

УДК 533.95+537.56+533.17

## О ФОРМИРОВАНИИ ПЛАЗМЫ С МНОГОЗАРЯДНЫМИ ИОНАМИ В НАПРАВЛЕННОМ ПОТОКЕ ГАЗА

*И. С. Абрамов\*, Е. Д. Господчиков, А. Г. Шалашов*

Институт прикладной физики РАН;  
Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия

Рассматривается газодинамическая модель, описывающая формирование потока плазмы с многозарядными ионами в условиях резонансного нагрева электронов. В изотермическом приближении классифицированы возможные типы течений, исследовано влияние геометрической расходимости потока на распределение ионов по кратности ионизации, найдены оптимальные для достижения максимальной кратности ионизации режимы. Модель может быть использована для оптимизации и интерпретации современных экспериментов по генерации жёсткого ультрафиолетового излучения за счёт линейчатого излучения многократно ионизованных атомов в потоке газа, нагреваемого мощным излучением миллиметрового и субмиллиметрового диапазона длин волн.

### ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время достаточно интенсивно развиваются разнообразные приложения, связанные с генерацией стационарных потоков плазмы с многозарядными ионами. Значительные успехи в этом направлении были достигнуты в Институте прикладной физики РАН. Так, впервые удалось продемонстрировать нагрев плазмы вакуумной дуги сверхвысокочастотным излучением в условиях электронно-циклотронного резонанса, приводящий к заметному увеличению кратности ионизации атомов [1–7]. Это достижение связано с переходом к более коротковолновым (по сравнению с традиционными) генераторам сверхвысокочастотного излучения на базе современных гиротронов. Источник затравочной плазмы был расположен в области максимальной напряжённости магнитного поля в магнитной ловушке, при этом магнитное поле обеспечивало хорошее поперечное удержание плазмы вблизи оси ловушки по всей её длине в широком диапазоне плазменных параметров. В результате был разработан эффективный метод получения многозарядных ионов тугоплавких металлов, который основан на использовании дополнительной ионизации плазмы, инжектируемой в прямую магнитную ловушку с помощью вакуумного дугового источника, обусловленной резонансным сверхвысокочастотным нагревом электронов. Указанные результаты открыли принципиальную возможность получения плазмы с многозарядными ионами металлов для ускорителей. Кроме того, такая плазма является практически единственным доступным в лабораторных условиях источником экстремально жёсткого ультрафиолетового излучения, необходимого для развития проекционной литографии высокого разрешения [4–6]. Использование волн миллиметрового диапазона позволяет создавать источники ультрафиолетового излучения со сравнительно малыми размерами (поперечные размеры излучающей области составляют величину порядка 1 мм) с достаточно высокой (до  $10^{14}$  см<sup>-3</sup>) концентрацией плазмы. Ещё большее повышение (до  $10^{16}$  см<sup>-3</sup>) концентрации плазмы было реализовано при использовании импульсного гиротрона терагерцового диапазона длин волн, т. е. при переходе из миллиметрового в субмиллиметровый диапазон [8]. В этих экспериментах разряд поддерживался в условиях плазменного резонанса в потоке выходящего из сопла газа. При этом канализующее разряд внешнее магнитное поле отсутствовало. В настоящее время нет ясности, какой из

\* abramov19940103i@gmail.com

двух описанных вариантов является оптимальным с точки зрения создания точечного источника экстремально жёсткого ультрафиолетового излучения для приложений. Однако не вызывает сомнений, что методы, основанные на использовании плотной сильнонеравновесной плазмы сверхвысокочастотного разряда, могут составить конкуренцию традиционным методам, основанным на лазерном испарении вещества [9–11].

Основные особенности разряда в рассматриваемых системах обусловлены резонансным энергокладом в электронную компоненту (в зависимости от конкретных условий эксперимента реализуются электронно-циклотронный, верхнегибридный или плазменный ленгмюровский механизмы поглощения). Характерная температура электронов (порядка 100 эВ) значительно превышает температуру ионов. Более того, эксперименты свидетельствуют о том, что, помимо тепловых электронов, в плазме присутствует значительное число энергичных электронов [12]. Кинетическая энергия ионов в основном определяется их газодинамической скоростью, которая в интересующих нас случаях по порядку величины близка к скорости ионного звука. При этом, в зависимости от геометрии, течение плазмы может быть как до-, так и сверхзвуковым. Кулоновский электрон-ионный энергообмен, как правило, несущественен, температуру электронов в основном определяют неупругие потери их энергии, идущие на ступенчатую ионизацию и возбуждение ионов с последующим излучением. По мере движения в потоке кратность ионизации ионов повышается. Соответственно перестраивается и спектр их линейчатого излучения: как правило, он смещается в ультрафиолетовую область. Одновременно увеличивается и доля радиационных потерь. В целом представляется, что пространственная структура потока плазмы с многозарядными ионами, в первую очередь распределение ионов по кратности ионизации вдоль потока, может очень существенно влиять на параметры излучения плазмы в нужном для приложений спектральном диапазоне.

Указанные экспериментальные результаты показали необходимость теоретических исследований. Настоящей работой мы открываем цикл статей, посвящённых анализу особенностей формирования стационарного сильнонеравновесного разряда в неоднородных потоках газа с различной степенью предварительной ионизации. В данной работе мы приводим качественный анализ возможных типов газодинамических течений плазмы с заданной геометрией при переменной кратности ионизации атомов. Для этого мы рассматриваем достаточно простую модель, описывающую распределение ионов по кратности ионизации в квазиодномерном потоке плазмы в условиях заданной постоянной температуры электронов вдоль потока. Изотермический режим обуславливается высокой электронной теплопроводностью в разряде с горячими электронами, в котором характерная длина теплопроводности электронов существенно превышает характерную длину ионизации потока.

## 1. БАЗОВЫЕ УРАВНЕНИЯ

В качестве исходных рассмотрим гидродинамические уравнения, описывающие стационарный баланс потоков частиц и потока импульса в многокомпонентном ионизированном газе, в котором происходит рождение (т. е. переход из состояния с меньшей кратностью ионизации) и уничтожение (т. е. переход в состояние с большей кратностью ионизации) частиц:

$$\operatorname{div}(n_i \mathbf{u}_i) = I_i, \quad (1)$$

$$m_i n_i \mathbf{u}_i \nabla \mathbf{u}_i + \nabla(n_i T_i) = z_i e n_i \mathbf{E} + \mathbf{R}_i. \quad (2)$$

Здесь  $n_i$  — концентрация ионов с кратностью ионизации  $z_i = i$  при  $i = 1, \dots, Z_m$  либо концентрация нейтральных атомов в случае  $i = 0$ ,  $Z_m$  — максимальная кратность ионизации,  $\mathbf{u}_i$  и

$T_i$  — скорость упорядоченного движения и температура  $i$ -й компоненты плазмы соответственно,  $\mathbf{E}$  — напряжённость электрического поля, имеющего в нашей задаче амбиполярную природу,  $\mathbf{R}_i$  — сила трения между фракциями,  $m_i$  — масса атомов и ионов,  $e$  — элементарный заряд. Источник частиц обусловлен ступенчатой ионизацией электронным ударом [13]:

$$I_i = n_e (k_{i-1}n_{i-1} - k_i n_i), \quad n_e = \sum_{i=1}^{Z_m} z_i n_i, \quad (3)$$

где  $n_e$  — концентрация электронов, определяемая из условия квазинейтральности,  $k_i$  — константы ионизации, введённые так, что величина  $k_i n_e$  равна частоте перехода иона от кратности ионизации  $i$  к  $i + 1$ . Заметим, что для нейтральных атомов отсутствует источник, связанный с ионизацией, т. е.  $n_{-1} = 0$ , а для максимально ионизированных атомов отсутствует уничтожение, т. е.  $k_{Z_m} = 0$ . Амбиполярное электрическое поле можно найти из условия локального термодинамического равновесия для электронов, пренебрегая (с учётом неравенства  $m_i \gg m_e$ , где  $m_e$  — масса электронов) импульсом электронов:

$$\nabla(n_e T_e) = -en_e \mathbf{E}, \quad (4)$$

где  $T_e$  — температура электронов.

В интересующих нас приложениях длина свободного пробега ионов обычно значительно меньше характерных масштабов, на которых происходит ионизация. Поэтому в разумном приближении можно считать все гидродинамические скорости одинаковыми. Сила трения между различными фракциями при этом выпадает из уравнений. Это ограничение не слишком важно для численных расчётов, но сильно упрощает качественный анализ результатов, поскольку позволяет перейти к одножидкостной гидродинамике. В частности, сложив уравнения (2) и (4), получаем уравнение баланса потока импульса в виде

$$m_i n (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} + \nabla \left( n_e T_e + \sum_{i=0}^{Z_m} n_i T_i \right) = 0, \quad n = \sum_{i=0}^{Z_m} n_i, \quad (5)$$

где  $n$  — суммарная концентрация всех тяжёлых фракций,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_i$  для всех  $i = 1, \dots, Z_m$ .

Как уже отмечалось, в разряде с горячими электронами ( $T_e \sim 100$  эВ) длина, характеризующая их теплопроводность, существенно превышает характерную длину ионизации потока. Это отражает то обстоятельство, что в полностью ионизированной плазме тепловое равновесие устанавливается электронами, движущимися с тепловой скоростью, а быстрота перераспределения массы ограничена ионно-звуковой скоростью из-за амбиполярной связи электронов и ионов. Поэтому температуру электронов можно считать постоянной. Заметим, что изотермическое приближение неизбежно нарушается при очень значительном расширении потока с ограниченной областью энерговклада. Однако оценки показывают, что это происходит на масштабах, значительно превышающих размеры лабораторных установок. Кроме того, изотермическое приближение может нарушаться при слабой ионизации (например, в близкой окрестности сопла, из которого инжектируется нейтральный газ), когда теплопроводность определяется соударениями электронов с нейтральными частицами. Это может оказаться существенным для определения условий зажигания разряда и, возможно, описания переходного слоя между потоком нейтрального газа и движущейся плазмой. Изучение таких процессов выходит за рамки настоящей работы.

Рассмотрим течение плазмы, гидродинамические характеристики которого мало меняются в поперечном сечении некоторой выделенной трубки тока. В первом приближении такой поток

можно считать квазиодномерным: все свойства этого потока зависят только от одной пространственной координаты  $l$  вдоль него, при этом его геометрическая форма определяется единственным параметром  $\sigma(l)$ , имеющим смысл площади поперечного сечения трубки тока. Усреднив уравнения (1) и (5) по бесконечно малому объёму, ограниченному участком силовой трубки между сечениями  $l$  и  $l + dl$ , получаем систему уравнений, описывающую стационарный квазиодномерный поток многокомпонентной плазмы:

$$\partial(\sigma n_i u) = \sigma n_e (k_{i-1} n_{i-1} - k_i n_i), \quad n_e = \sum_{i=1}^{Z_m} z_i n_i, \quad (6)$$

$$\partial(\sigma m_i n u^2) = -\sigma \partial(n_e T_e + n_0 T_0), \quad n = \sum_{i=0}^{Z_m} n_i, \quad (7)$$

где оператор  $\partial = d/dl$  обозначает дифференцирование по координате вдоль потока. При усреднении уравнения баланса импульса мы оставили только продольную (вдоль потока) компоненту, считая, что в поперечном направлении силы либо компенсируются, либо отсутствуют в следствие симметрии. Кроме того, мы пренебрегли газокINETическим давлением ионов по сравнению с давлением электронов (т.к. температура ионов в рассматриваемых задачах обычно не превышает нескольких электронвольт [14]), но оставили давление нейтрального газа  $n_0 T_0$ , которое необходимо для корректного описания начальной стадии разряда при  $n_0 \gg n_e$ . Выбирая конкретную зависимость  $\sigma(l)$ , можно моделировать самые разнообразные ситуации, встречающиеся в эксперименте. Так, движение плазмы вдоль магнитного поля с индукцией  $B$  отвечает зависимости  $\sigma \propto 1/B(l)$ . Нас в первую очередь будет интересовать случай разряда в свободно расширяющейся струе газа, отвечающий монотонно возрастающей функции  $\sigma(l)$ , например  $\sigma \propto l^n$ . В частности, для сферически-симметричного расширения струи в телесный угол  $\Omega$  имеем  $\sigma = \Omega l^2$ .

