57, № 4. С. 291.
- Грязнова И. Ю., Дерябин М. С., Касьянов Д. А., Курин В. В. // Сб. трудов научной конф. «Сессия Научного совета РАН по акустике и XXIV сессия Российского акустического общества». 2011. Т. 1. М.: ГЕОС, 2011. С. 158.
- 3. Руденко О.В., Солуян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 287 с.

М. С. Дерябин, Д. А. Касьянов, В. В. Курин, М. А. Гарасев

- 4. Khokhlova V. A., Souchon R., Tavakkoli J., et al. // J. Acoust. Soc. Am. 2001. V. 110. P. 95.
- 5. Shampine L.F., Gordon M.K. Computer Solution of Ordinary Differential Equations: the Initial Value Problem. San Francisco: W.H. Freeman, 1975. 318 p.
- Deriabin M., Kasyanov D., Kurin V. Forum Acusticum 2011, 27 June 1 July, 2011. Aalborg, Denmark, 2011. P. 915.
- Sapozhnikov O., Khokhlova V., Cathinol D. // J. Acoust. Soc. Am. 2004. V.115, No. 5. Pt.1. P.1982.
- 8. Стретт Дж. В. Волновая теория света. Л.: Гостехиздат, 1940. 208 с.

Поступила в редакцию 26 марта 2015 г.; принята в печать 13 июня 2015 г.

SPECIFIC FEATURES OF DESTABILIZATION OF THE WAVE PROFILE DURING REFLECTION OF AN INTENSE ACOUSTIC BEAM FROM A SOFT BOUNDARY

M. S. Deryabin, D. A. Kasyanov, V. V. Kurin, and M. A. Garasev

We show that significant energy redistribution occurs in the spectrum of reflected nonlinear waves, when an intense acoustic beam reflects from an acoustic soft boundary, which manifests itself at short wave distances from a reflecting boundary. This effect leads to appearance of extremums in the distributions of the amplitude and intensity of the field of the reflected acoustic beam near the reflecting boundary. The results of physical experiments are confirmed by numerical modeling of the process of transformation of nonlinear waves reflected from an acoustically soft boundary. Numerical modeling was performed by means of the Khokhlov–Zabolotskaya–Kuznetsov (KZK) equation.