УДК 621.373.1

ДИНАМИКА ФАЗОВЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С ПЛАСТИЧНЫМИ СВЯЗЯМИ

Д. В. Касаткин [1] *, *В. И. Некоркин* [1,2]

[1] Институт прикладной физики РАН;
[2] Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия

Исследованы динамические режимы в системе двух идентичных взаимодействующих фазовых осцилляторов с пластичными связями. Особенностью рассматриваемой системы является совместная эволюция состояний самих элементов и межэлементных связей. Показано, что введение пластичных связей приводит к мультистабильному поведению системы, а также к возникновению асинхронных режимов, которые не наблюдаются для рассматриваемых значений параметров в случае статических связей. Проведено разбиение плоскости параметров на области с различными динамическими режимами системы. В частности, выделены области, в которых система демонстрирует бистабильное синхронное поведение, а также область, где наблюдается сосуществование множества различных асинхронных режимов.

ВВЕДЕНИЕ

Исследование коллективной динамики сетей, состоящих из взаимодействующих автоколебательных элементов, является одной из актуальных задач нелинейной динамики. Наиболее часто для изучения динамики таких систем используется подход, основанный на их фазовом описании. Он предполагает, что связь между элементами является слабой, поэтому можно пренебречь изменениями амплитуд колебаний, рассматривая лишь динамику их фаз. В этом случае, следуя подходу, развитому Курамото [1], задачу можно свести к изучению динамики модели в виде сети фазовых осцилляторов. Данная сеть имеет вид

$$\frac{\mathrm{d}\phi_i}{\mathrm{d}t} = \omega_i - \sum_j \kappa_{ij} F(\phi_i - \phi_j). \tag{1}$$

Здесь величины ϕ_i и ω_i характеризуют фазу и индивидуальную частоту i-го осциллятора соответственно, κ_{ij} описывает силу воздействия j-го осциллятора на i-й, $F(\phi)$ — функция связи, зависящая от разности фаз взаимодействующих элементов.

Фазовые модели вида (1) широко применялись при исследовании эффектов синхронизации. В частности, изучались сети с различной топологией связей и законами распределения собственных частот колебаний (см., например, работы [2–5]). Сравнительно недавно к рассмотрению фазовых моделей стали прибегать при изучении процессов в нейронных ансамблях, связи между элементами которых обладают свойством пластичности [6–9]. Характерным свойством такого класса систем является совместная эволюция силы межэлементного взаимодействия и состояний самих элементов. Как правило, в этих работах рассматриваются процессы формирования фазовых кластеров [9, 10]. Однако в этих исследованиях практически не затрагивались вопросы, связанные с установлением влияния пластичных связей на режимы поведения в малых ансамблях взаимодействующих фазовых осцилляторов, хотя такая информация позволила бы объяснить многие эффекты, наблюдаемые при численном моделировании больших сетей. В этой связи

* kasatkin@neuron.appl.sci-nnov.ru

можно отметить лишь работы [11, 12], в которых эволюция переменных κ_{ij} описывается системой уравнений

$$\frac{\mathrm{d}\kappa_{ij}}{\mathrm{d}t} = -\varepsilon\chi(\phi_i - \phi_j), \qquad |\kappa_{ij}| \leqslant 1, \tag{2}$$

где $\chi(\phi)$ — периодическая (с периодом 2π) функция пластичности, определяющая характер изменения силы межэлементных связей в зависимости от состояний взаимодействующих элементов, в частности от их относительной разности фаз. Дополнительное условие $|\kappa_{ij}| \leqslant 1$ в системе уравнений (2) предотвращает неограниченный рост коэффициентов силы связи. В этом случае диапазон значений, которые могут принимать переменные κ_{ij}, ограничен интервалом $[-1, 1]$. Использование условия $|\kappa_{ij}| \leqslant 1$ в системе уравнений (2) приводит к тому, что в её стационарном состоянии коэффициенты силы связей принимают одно из граничных значений. Другой способ, при котором рост силы связи контролируется динамически, можно реализовать, например, посредством введения в правую часть системы уравнений (2) дополнительного слагаемого:

$$\frac{\mathrm{d}\kappa_{ij}}{\mathrm{d}t} = -\varepsilon\left[\chi(\phi_i - \phi_j) + \kappa_{ij}^{2\mu+1}\right]. \tag{3}$$

Здесь параметр $\mu \geqslant 0$ принимает целочисленные значения. Как отмечено в работе [12], наличие в системе уравнений (3) нового (по сравнению с системой уравнений (2)) слагаемого в случае $\mu \gg 1$ не вносит существенных изменений в её динамику. Динамика системы уравнений (3) при достаточно малых значениях параметра μ в работе [12] не рассматривалась.