Будучи дополненной начальными условиями для скорости и концентраций компонент плазмы, система уравнений (6) и (7) определяет дальнейшую эволюцию этих величин вдоль потока. Для моделирования конкретных экспериментальных ситуаций, как правило, в начале потока задаются давление нейтрального газа  $p = n_0 T_0$ , его скорость  $u_0$  и небольшая затравочная концентрация плазмы  $n_e = n_1 \ll n_0$ , необходимая для развития ионизационной лавины. Многозарядные ионы в начале потока отсутствуют, т.е.  $n_2, n_3, \dots, n_{Z_m} = 0$ . Температура электронов считается заданной или определяется из условия баланса энергии. Отметим, что звуковая скорость нейтрального газа приблизительно в  $\sqrt{T_e/T_0} \gg 1$  раз меньше скорости ионного звука, которая определяет характерную величину скорости движения газа вдали от начала разряда. Поэтому возникает довольно существенная проблема согласования медленного движения плотного нейтрального газа в начале разряда с быстрым направленным движением разреженной плазмы в развитой части разряда. В настоящей работе будут предложены решения, удовлетворяющие указанной физической постановке задачи. Однако наряду с этим мы рассмотрим весь класс возможных движений, включая и «нефизические» решения, отвечающие экстремально большим начальным скоростям газа или сильной предварительной ионизации. Такие решения полезны для понимания общих закономерностей движения плазмы, описываемых уравнениями (6) и (7).

## 2. ДВИЖЕНИЕ В ОКРЕСТНОСТИ ЗВУКОВОГО БАРЬЕРА

Классификацию решений уравнений (6) и (7) удобно провести, анализируя особенности этих решений в окрестности звукового барьера. Как известно, решения гидродинамических уравнений приведённого типа имеют сингулярность при переходе скорости потока через скорость звука

в среде [15]. В этом легко убедиться, если переписать кинетическое давление в виде

$$n_e T_e + n_0 T_0 \equiv m_i n c^2.$$

Это равенство следует рассматривать как определение величины  $c^2$ . При ступенчатой ионизации изменяется только кратность ионизации, поэтому суммарный поток тяжёлых фракций сохраняется:

$$\Gamma = \sigma n u = \text{const.}$$

С учётом этого замечания уравнение баланса импульса (7) представляется в виде

$$(1 - c^2/u^2) \partial u = -(\sigma/u) \partial(c^2/\sigma). \quad (8)$$

Введённая таким образом скорость  $c$  может быть интерпретирована как локальная скорость звука в потоке. Если пренебречь нейтральной компонентой, эта скорость формально совпадает с известным выражением  $c = \sqrt{Z T_e / m_i}$  для скорости ионно-звуковых волн в плазме [16] с  $T_e \gg T_i$  и эффективным зарядом ионов

$$e \bar{Z} = e n_e / n = e \sum (z_i n_i) / \sum n_i.$$

Здесь  $\bar{Z}$  — средняя кратность ионизации в плазме. Поскольку эта величина монотонно увеличивается вдоль потока, локальная скорость звука также возрастает по мере его расширения, несмотря на предположение о постоянстве температуры электронов. Заметим, что в плоской задаче уравнение (8) можно заменить интегралом давления  $u + c^2/u = \text{const}$  и уравнения ионизационного баланса при этом полностью интегрируются.

Когда скорость потока совпадает с локальной скоростью звука, решения уравнения (8) проходят через особенность стационарного течения ( $\partial u \rightarrow \infty$  при  $u = c$ ). Однако из уравнения видно, что этой особенности не будет, если

$$\partial(c^2/\sigma)|_{u=c} = 0. \quad (9)$$

Обе величины,  $c^2$  и  $\sigma$ , монотонно возрастают вдоль потока, но по разным законам. Поэтому условие (9) может оказаться выполненным при определённой координате  $l = l_c$ . В дальнейшем мы будем называть эту точку критической, а значения всех физических величин в этой точке будем отмечать индексом «с». В этой точке поток может плавно и непрерывно переходить через звуковой порог. Заметим, что без учёта ионизации переход через звуковой барьер возможен только в сечении с минимальной площадью<sup>1</sup>. Ионизация приводит к дополнительной «силе», которая смещает критическое сечение по потоку. В остальном наша задача аналогична стандартной задаче описания течения газа по трубе с переменным сечением [15].

Условие перехода через звуковой порог зависит от распределения ионов по кратностям ионизации, которое, в свою очередь, определяется предшествующей критической точке эволюцией разряда. Это обстоятельство затрудняет анализ задачи. В данной работе мы ограничимся качественным рассмотрением упрощённой модели, в которой все константы ионизации  $k_i$  одинаковы и равны  $k_1$ , а система находится вдали от насыщения, соответствующего полной ионизации атомов (т. е.  $\bar{Z} \ll Z_m$  или  $n_{Z_m} \ll n$ ). В этом случае  $Z_m + 1$  уравнений (6), описывающих ступенчатую

<sup>1</sup> Это, в частности, приводит к хорошо известному условию истечения стационарного потока плазмы из открытой магнитной ловушки. Дозвуковое течение отвечает движению плазмы внутри ловушки, а сверхзвуковое течение — расширению плазмы снаружи ловушки. При этом переход через звуковой барьер происходит, когда поток проходит через максимум магнитного поля в пробке ловушки. Возникает естественное граничное условие, заключающееся в том, что направленная скорость потока плазмы в пробке должна равняться локальной ионной звуковой скорости [17, 18].

ионизацию, можно заменить на одно уравнение для концентрации электронов. Уравнение непрерывности для потока электронов нетрудно получить, сложив уравнения (6) с весами, равными кратностям ионизации. В результате с учётом сделанных упрощающих предположений получаем, что

$$\partial(\sigma n_e u) = \sigma n_e \sum_{i=1}^{Z_m-1} k_i n_i \approx \sigma n_e k_i \sum_{i=1}^{Z_m} n_i = \sigma k_i n_e.$$

Исходные уравнения (6) и (7) сводятся теперь к системе двух уравнений, описывающих эволюцию средней кратности ионизации  $\bar{Z} = \sigma n_e u / \Gamma$  и скорости потока:

$$\partial \bar{Z} = k_i \Gamma \bar{Z} / (\sigma u^2), \quad \partial u = -\sigma c_1^2 \partial [\bar{Z} / (\sigma u)], \quad (10)$$

где  $c_1 = \sqrt{T_e / m_i}$  — скорость ионного звука в однократно ионизованной плазме. Уравнения (10) описывают истечение газа из сопла с заданным поперечным сечением и эффективным уравнением состояния, отвечающим изменению распределения ионов по кратностям ионизации. Более удобной для дальнейшего анализа является система уравнений, связывающая среднюю кратность ионизации и локальное число Маха  $M = u/c = u/(\bar{Z}^{1/2} c_1)$ :

$$\sigma \partial \bar{Z} = \frac{k_i \Gamma}{c_1^2} \frac{1}{M^2}, \quad \sigma \left(1 - \frac{1}{M}\right) \partial M = \partial \sigma - \frac{k_i \Gamma}{c_1^2} \frac{1}{2\bar{Z}} \left(1 + \frac{1}{M^2}\right). \quad (11)$$

В частности, из последнего уравнения следует, что непрерывный переход через звуковой барьер  $M = 1$  возможен только при условии, что правая часть этого уравнения обращается в нуль. Отсюда находится критический градиент

$$\partial \sigma_c = \frac{k_i \Gamma}{c_c^2} = \frac{1}{Z_c} \frac{k_i \Gamma}{c_1^2} = \frac{1}{Z_c} \left(\frac{k_i n_e}{u}\right)_c \sigma_c, \quad (12)$$

который для заданного закона расширения потока однозначно определяет положение и размер критического сечения. Здесь  $c_c$  и  $Z_c$  — скорость ионного звука и средняя кратность ионизации в критическом сечении соответственно, а величина  $u/(k_i n_e)$  определяет характерную длину ионизации. Критический градиент является единственным размерным параметром, остающимся после перехода от уравнения для скорости потока к уравнению для локального числа Маха.

Рассмотрим поведение решений системы (11) вблизи критической точки, определяемой условием (12). Решения при этом не обязаны проходить строго через звуковой барьер. Линеаризуем уравнения в окрестности критической точки:

$$M = 1 + \delta M, \quad Z = Z_c + \delta Z, \quad l = l_c + \delta l,$$

и примем, что

$$\sigma = \sigma_c + \partial \sigma_c \delta l + \partial^2 \sigma_c \delta l^2 / 2.$$

В результате получим уравнение

$$\delta M \frac{d \delta M}{d \delta l} = \alpha \delta l + \beta \delta M,$$

где  $2\alpha = \partial^2 \sigma_c / \sigma_c + (\partial \sigma_c / \sigma_c)^2$ ,  $2\beta = \partial \sigma_c / \sigma_c$  — постоянные, которые определяются только зависимостью сечения от координаты, кратностью ионизации атомов и длиной ионизации в окрестности

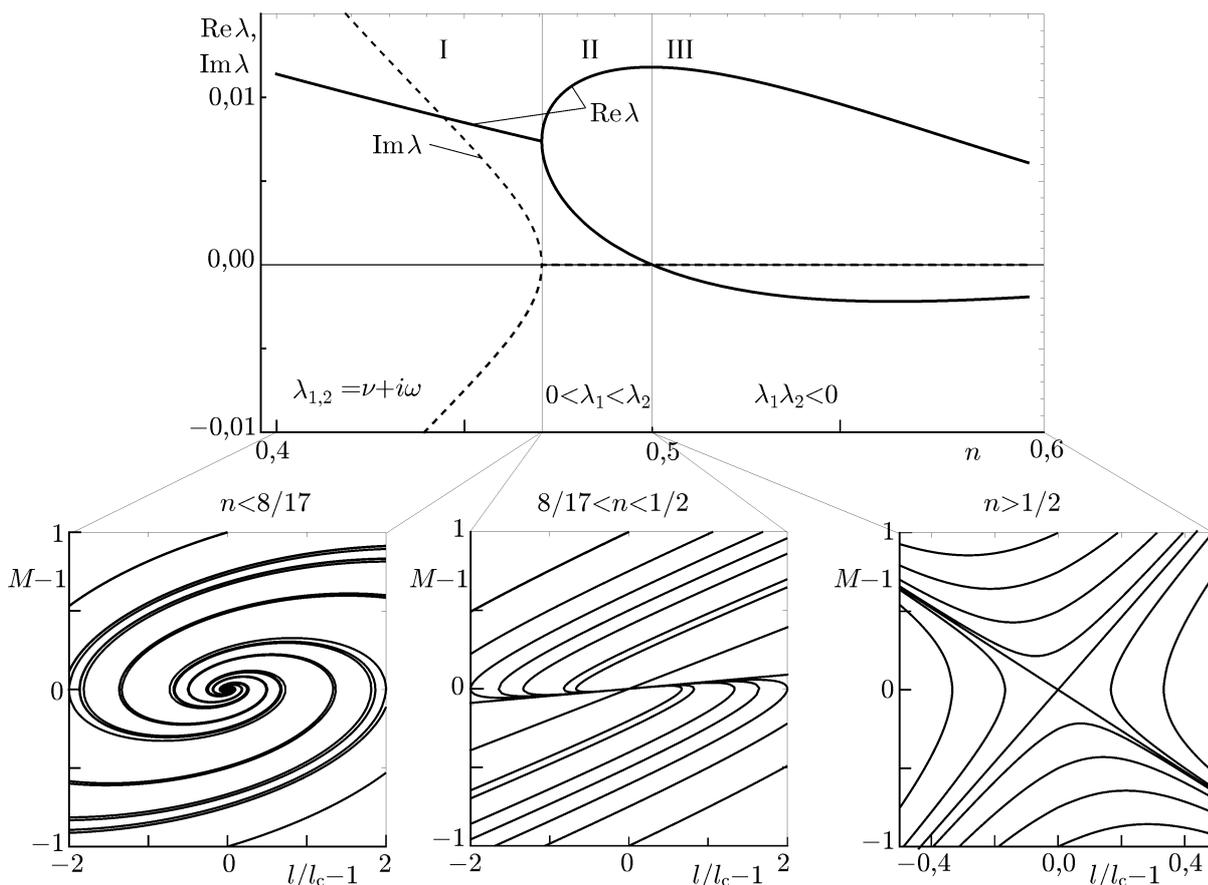


Рис. 1. Корни характеристического уравнения и бифуркации течения в окрестности перехода через звуковой барьер в зависимости от показателя степени  $n$  для потока, расширяющегося по закону  $\sigma \propto l^n$ : область I отвечает состоянию равновесия типа фокус, II — узел, III — седло

критической точки. Переходом к новой координате  $\xi$  это уравнение сводится к элементарной системе автономных линейных уравнений

$$\frac{d \delta l}{d \xi} = \delta M, \quad \frac{d \delta M}{d \xi} = \alpha \delta l + \beta \delta M. \tag{13}$$

Решения этой системы  $\{\delta M, \delta l\} \propto \exp(\lambda \xi)$  полностью определяются её характеристическим уравнением  $\lambda^2 - \beta \lambda - \alpha = 0$ . Корни этого уравнения равны  $\lambda_{1,2} = (\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\alpha})/2$ . В зависимости от соотношения параметров могут реализовываться решения с состояниями равновесия типа седло (при  $\alpha > 0$ ), узел (при  $-\beta^2/4 < \alpha < 0$ ) и фокус (при  $\alpha < -\beta^2/4$ ). Заметим, что в отсутствие ионизации  $\partial \sigma_c = 0$  и  $\beta = 0$ , поэтому в системе реализуются только состояния равновесия типа седло и центр.

В качестве примера на рис. 1 приведены корни характеристического уравнения и фазовые плоскости для потоков, расширяющихся по степенному закону  $\sigma = \sigma_c (l/l_c)^n$ . В этом частном случае  $\lambda_{1,2} = [n/(4l_c)](1 \pm \sqrt{17 - 8/n})$ . Для медленно расширяющихся потоков реализуется режимы с состояниями равновесия типа узел ( $8/17 < n < 1/2$ ) или фокус ( $n < 8/17$ ). В первом случае переход через звуковой барьер может происходить только в одну сторону (с увеличением скорости вдоль потока), причём не единственным способом. Во втором случае звуковой переход невозможен, потому что стационарный поток не может быть продолжен за точку  $M = 1$ ,

точнее поток ограничен двумя такими точками. Оба этих случая упомянуты для полноты, они не представляют интереса для практических приложений.

Для нас наибольший интерес представляет состояние равновесия типа седло, которое реализуется при достаточно быстром расширении с  $n > 1/2$  и отвечает большинству практических приложений. В этом случае уравнения (13) допускают ровно два линейных по координате решения  $M = 1 + \lambda_{1,2}(l - l_c)$ , которые описывают переход через звуковой барьер. Положительному корню характеристического уравнения соответствует гладкий переход от дозвукового течения к сверхзвуковому, отрицательному корню отвечает гладкий переход от сверхзвукового течения к дозвуковому. Кроме того, возможно переключение с одного корня на другой в точке  $l = l_c$ , что соответствует «касанию» звукового барьера без перехода через него. В следующем разделе указанные режимы рассмотрены более детально.

### 3. КЛАССИФИКАЦИЯ ТЕЧЕНИЙ ДЛЯ РАСШИРЯЮЩЕГОСЯ ПОТОКА ПЛАЗМЫ С МНОГОКРАТНОЙ ИОНИЗАЦИЕЙ

При истечении ионизирующегося и расширяющегося потока плазмы из магнитной ловушки переход через звуковой барьер происходит в точке с критическим градиентом (12) и достаточной «кривизной»:  $\partial^2 \sigma_c > -(\partial \sigma_c)^2 / \sigma_c$ . Последнее условие гарантирует, что в окрестности звукового перехода движение потока описывается седловыми траекториями в плоскости скорость—координата, причём сам звуковой переход возможен только по сепаратрисе, проходящей через «виртуальное» состояние равновесия в критическом сечении потока (см. рис. 2а). Для остальных (гиперболических) траекторий в окрестности критического сечения реализуется экстремум локального числа Маха  $M_c$  — минимум для сверхзвуковых течений и максимум для дозвуковых. Из уравнений (11) следует, что экстремум числа Маха соответствует сечению, где  $\partial \sigma = \partial \sigma_c (1 + 1/M_c^2)/2$ . Кроме того, часть гиперболических траекторий не доходит до критического сечения — эти траектории описывают течения с кризисом стационарного течения. Другими словами, фазовая плоскость с линейным состоянием равновесия типа седло полностью характеризует динамику потока при приближении к кризису стационарного течения. Эта особенность позволяет провести классификацию возможных решений полной нелинеаризованной системы уравнений (11), разбив их на: 1) сверхзвуковые течения без кризиса; 2) течения (сверх- и дозвуковые), начинающиеся с кризиса; 3) дозвуковые течения без кризиса; 4) течения (сверх- и дозвуковые), ограниченные кризисом; 5) течения вдоль сепаратрис. На рис. 2а приведён пример разбиения решений на данные классы.

При использовании указанной классификации следует помнить, что положение критической точки зависит от кратности ионизации  $Z_c$  в этой точке, которая, в свою очередь, зависит от начальных условий. В зависимости от последних положение равновесия, отвечающего критической точке, может меняться вследствие использования понятия фазовой плоскости для неавтономной системы. Зафиксировав величину  $Z_c$ , мы выделяем решения, отвечающие некоторому вполне определённому подклассу начальных условий, приводящих именно к такой кратности ионизации в критической точке. Этот параметр можно полностью исключить из формальной классификации, переписав уравнения (11) в виде

$$\sigma \partial(\bar{Z}/Z_c) = \partial \sigma_c / M^2, \quad \sigma (M - 1/M) \partial M = \partial \sigma - \partial \sigma_c (Z_c / \bar{Z}) (1 + 1/M^2) / 2.$$

Эти уравнения приводятся к автомодельному виду, если сечение потока и средняя кратность ионизации измеряются в своих критических значениях  $\sigma_c$  и  $Z_c$ , а длина — в единицах  $\sigma_c / \partial \sigma_c$ . Наиболее естественно этот переход получается для степенной зависимости  $\sigma = \sigma_c (l/l_c)^n$ . Вводя

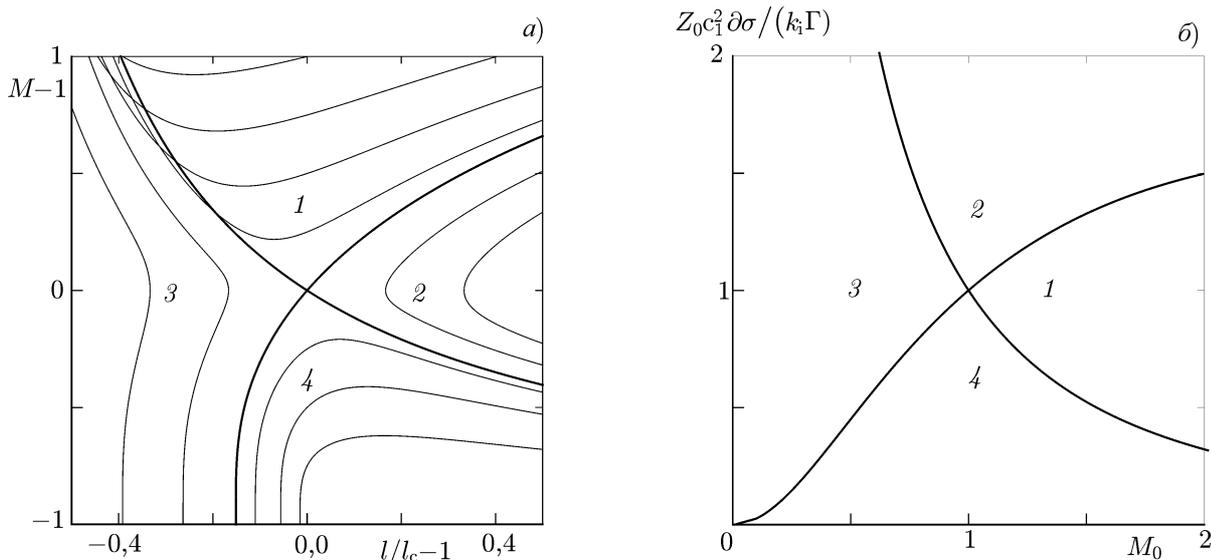


Рис. 2. (а) Решения балансных уравнений в автомодельных переменных (14): 1 — сверхзвуковые течения без кризиса, 2 — течения, начинающиеся с кризиса, 3 — дозвуковые течения без кризиса, 4 — течения, ограниченные кризисом; течения вдоль сепаратрис выделены жирными линиями. (б) Разбиение плоскости начальных значений, соответствующих разным типам траекторий: границы областей образованы множеством точек пересечения сепаратрис, проходящих через звуковой барьер в различных сечениях, с плоскостью, в которой задаются начальные условия. Поток расширяется по закону  $\sigma \propto l^2$

переменные  $\xi = l/l_c$  и  $z = \bar{Z}/Z_c$ , получаем

$$\frac{\xi^n}{n} \frac{dz}{d\xi} = \frac{1}{M^2}, \quad \frac{\xi^n}{n} \left( M - \frac{1}{M} \right) \frac{dM}{d\xi} = \xi^{n-1} - \frac{1}{2z} \left( 1 + \frac{1}{M^2} \right). \tag{14}$$

Эти уравнения порождают универсальное однопараметрическое семейство решений, которое при соответствующем масштабировании описывает все возможные решения исходной задачи (11). При этом все параметры исходной задачи, включая и  $Z_c$ , входят только в начальные условия задачи в автомодельных переменных. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим решения уравнений (14), отвечающие начальным условиям  $z = 1$  и  $M = m_1$  при  $\xi = 1$  для проходящих через критическое сечение траекторий типа 1 и 3 и  $z = 1, M = 1$  при  $\xi = \xi_1$  для траекторий типа 2 и 4 с кризисом в точке  $\xi_1$  (см. рис. 2а). Обозначим такие решения как  $z_a(\xi, a)$  и  $M_a(\xi, a)$ , где параметр  $a$  обозначает величину  $m_1$  или  $\xi_1$  в зависимости от того, проходит течение через критическую точку или испытывает кризис. Тогда решение исходной задачи (11) строится как

$$\bar{Z} = Z_c z_a(l/l_c, a), \quad M = M_a(l/l_c, a).$$

В этом решении величины  $l_c$  и  $Z_c$  связаны условием критического градиента (12), поэтому остаются два свободных параметра, которые могут быть найдены из исходных (не автомодельных) начальных условий

$$Z_0 = Z_c z_a(\xi_0, a), \quad M_0 = M_a(\xi_0, a), \quad \xi_0 = l_0/l_c. \tag{15}$$

Из определения критического градиента (12) для степенной зависимости сечения потока от координаты нетрудно получить, что

$$Z_c = \frac{k_1 \Gamma}{c_1^2 \partial \sigma_c} = \frac{k_1 \Gamma}{c_1^2 \partial \sigma_0} \xi_0^{n-1}, \tag{16}$$

где  $\partial\sigma_0$  — градиент сечения потока в сечении, в котором мы задаём начальные условия. Уравнения (15) и (16) позволяют найти неизвестные параметры  $Z_c$ ,  $l_c$  и  $a$ , определяющие решения с заданными начальными величинами  $Z_0$  и  $M_0$ .

Классификацию решений, проведённую в окрестности точки перехода через звуковой барьер (рис. 2а), нетрудно провести и в пространстве начальных условий  $(M_0, Z_0)$ , заданных в некотором сечении  $l_0$ . Пример такого разбиения приведён на рис. 2б. Решения разных типов в этом пространстве разделяются «прообразам» сепаратрис, проходящих через звуковой барьер. Эти границы определяются соотношениями (15) и (16), в которых параметр  $a$  выбран так, чтобы решения в автомодельных переменных в точности отвечали сепаратрисам, т. е.  $m_1 = 1$  и  $\xi_1 = 1$  (нетрудно убедиться, что решения для  $m_1 = 1$  и  $\xi_1 = 1$  совпадают). Перебирая все возможные  $Z_c$ , мы построим множество всех начальных условий для решений, проходящих через звуковой порог (положение самого порога при этом также зависит от  $Z_c$ ). Очевидно, что вместо параметра  $Z_c$  в уравнениях (15) и (16) можно варьировать  $\xi_0$ , в результате чего получаем

$$Z_c = \frac{k_1 \Gamma}{c_1^2 \partial\sigma_0} \xi_0^{n-1} z_a(\xi_0), \quad M_0 = M_a(\xi_0), \quad 0 < \xi_0 < \infty.$$

В параметрической форме это выражение определяет сепаратрисные кривые в пространстве начальных условий.

Отметим, что переход от одной плоскости начальных условий к другой (т. е. изменение величины  $l_0$ ) приводит только к перемасштабированию оси  $Z_0$ . Это является следствием того, что в новых переменных  $x = \ln \xi$  и  $y = \xi^{1-n} z$  уравнения (14) сводятся к полностью автономной системе уравнений. Именно это обстоятельство и позволяет использовать фазовую плоскость линеаризованной автономной задачи для классификации решений задачи, вообще говоря, более высокой размерности. В то же время анализ эквивалентной автономной системы, на наш взгляд, менее нагляден по сравнению с приведённым выше анализом неавтономной, но автомодельной системы балансных уравнений.

#### 4. СВЕРХЗВУКОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ

Рассмотрим случай сверхзвукового расширения ионизирующейся плазмы в вакуум. Как известно, только в этом случае возможно спадание концентрации плазмы к нулю при неограниченном разлёте. Таким образом, режимы со сверхзвуковым потоком представляются важными для описания локализованных разрядов в расширяющемся в вакуум газе.

Нас будут интересовать решения, отвечающие сверхзвуковому течению и продолжающиеся на бесконечность. Это, согласно рис. 2, либо решения типа 1 без кризиса стационарного состояния, либо решения типа 2 при  $M > 1$ , начинающиеся с кризиса. В качестве примера на рис. 3 приведены распределения параметров разряда вдоль потока в режиме сверхзвукового течения без кризиса. На этом примере видны общие закономерности: 1) до критической точки ( $l < l_c$ ) происходит существенное изменение средней кратности ионизации, при этом скорость потока варьируется слабо; 2) в области за критической точкой ( $l > l_c$ ) возможно существенное ускорение потока, при этом относительное изменение средней кратности ионизации ограничено. Эти выводы подтверждаются численными расчётами в широком диапазоне параметров, а также приведёнными ниже качественными соображениями.

Рассмотрим уравнение для скорости потока (10), которое можно переписать в виде

$$\left(1 - \bar{Z} \frac{c_1^2}{u^2}\right) \partial u = \frac{c_1^2}{\sigma u} (\bar{Z} \partial \sigma - \sigma \partial \bar{Z}). \quad (17)$$

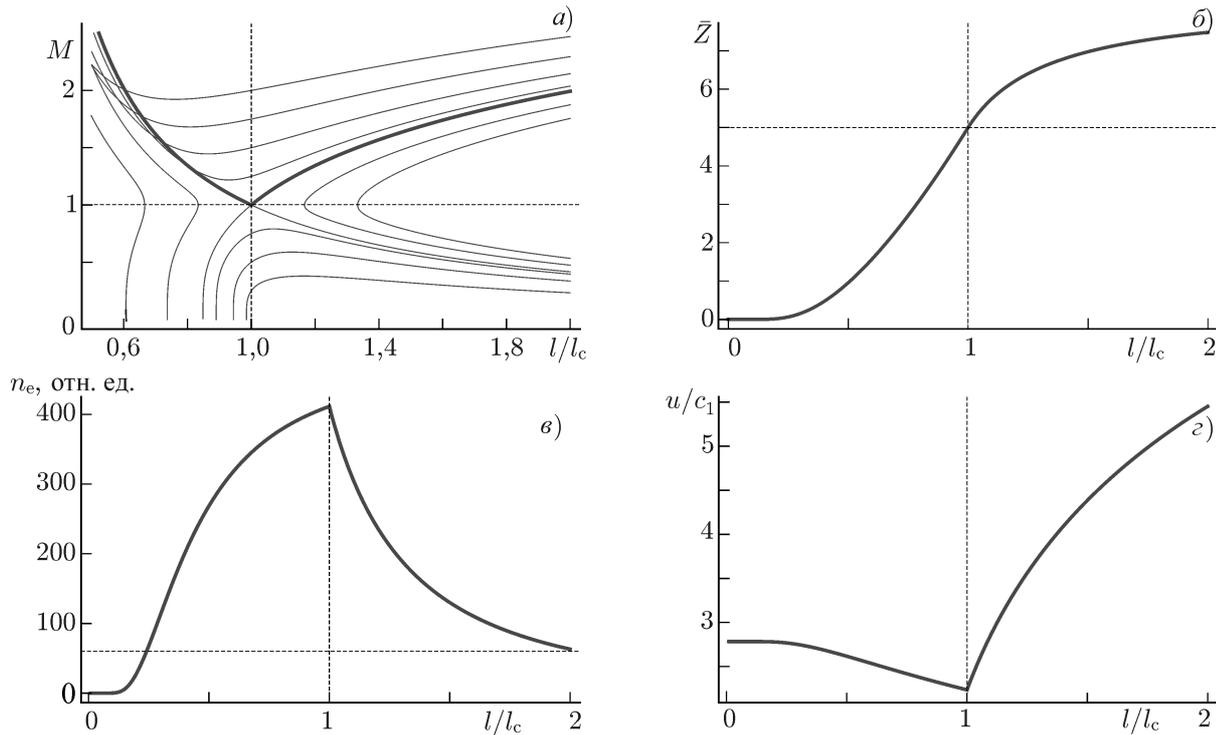


Рис. 3. Зависимости числа Маха (а), средней кратности ионизации (б), концентрации электронов (в) и газодинамической скорости (г) от координаты вдоль потока в режиме сверхзвукового течения без кризиса. Поток расширяется по закону  $\sigma \propto l^2$

Правая часть этого уравнения состоит из двух слагаемых: первое отвечает за геометрическое расширение потока, второе учитывает изменение ионного состава за счёт ионизации. В критическом сечении оба слагаемых равны ( $\bar{Z}\partial\sigma = \sigma\partial\bar{Z}$ ) и  $u = \sqrt{Z_c} c_1$  при  $l = l_c$ . Для достаточно быстро расширяющегося потока первое слагаемое изменяется гораздо быстрее второго. Поэтому вдали от критического сечения доминирует одно из этих слагаемых, ответственное либо за ионизацию в области перед критическим сечением, либо за расширение в области за критическим сечением. Если пренебречь изменением поперечного сечения потока при  $l < l_c$  и изменением зарядового состояния при  $l > l_c$ , то уравнение (17) можно проинтегрировать:

$$u + \bar{Z}c_1^2/u = \text{const} \tag{18}$$

при  $l < l_c$ ,

$$u^2/c_1^2 - 2Z_c \ln[u\sigma/(c_1\sigma_c)] = \text{const} \tag{19}$$

при  $l > l_c$ . Первый интеграл связывает скорость потока со средней кратностью ионизации, а второй — скорость с размером поперечного сечения, а следовательно, и с координатой вдоль потока (на больших расстояниях скорость растёт достаточно медленно:  $u \propto \ln^{1/2} \sigma$ ). Подставив найденные соотношения в уравнение для изменения кратности ионизации (10), получим

$$\int_{Z_0}^{\bar{Z}} \frac{u^2(Z)}{Z} dZ = k_1 \Gamma \int_{l_0}^l \frac{dl}{\sigma(l)} \tag{20}$$

при  $l < l_c$ ,

$$\bar{Z} = Z_0 \exp \left[ k_1 \Gamma \int_{l_0}^l \frac{dl}{\sigma(l)u^2(l)} \right] \quad (21)$$

при  $l > l_c$ . Эти соотношения позволяют оценить увеличение средней кратности ионизации при движении частиц между сечениями потока в точках  $l_0$  и  $l$ .

Прежде всего заметим, что для сечений, растущих быстрее, чем по линейному закону, интеграл в формуле (21) является сходящимся, поскольку скорость в области  $l > l_c$  для сверхзвукового потока монотонно возрастает. Следовательно, увеличение средней кратности ионизации в области  $l > l_c$  всегда ограничено. Это связано с достаточно быстрым падением концентрации в расширяющемся потоке при его ускорении, в результате чего процесс ступенчатой ионизации останавливается. Поскольку ионизация в сверхзвуковом потоке ограничена, с практической точки зрения важно выяснить, какова максимальная достижимая кратность ионизации атомов при известной затравочной ионизации в некотором сечении  $\sigma_0 = \sigma(l_0)$ . Для системы уравнений (10) можно показать, что для двух решений, характеризующихся в некотором сечении  $\sigma_0$  одинаковой кратностью ионизации, но разными скоростями, во всех последующих сечениях при  $l > l_0$  средняя кратность ионизации в решении, соответствующем меньшей начальной скорости, всегда больше кратности ионизации, отвечающей второму решению. Поэтому для отыскания максимально возможного увеличения кратности ионизации при сверхзвуковом истечении достаточно для каждого затравочного уровня ионизации  $\bar{Z} = Z_0$ , заданного в сечении  $\sigma_0$ , рассмотреть минимально возможное начальное число Маха  $M_0 > 1$ , которое ещё допускает бескризисное решение. Для определения минимально возможного числа  $M_0$  для сечений, меняющихся по степенному закону, можно воспользоваться существованием автомодельных решений и рассмотренной в предыдущем разделе классификацией. Из рис. 2б видно, что для  $Z_0 < k_1 \Gamma / (c_1^2 \partial \sigma_0)$  минимальное число  $M_0$  соответствует одной из сепаратрис, а при  $Z_0 > k_1 \Gamma / (c_1^2 \partial \sigma_0)$  минимальное число  $M_0$  равно единице. Условие  $Z_0 < k_1 \Gamma / (c_1^2 \partial \sigma_0)$  эквивалентно неравенству  $l_0 < l_c$ . Следовательно, мы выяснили, что существует некоторая определённая начальная кратность ионизации, ниже которой оптимальное для набора ионизации течение должно начинаться со сверхзвуковой скорости. Если начальная кратность выше указанного порога, то оптимальное для набора ионизации течение должно начинаться строго со звуковой скорости.

Для оценки увеличения кратности ионизации в области  $l > l_c$  для сепаратрисного решения можно воспользоваться приближённым интегралом (18) в форме  $(M + 1/M) \sqrt{Z} = 2\sqrt{Z_c}$ . Отсюда увеличение кратности ионизации при движении по сепаратрисе может быть найдено как

$$Z_c/Z_0 \approx (M_0 + 1/M_0)^2/4.$$

Иными словами, для заметной ионизации при малой начальной затравке необходимо экстремально сверхзвуковое течение в начальном сечении. Приведённая выше оценка ограничивает сверху максимальное увеличение кратности ионизации в сверхзвуковых течениях в области  $l < l_c$ . Поскольку соответствующие сепаратрисе значения  $M_0$  и  $Z_c$  сами зависят от  $Z_0$  и  $l_0$ , выражение, связывающее кратность ионизации с начальными параметрами, имеет довольно сложный вид. Однако для сечений, меняющихся по степенному закону, эта связь легко формулируется в автомодельных переменных,  $Z_c/Z_0$  и  $l_0/l_c$ . Используя соотношение (20) и пренебрегая изменением скорости в области, где происходит основная ионизация, получаем

$$\frac{Z_c}{Z_0} = \exp \left\{ \frac{n}{n-1} \left[ \left( \frac{l_0}{l_c} \right)^{1-n} - 1 \right] \right\}. \quad (22)$$

Если перейти от автомодельных переменных к естественным, то это выражение даст уравнение, связывающее максимально достижимую среднюю кратность ионизации в критической точке с затравочной кратностью ионизации и площадью сечения, в которой задана последняя. Видно, что кратность ионизации неограниченно растёт при  $l_0/l_c \rightarrow 0$ , что свидетельствует о возможности зажигания разряда в условиях малой концентрации затравочной плазмы.

Рассмотрим теперь увеличение кратности ионизации в области  $l > l_c$ . Как было отмечено выше, максимальный рост этой величины соответствует начальным условиям  $M_0 = 1$  при  $l = l_0$ , т. е. это либо сепаратриса ( $l_0 = l_c$ ), либо траектории, начинающиеся с кризиса ( $l_0 > l_c$ ). Для таких траекторий и сечений, возрастающих по степенному закону, максимальное увеличение кратности ионизации при движении от  $l = l_0$  до  $l = \infty$  можно выразить в компактной форме, если воспользоваться приближёнными соотношениями (19) и (21) и при вычислении интеграла сделать замену переменных — перейти от координаты  $l$  к безразмерной скорости  $x = u/c_1$ . В результате получим

$$\bar{Z}(\infty)/Z_c = \exp\left[(l_0/l_c)^{1-n} \ln C_n\right] \leq C_n, \quad (23)$$

где

$$C_n = \exp \int_1^{\infty} \frac{x^2 - 1}{x^{2+1/n}} \exp\left[-\frac{n-1}{2n}(x^2 - 1)\right] dx \approx 1,36 + \frac{0,36}{\sqrt{n(n-1)}}.$$

Видно, что чем ближе расположена точка кризиса  $M_0 = 1$  (начальное сопло) к критическому сечению, тем больше увеличение кратности ионизации при разлёте плазмы на бесконечность. Максимум достигается при движении по сепаратрисе, когда размер сопла в точности равен критическому размеру ( $l_0 = l_c$ ). Однако даже в этом случае увеличение кратности ионизации ограничено числом  $C_n$ , которое зависит только от скорости расширения и не сильно отличается от единицы для достаточно быстрого расширения, например  $C_n = 1,58$  для  $n = 2$ .

Приведём общую оценку максимального допустимого увеличения кратности ионизации при расширении сверхзвукового потока плазмы по степенному закону. Для этого достаточно перемножить формулы (22) и (23) при  $l_0 = l_c$  для траекторий типа 1 (без кризиса) и воспользоваться соотношением (23) для траекторий типа 2 (с кризисом). В результате получим

$$\bar{Z}(\infty)/Z_0 = \begin{cases} C_n \exp\left\{\frac{n}{n-1} \left[(l_0/l_c)^{1-n} - 1\right]\right\}, & l_0 < l_c; \\ \exp\left[(l_0/l_c)^{1-n} \ln C_n\right], & l_0 > l_c. \end{cases} \quad (24)$$

Таким образом, максимальная кратность ионизации для заданного (степенного) закона расширения плазмы зависит только от отношения  $l_0/l_c$ . Вследствие автомодельности задачи этот вывод остаётся верным и для точных решений исходных уравнений. Здесь необходимо напомнить, что положение критического сечения, а вместе с ним и параметр  $l_0/l_c$ , зависит от начальных условий, т. е. от  $Z_0$ . Поэтому в неавтомодельных переменных величины  $\bar{Z}(\infty)$  и  $Z_0$  связаны сложнее, чем линейным соотношением. На рис. 4 приведено сравнение оценки (24) с результатами численного интегрирования уравнений (14) для потока плазмы, расширяющегося по закону  $\sigma \propto l^2$ . Видно, что наше приближение неплохо описывает максимальную достижимую кратность ионизации.

Ещё раз отметим, что расширение сверхзвукового потока изотермической плазмы может остановить процесс её ступенчатой ионизации. В результате мы получаем самоорганизующийся разряд с конечными размерами, которые определяются граничными условиями. Этот эффект, в частности, проявляется при сферически-симметричном разлёте плазмы или при радиальном разлёте в заданный телесный угол.

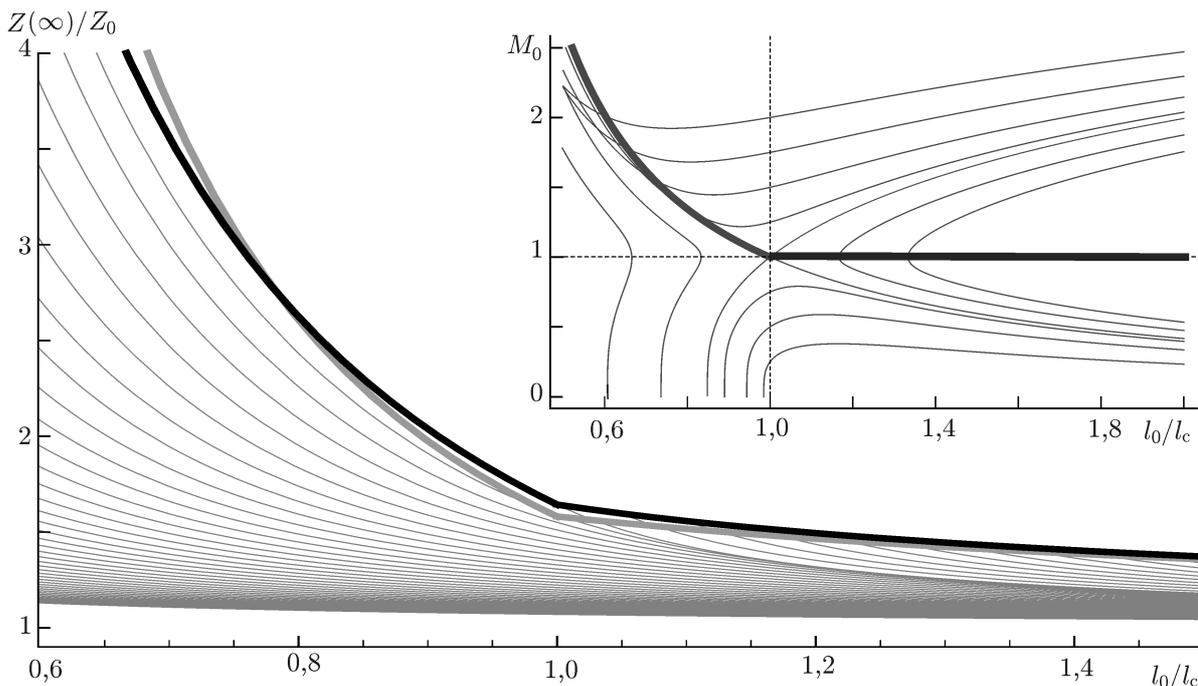


Рис. 4. Сравнение теоретической оценки (24) для максимальной кратности ионизации (толстая серая линия) с результатами численного интегрирования (толстая чёрная линия) уравнений (14) для потока, расширяющегося по закону  $\sigma \propto l^2$ . На вставке жирной линией показаны начальные числа Маха, соответствующие приведённому семейству решений

## 5. ДОЗВУКОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ

Рассмотрим случай дозвукового расширения ионизирующейся плазмы. Такой режим не обеспечивает спадания давления к нулю при удалении от точки напуска. Однако только в этом режиме возможно согласование потока плазмы с горячими электронами с потоком нейтрального газа, который движется со скоростью, много меньшей скорости ионного звука.

Продолжающиеся на бесконечность решения, отвечающие дозвуковому течению, соответствуют типам 2 и 3 с  $M < 1$  на рис. 2. В качестве примера на рис. 5 приведены распределения параметров плазмы вдоль потока в режиме дозвукового течения без кризиса стационарного состояния, т. е. типа 3. Можно отметить следующие общие закономерности: 1) ускорение и основная ионизация потока происходят в области до критического сечения, в отличие от сверхзвукового случая ионизация носит «взрывной» характер, т. е. развивается на конечной длине, не зависящей от малой начальной затравки; 2) после прохождения критического сечения поток начинает тормозиться, при этом концентрация электронов выходит на постоянное значение, а ионизация продолжается, однако уже не имеет взрывного характера.

Характерной особенностью дозвукового движения является то, что при движении потока до критического сечения ионизация плазмы происходит настолько быстро, что условие критического градиента выполняется на малом расстоянии от точки начала разряда. Размер области  $l < l_c$  настолько мал, что при рассмотрении движения в ней вариацией поперечной площади потока можно пренебречь. В этом приближении полное давление сохраняется, поэтому зависимость  $\bar{Z}(l)$  может быть найдена из уравнений (18) и (20). Например, для движения по сепаратрисе справедливо соотношение  $u + c^2/u = 2\sqrt{Z_c} c_1$ , и поэтому  $u = \sqrt{Z_c} c_1 (1 - \sqrt{1 - Z/Z_c})$ . Подставляя

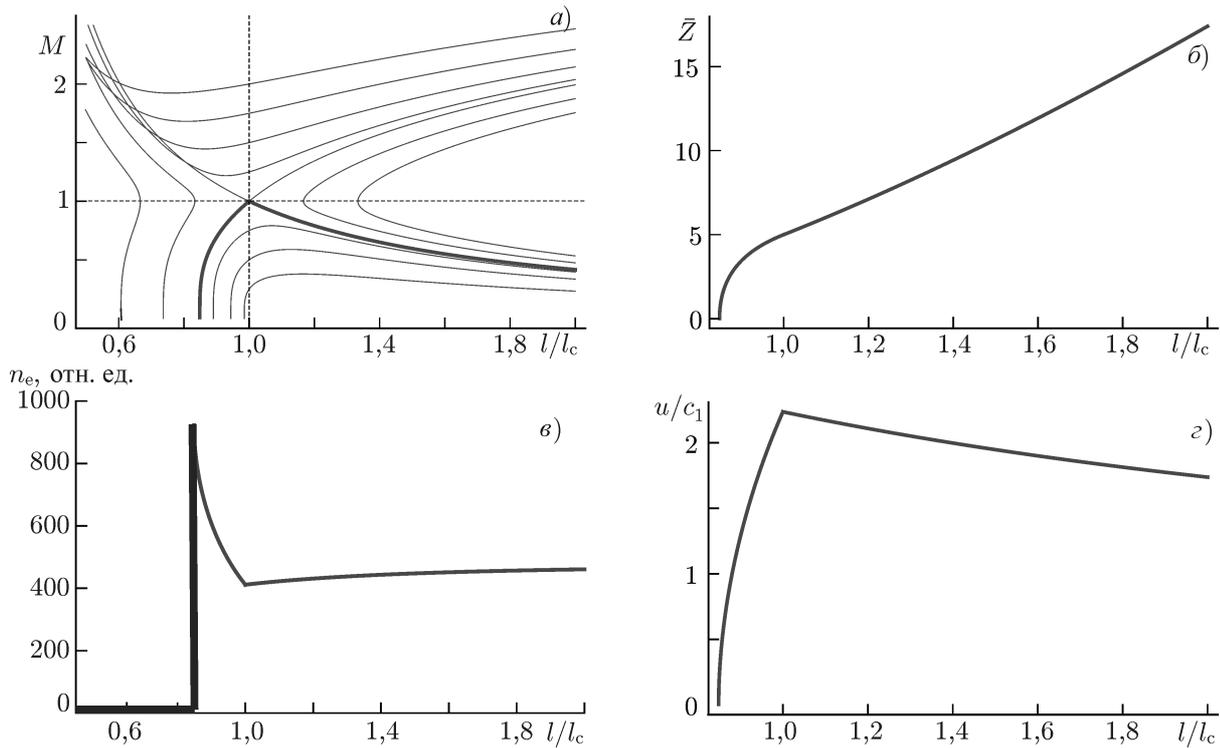


Рис. 5. Зависимости числа Маха (а), средней кратности ионизации (б), концентрации электронов (в) и газодинамической скорости (з) от координаты вдоль потока в режиме дозвукового течения без кризиса. Поток расширяется по закону  $\sigma \propto l^2$

последнее соотношение в уравнение (20) и переходя к переменной  $z = \bar{Z}/Z_c$ , получаем

$$\Phi(z) = \int_0^z (1 - \sqrt{1-z})^2 \frac{dz}{z} = \frac{k_i \Gamma}{Z_c c_1^2} \int_{l_0}^l \frac{dl}{\sigma} \approx \frac{\partial \sigma_c}{\sigma_c} (l - l_0).$$

Здесь мы приняли, что разряд начинается с нулевой затравки,  $\bar{Z}(l_0) = 0$ , и пренебрегли вариацией сечения,  $\sigma \approx \sigma_c$ . Интеграл по  $z$  берётся в элементарных функциях:  $\Phi(z) = 4(1 - \sqrt{1-z}) - z + 4 \ln(1 + \sqrt{1-z}) - 4 \ln 2$ ; для оценок удобнее использовать его степенную аппроксимацию  $\Phi(z) \approx \Phi(1)z^{2,5}$ ,  $\Phi(1) \approx 0,2$ . В результате для движения по сепаратрисе получаем

$$\frac{\bar{Z}}{Z_c} \approx \left( \frac{l - l_0}{0,2l_\sigma} \right)^{2/5},$$

где  $l_\sigma = \sigma_c / \partial \sigma_c$  — характерный масштаб неоднородности функции  $\sigma(l)$  в области перехода через звуковой барьер. Решения, отличные от сепаратрисного, получаются из приведённого выше решения перемасштабированием заряда и сдвигом по координате. Видно, что относительная длина области до критического сечения равна  $(l_c - l_0)/l_\sigma \approx 0,2$  и не зависит ни от каких параметров. Для степенной зависимости  $\sigma = \sigma_c (l/l_c)^n$  координата критического сечения  $l_c = nl_\sigma$ , поэтому можно утверждать, что рассматриваемая область прижата к сечению, в котором происходит переход через звуковой барьер ( $l_c - l_0 \ll l_c$ ). Эти рассуждения подтверждают наше исходное предположение, что  $\sigma \approx \text{const}$ . Однако для более общих законов расширения, например вида  $\sigma = \sigma_0 + \Omega l^2$ , условие близости начала разряда к критическому сечению может не выполняться, т.к.  $l_c \ll l_\sigma$ .

Дозвуковое движение в области за критическим сечением хорошо описывается в приближении постоянной концентрации электронов. Физически это отвечает пренебрежению газодинамическим напором в уравнении баланса импульса (т. е. левой частью уравнения (7)) для изотермической плазмы. Формально такое движение описывается уравнениями (10), в которых  $\partial u = 0$ . В результате для средней кратности ионизации получаем уравнение

$$\partial \bar{Z}^2 / 2 = k_i \Gamma P^2 \sigma, \quad P = \bar{Z} / (\sigma u) = \text{const.}$$

Это уравнение описывает неограниченный рост средней кратности ионизации  $\bar{Z} \propto (\int \sigma dl)^{1/2}$  в расширяющемся потоке плазмы, при этом скорость течения  $u$  падает по закону  $u \propto (\int \sigma dl)^{1/2} \sigma^{-1}$ . Для степенной зависимости  $\sigma \propto l^n$  можно перейти к автомодельным переменным  $z = \bar{Z} / Z_c$ ,  $\xi = l / l_c$  и получить универсальное уравнение, описывающее дозвуковое расширение плазмы при постоянном давлении:  $dz^2 / d\xi = 2n\xi^n$ . Тогда

$$z^2 = z_0^2 + 2n(\xi^{n+1} - \xi_0^{n+1}) / (n + 1),$$

где  $z_0$  — постоянная. На больших расстояниях имеем  $\bar{Z} \propto l^{(1+n)/2}$  и  $u \propto l^{(1-n)/2}$ , в частности для радиального разлёта  $\bar{Z} \propto l^{3/2}$  и  $u \propto l^{-1/2}$  (здесь  $n = 2$ ).

## 6. ТЕЧЕНИЕ С ПЕРЕХОДОМ ЧЕРЕЗ ЗВУКОВОЙ ПОРОГ

Мы убедились, что оптимальные с точки зрения достижения максимальной кратности ионизации режимы реализуются при движениях вблизи сепаратрис, разделяющих седловые траектории. Были рассмотрены решения, в которых поток сохраняет сверх- или дозвуковой характер, при этом в окрестности перехода через звуковой порог происходит перескок с одной сепаратрисы на другую. Однако при движении точно вдоль одной из сепаратрис возможно ещё одно решение, отвечающее плавному переходу от дозвукового течения к сверхзвуковому. Этот чрезвычайно важный класс решений позволяет согласовать медленное движение плотного нейтрального газа или слабоионизованной плазмы в окрестности сопла с быстрым направленным движением разреженной плазмы с многозарядными ионами, расширяющейся в вакуум.

Пример такого решения приведён на рис. 6. Оно получено как комбинация решений, представленных на рис. 3 при  $l > l_c$  и рис. 5 при  $l < l_c$  и описывает локализованный разряд в расходящейся струе нейтрального газа, изначально движущегося гораздо медленнее звука. Опираясь на результаты предыдущих разделов, можно утверждать, что область дозвукового течения прижата к сечению, в котором реализуется переход через звуковой порог. В этой области происходит основная генерация многократно ионизованных атомов, поскольку в сверхзвуковом потоке средняя кратность ионизации может подняться лишь в  $C_n \sim 1,5$  раза по отношению к значению, набранному к точке перехода через звуковой порог. Поэтому характерной особенностью рассматриваемого разряда является то, что размер области, в которой происходит основная ионизация плазмы, по-видимому, всегда достаточно мал.

Очевидным недостатком построенного решения является отсутствие грубости: бесконечно малое возмущение начальных условий разрушает движение по сепаратрисе. В результате звуковой переход становится невозможным: стационарный поток либо остаётся дозвуковым, либо упирается в кризис. Анализ структурной устойчивости такого решения выходит за рамки данной работы. Заметим только, что в рамках используемых приближений указанное решение обеспечивает единственную возможность плавно сшить до- и сверхзвуковые течения, поэтому именно оно и реализуется, если стационарный режим вообще возможен. В этом отношении наша задача аналогична задаче о стационарном вытекании плазмы из магнитной ловушки, в которой «сепаратрисное» граничное решение используется довольно широко.

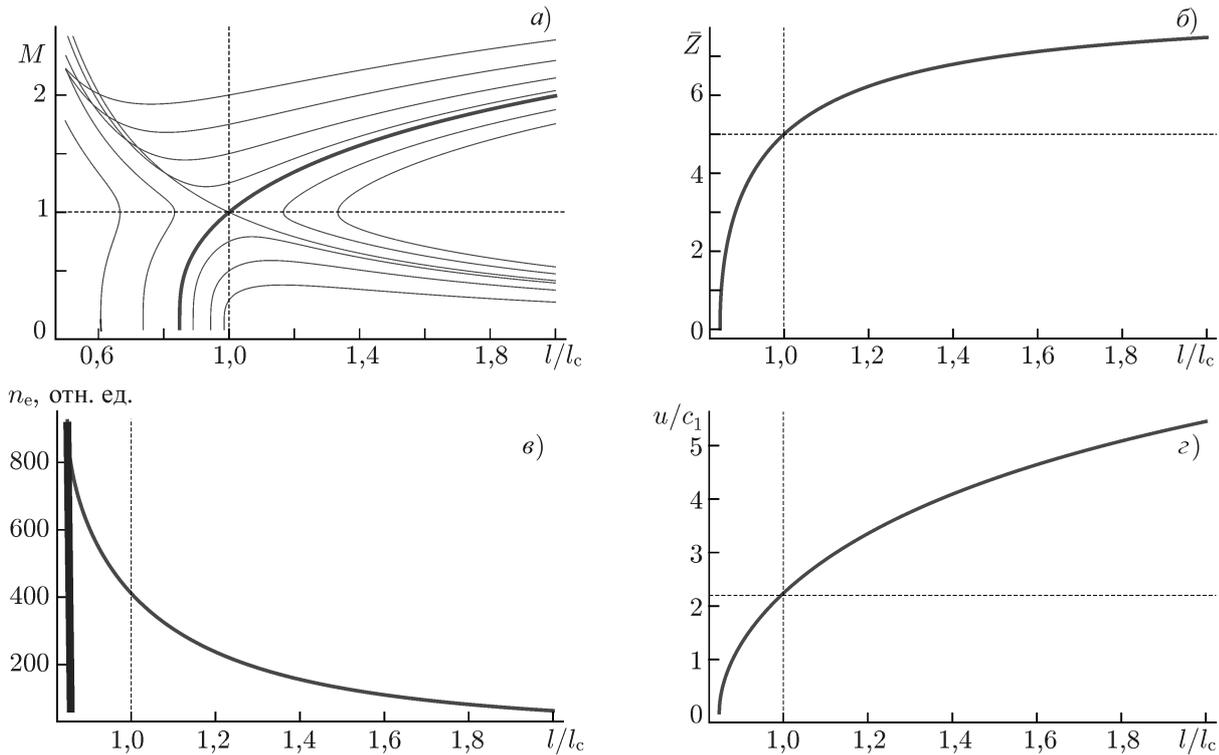


Рис. 6. Зависимости числа Маха (а), средней кратности ионизации (б), концентрации электронов (в) и газодинамической скорости (з) от координаты вдоль потока в режиме перехода дозвук—сверхзвук. Поток расширяется по закону  $\sigma \propto l^2$

### 7. ПРИМЕР: МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛАЗМЕННОГО ИСТОЧНИКА УЛЬТРАФИОЛЕТОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

В качестве возможного приложения рассматриваемой модели рассмотрим задачу об определении профиля радиационных потерь в экспериментах по генерации жёсткого ультрафиолетового излучения, описанных во введении. Для этого введём погонные потери на ионизацию и возбуждение линий излучения в описываемой системе:

$$q(l) = \sigma \left\{ \sum_{i=0}^{Z_m-1} k_i E_i + \sum_{i=0}^{Z_m} \sum k_i^* E_i^* \right\} n_i n_i^*, \tag{25}$$

где  $E_i, k_i$  и  $E_i^*, k_i^*$  — энергии и константы ионизации и возбуждения электронным ударом соответственно, внутреннее суммирование проводится по всем возбуждаемым линиям. Предполагается, что возбуждение ионов происходит из основного состояния, сброс возбуждения также происходит только при переходе в основное состояние, а излучаемый в результате спонтанного перехода фотон беспрепятственно покидает объем разряда. Полная мощность потерь энергии складывается из потерь на ионизацию, возбуждение и конвективных потерь  $K$  на границе разряда:

$$Q = \int q dl + K. \tag{26}$$

Величина  $K$  зависит от того, как именно ограничен разряд. Для наших оценок примем, что  $K = \sigma n (m_i u^2 / 2 + 5 \bar{Z} T_e / 2)$ , причём эта величина вычисляется в критическом сечении.

Ниже мы отходим от приближения одинаковых констант для разных кратностей ионизации. Уравнения баланса потоков частиц и импульса (6) и (7) интегрируются численно для разряда в аргоне. Для вычисления констант ионизации используются эмпирические формулы, предложенные Г. С. Вороновым [19]. Необходимые для расчёта радиационных потерь данные о сечениях возбуждения ионов аргона взяты из работы [20], в которой систематизированы энергии и силы осцилляторов для основных линий, на которые приходится максимум потерь.

В работе [8] описан разряд, который поддерживается излучением субмиллиметрового диапазона длин волн в потоке газа, истекающим из сопла с малым диаметром. В качестве приближения такой разряд можно рассматривать как стационарный разлёт ионизирующейся плазмы в вакуум. На рис. 7 приведены результаты численного решения системы балансных уравнений для параметров, близких к условиям эксперимента [8]. Построены распределения концентраций компонент плазмы, средней кратности ионизации, газодинамической скорости потока и удельной мощности потерь в зависимости от координаты вдоль потока. Из этого рисунка видно, что разряд локализован вблизи сопла в области с диаметром менее 1 мм, что совпадает с данными эксперимента. Результаты расчёта подтверждают сделанный ранее вывод об ограниченности разряда в расширяющемся потоке. Это даёт основания полагать, что источник жёсткого ультрафиолетового излучения на основе разрядов такого типа будет хорошо локализован в пространстве. Следует заметить, что характер процесса ступенчатой ионизации, в свою очередь, также полностью соответствует полученным в результате качественного анализа представлениям: увеличение средней кратности ионизации происходит в основном в дозвуковой части разряда, в сверхзвуковой области ионизация перестаёт быть существенной и в итоге полностью прекращается вследствие расширения потока.

Моделирование потерь по формулам (25) и (26) показывает, что для поддержания стационарного разряда при рассматриваемых параметрах необходима мощность около 80 кВт, из которой 80 % тратится на потери из-за линейчатого излучения возбуждённых ионов. На рис. 8 показано распределение этой мощности по компонентам плазмы с разными зарядами. По приведённым данным можно сделать вывод об увеличении доли радиационных потерь с ростом кратности ионизации, при этом спектр излучения смещается в сторону более коротких волн. Таким образом, наша модель позволяет оценить полную мощность, необходимую для зажигания разряда, и выделить в ней доли, соответствующие различным механизмам потерь.

## 8. ПРИМЕНИМОСТЬ ИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

В заключение обсудим условия применимости изотермического приближения. Для этого рассмотрим баланс энергии с учётом конечной теплопроводности и объёмных потерь в виде (25). Для квазиодномерного потока с сечением  $\sigma(l)$  имеем

$$\partial[\sigma n u (m_i u^2/2 + 5\bar{Z}T_e/2) - \sigma \chi_e \partial T_e] = -\sigma \sum_{i=0}^{Z_m} \varepsilon_i k_i n_i n_e = -\sum_{i=0}^{Z_m} \varepsilon_i \sum_{j=0}^i \partial(\sigma n_j u),$$

где  $\varepsilon_i(T_e) = E_i + \sum k_i^* E_i^*/k_i$  — энергетическая «цена» иона, рассчитанная с учётом потерь на ионизацию и излучение, а  $\chi_e \approx 3n_e T_e / (m_e \nu_{ei}) \propto T_e^{5/2}$  — коэффициент электронной теплопроводности в полностью ионизованной плазме, суммирование в выражении для  $\varepsilon_i$  проводится по всем возбуждаемым линиям,  $\nu_{ei}$  — частота упругих соударений электронов с ионами. В случае высокой теплопроводности масштаб изменения электронной температуры значительно превышает масштабы изменения потоков массы компонент плазмы, поэтому функция  $\varepsilon_i(T_e)$  может быть

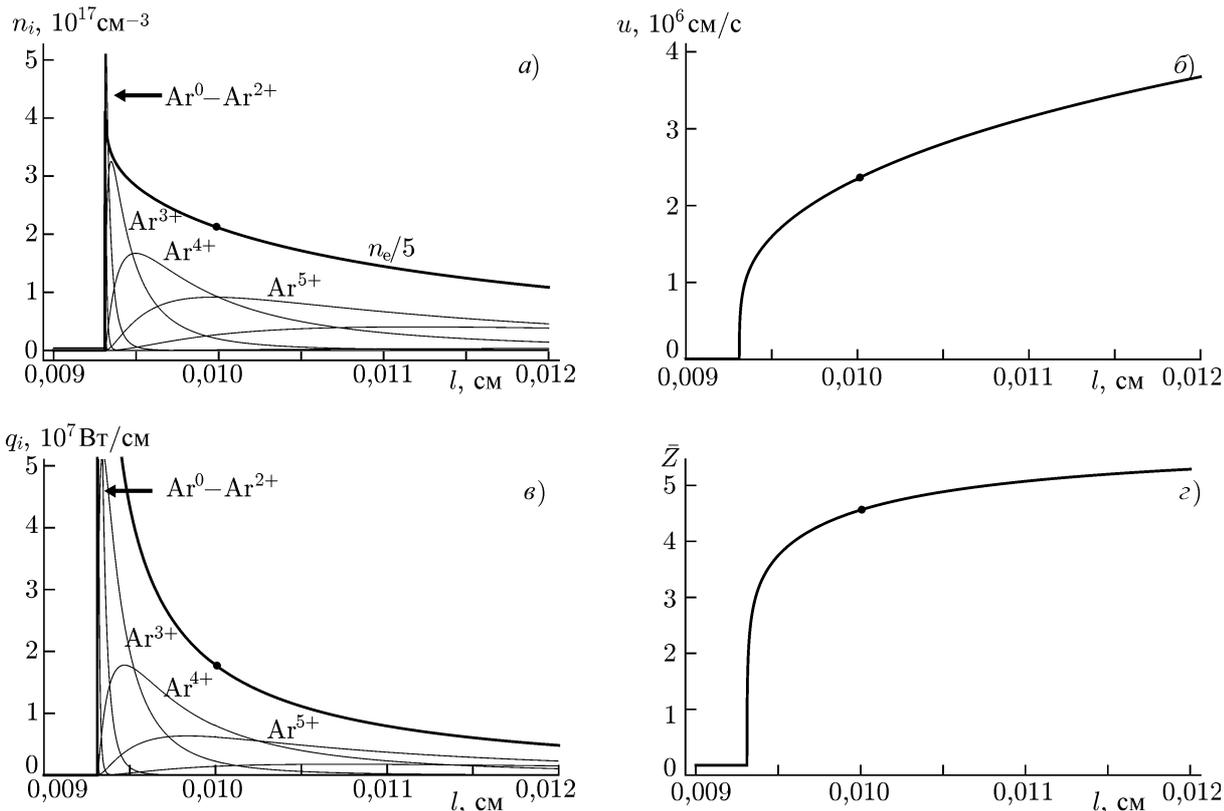


Рис. 7. Моделирование разряда в аргоне в условиях многократной ионизации электронным ударом в режиме перехода дозвук—сверхзвук: (а) концентрация ионов с различной кратностью ионизации (тонкие линии) и электронов (жирная линия), концентрация электронов уменьшена в 5 раз; (б) скорость потока; (в) погонная плотность мощности потерь  $q_i = \sigma (k_i E_i + \sum k_i^* E_i^*) n_i n_e$ , где суммирование проводится по возбуждаемым линиям (тонкие кривые соответствуют отдельным компонентам, жирная кривая — общая); (г) средняя кратность ионизации в зависимости от координаты вдоль потока. Параметры моделирования: полный поток тяжёлых частиц  $\Gamma = 10^{20} \text{ с}^{-1}$ , температура электронов  $T_e = 50 \text{ эВ}$ , критический диаметр поперечного сечения  $d_c = 150 \text{ мкм}$  (положение критического сечения отмечено точкой), сечение потока расширяется по закону  $\sigma = \Omega l^2$ ,  $\Omega = (2 - \sqrt{2}) \pi$

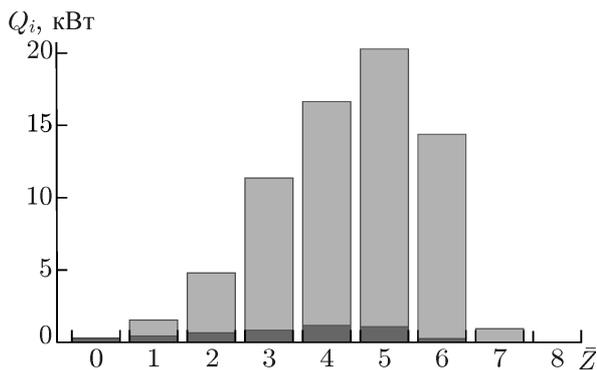


Рис. 8. Распределение мощности потерь  $Q_i = \int q_i dl$  по кратности ионизации атомов для разряда в аргонной плазме. Высота столбца соответствует полной поглощаемой фракцией мощности, тёмным отмечена доля мощности, приходящаяся на ионизацию, светлая часть соответствует мощности, затрачиваемой на возбуждение ионов. Полная мощность потерь составляет 80 кВт, из них 10 кВт приходятся на конвективные потери. Параметры моделирования те же, что и на рис. 7

внесена под знак дифференцирования. В результате мы приходим к сохранению потока энергии:

$$S = \sigma u \left( m_i n u^2 / 2 + 5 n_e T_e / 2 + \sum_{i=0}^{Z_m} \varepsilon_i \sum_{j=0}^i n_j \right) - \sigma \chi_e \partial T_e = \text{const.} \tag{27}$$

Для оценки масштаба изменения температуры в окрестности сопла будем считать, что основные потери энергии идут на излучение и ионизацию. Поэтому оставим два последних слагаемых в выражении (27) и воспользуемся приближённым соотношением  $\sigma_c \chi_e T_e / L_T \approx \Gamma \varepsilon_i$ , где величина  $i \approx \bar{Z}_c$  определяется средней кратностью ионизации в сопле. Отсюда можно найти отношение характерного масштаба изменения температуры  $L_T$  к координате сопла  $l_c$  в виде

$$L_T/l_c \approx 3 (m_i/m_e) (\nu_i/\nu_{ei}) [T_e/(\bar{Z}_c \varepsilon_{Z_c})]/2, \quad (28)$$

где  $\nu_i = n_e k_{Z_c}$ . В полученном выражении справа стоит функция только температуры и средней кратности ионизации в критической точке. Теплопроводность в приведённой оценке определяется кулоновскими соударениями, поэтому величина  $\nu_i/\nu_{ei}$  характеризует долю неупругих (ионизирующих) соударений по отношению к упругим соударениям. В выражение для  $L_T/l_c$  вошло также большое число  $m_i/m_e$ , которое формально и обеспечивает применимость изотермического приближения в широком диапазоне параметров.

На рис. 9 показан пример более точного (численного) расчёта величины  $L_T/l_c$  непосредственно из соотношения (27) и балансных уравнений (6) и (7) для аргона. Заметим, что для приведённого в предыдущем разделе примера ( $Z_c = 4,5$ ,  $T_e = 50$  эВ) длина теплопроводности в критическом сечении равна  $L_T \approx 20l_c \approx 2$  мм, в то время как основные потери сосредоточены в области с размером менее  $5l_c$  (на эту область приходится 98 % потерь на излучение и ионизацию).

Изотермическое приближение, очевидно, перестаёт работать на больших расстояниях от сопла. В частности, оно приводит к абсурдному значению конвективных потерь для неограниченно разряда, поскольку при сверхзвуковом расширении скорость потока неограниченно растёт, а распределение кратности ионизации перестаёт меняться. Поэтому для аккуратной оценки конвективных потерь энергии необходимо учесть либо отклонение от изотермического приближения на масштабах  $l \sim L_T$ , либо собирающую плазму стенку на конечном расстоянии от сопла. Указанные эффекты будут рассмотрены в отдельной работе.

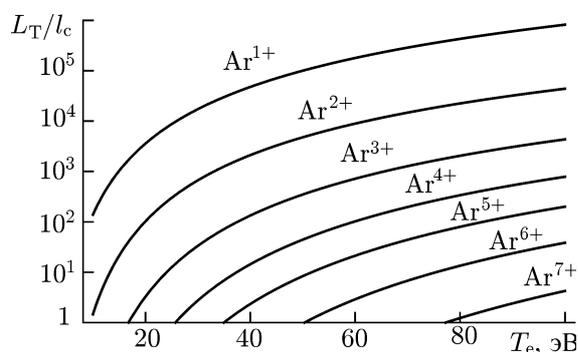


Рис. 9. Зависимость отношения характерной длины теплопроводности к координате критического сечения от электронной температуры для расширяющегося потока аргоновой плазмы. Сечение потока расширяется по закону  $\sigma \propto l^2$

## 9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена простая газодинамическая модель, описывающая особенности формирования стационарного разряда в потоке газа с многозарядными ионами и заданной электронной температурой, многократно превышающей температуру ионов и нейтральных атомов. Основным упрощающим фактором является предположение о постоянстве электронной температуры, которое обуславливается высокой электронной теплопроводностью. Модель позволяет описывать изменение ионного состава плазмы вдоль потока, расширяющегося по заданному внешними условиями закону, и процесс ускорения многократно ионизованных ионов амбиполярным полем. Найдены решения, отвечающие локализованному разряду, и исследованы механизмы, ограничивающие процесс ступенчатой ионизации изотермической плазмы. В частности, показано, что геометрическое расширение сверхзвукового потока из сопла останавливает процесс ионизации.

В заключение обсудим, как соотносить нашу модель с данными эксперимента. Рассмотрим ионизацию первоначально нейтральной струи газа, предварительная ионизация которой настолько мала, что давление в ней определяется давлением нейтрального газа. Как уже отмечалось, основная генерация многократно ионизованных ионов осуществляется в области дозвукового течения, прижатой к сечению, в котором происходит переход через звуковой барьер. В этой области расширением струи можно пренебречь, что эквивалентно условию постоянства давления. Изобарическое приближение позволяет связать давление нейтрального газа в сопле  $p_0 = n_0 T_0$  со свободным параметром нашей модели — кратностью ионизации  $Z_c$  в критическом сечении:

$$p_0 = m_i n u^2 + n_e T_e = m_i (n u^2 + n c^2)_c = 2 (\Gamma / \sigma_c) \sqrt{Z_c T_e m_i}.$$

В условиях заданных давления и площади сопла  $\sigma_0 \approx \sigma_c$  это соотношение даёт связь между расходом частиц  $\Gamma$  и кратностью ионизации в критическом сечении, которая может быть полезной при интерпретации результатов эксперимента. Если известна полная мощность вкладываемого в стационарный разряд излучения, то из баланса энергии может быть найден второй свободный параметр — температура электронов. Кроме того, в изобарическом приближении нетрудно оценить и скачок электронной концентрации на начальной стадии разряда  $n_e \approx p_0 / T_e$  (см. рис. 5), который даёт дополнительную информацию о температуре электронов в разряде. Разработанный подход позволяет оптимизировать параметры разряда для реализации наилучшего пространственного распределения ионов по кратности ионизации, обеспечивающего максимум излучения плазмы в заданном спектральном диапазоне.

Авторы выражают благодарность С. В. Голубеву и В. Е. Семёнову за внимание к работе и ценные замечания. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 14-12-00609). А. Г. Шалашов благодарит за персональную поддержку Совет по грантам при Президенте Российской Федерации для государственной поддержки молодых учёных (грант МД-1736.2014.2) и Российский фонд фундаментальных исследований (проект 13-02-01132). И. С. Абрамов благодарит за персональную поддержку Фонд некоммерческих программ Дмитрия Зимина «Династия».

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Vodopyanov A. V., Razin S. V., Vizir A. V., et al. // Rev. Scientific Instruments. 2004. V. 75, No. 5. P. 1888.
2. Водопьянов А. В., Мансфельд Д. А., Николаев А. Г. и др. // Журн. техн. физ. 2005. Т. 75, № 9. С. 101.
3. Vodopyanov A. V., Golubev S. V., Khizhnyak V.I., et al. // High energy physics and nuclear physics. 2007. V. 31. P. 159.
4. Водопьянов А. В., Голубев С. В., Мансфельд Д. А. и др. // Письма в ЖЭТФ. 2008. Т. 88, № 2. С. 103.
5. Водопьянов А. В., Голубев С. В., Мансфельд Д. А. и др. // Изв. РАН. Серия физическая. 2011. Т. 75, № 1. С. 68.
6. Chkhalo N. I., Salashchenko N. N., Golubev S. V., et al. // J. Micro/Nanolithography, MEMS, and MOEMS. 2012. V. 11, No. 2. Art. no. 021123.
7. Yushkov G. Yu., Vodopyanov A. V., Nikolaev A. G., et al. // IEEE Trans. Plasma Science. 2013. V. 41, No. 8. P. 2081.
8. Glyavin M. Yu., Golubev S. V., Izotov I. V., et al. // Appl. Phys. Lett. 2014. V. 105. Art. no. 174101.

9. Richardson M., Koay C.-S., Takenoshita K., et al. // J. Vac. Sci. Technol. B. 2004. V. 22, No. 2. P. 785.
10. Vivek B. EUV Sources for lithography. Washington: SPIE Press Monograph, 2006. V. PM149. 1094 p.
11. Endo A., Komori H., Ueno Y., et al. // Proc. SPIE. 2009. V. 7271. Art. no. 727108.
12. Водопьянов А. В., Голубев С. В., Зорин В. Г. и др. // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26, № 24. С. 7.
13. Райзер Ю. П. Физика газового разряда. М.: Наука, 1992. 536 с.
14. Dorf M. A., Semenov V. E., Zorin V. G. // Phys. Plasmas. 2008. V. 15. Art. no. 093501.
15. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
16. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Теоретическая физика. Т. 10. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 528 с.
17. Turlapov A. V., Semenov V. E. // Phys. Rev. E. 1998. V. 57, No. 5. P. 5937.
18. Semenov V. E., Smirnov A. N., Turlapov A. V. // Fusion Technology. 1999. V. 35, No. 1T. P. 398.
19. Voronov G. S. // Atomic Data and Nuclear Data Tables. 1997. V. 65, No. 1. P. 1.
20. Verner D. A., Verner E. M., Ferland G. J. // Atomic Data and Nuclear Data Tables. 1996. V. 64, No. 1. P. 1.

Поступила в редакцию 17 марта 2015 г.; принята в печать 16 июля 2015 г.

## FORMATION OF A MULTIPLY CHARGED PLASMA IN THE DIRECTED GAS FLOW

*I. S. Abramov, E. D. Gospodchikov, and A. G. Shalashov*

We consider a gas-dynamic model describing the formation of a plasma with multiply ionized ions under the conditions of resonant heating of the electron component. Based on the isothermal approximation, possible regimes of the plasma flow are classified, the influence of the geometric divergence of the flow on the formation of the ion charge distribution is studied, and optimal regimes for the achievement of the maximum ion charge are identified. The model can be used for optimization and interpretation of modern experiments on generation of the extreme ultraviolet radiation due to the excitation of lines of multiply ionized atoms in a gas flow heated by strong millimeter or submillimeter waves.