В данной статье мы исследуем динамику двух фазовых осцилляторов, связи между которыми обладают свойством пластичности и описываются системой уравнений вида (3) при $\mu = 0$. Будем считать, что в системе уравнений (1) фазовые осцилляторы имеют одинаковые частоты, а функция $F(\phi)$ имеет вид $F(\phi) = \sin(\phi + \alpha)$, где параметр α удовлетворяет условию $0 < \alpha < \pi/2$ и характеризует наличие задержки при передаче воздействия от одного осциллятора к другому. Функцию $\chi(\phi)$ в системе уравнений (3) зададим в виде $\chi(\phi) = \sin(\phi + \beta)$, где параметр β удовлетворяет условию $0 < \beta < 2\pi$ и контролирует изменение силы связи в зависимости от разности фаз взаимодействующих осцилляторов, т. е. свойство пластичности связей. При сделанных предположениях система уравнений (1) и (3) примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} &= -\kappa_{12}\sin(\theta + \alpha) + \kappa_{21}\sin(-\theta + \alpha), \\
\frac{\mathrm{d}\kappa_{12}}{\mathrm{d}t} &= -\varepsilon\,[\sin(\theta + \beta) + \kappa_{12}], \\
\frac{\mathrm{d}\kappa_{21}}{\mathrm{d}t} &= -\varepsilon\,[\sin(-\theta + \beta) + \kappa_{21}],
\end{aligned} \tag{4}$$

где $\theta = \phi_1 - \phi_2$. Мы будем предполагать, что параметр $\varepsilon \ll 1$, т. е. связи между осцилляторами изменяются во времени значительно медленнее, чем фазовые переменные. Таким образом, система уравнений (4) задана в цилиндрическом фазовом пространстве $G = R^2 \times S^1$ и будет изучаться в области параметров $D = \{\alpha, \beta, \varepsilon : \varepsilon > 0, 0 < \alpha < \pi/2, 0 < \beta < 2\pi\}$[1].

[1] Заметим, что система уравнений (4) инвариантна относительно преобразований $(\alpha, \beta, \theta, \kappa_{12}, \kappa_{21}) \to (\pi - \alpha, -\beta, \theta, -\kappa_{21}, -\kappa_{12})$ и $(\alpha, \beta, \theta, \kappa_{12}, \kappa_{21}) \to (\alpha + \pi, \beta \pm \pi, \theta, -\kappa_{12}, -\kappa_{21})$. В силу этой симметрии достаточно рассмотреть её динамику в области параметров $\alpha \in (0, \pi/2)$ и $\beta \in (0, 2\pi)$.

1. ДИНАМИКА СИСТЕМЫ

Для удобства введём в системе уравнений (4) новые переменные: $y = \kappa_{12} + \kappa_{21}$ и $z = \kappa_{21} - \kappa_{12}$. В результате она примет следующий вид:

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -y\cos\alpha\sin\theta + z\sin\alpha\cos\theta,$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\varepsilon(y + 2\sin\beta\cos\theta), \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -\varepsilon(z - 2\cos\beta\sin\theta). \tag{5}$$

Из системы уравнений (5) следует, что в фазовом пространстве G существует поглощающая область

$$G^+ = \{\theta, y, z : \theta \in S^1, |y| \leqslant 2\,|\sin\beta|, |z| \leqslant 2\,|\cos\beta|\}.$$

Фазовые траектории системы (5) с начальными условиями вне G^+ с течением времени приходят в эту область и остаются в ней. Далее будем рассматривать динамику системы уравнений (5) в области G^+, выбрав, для определённости, интервал изменения переменной θ от $-\pi$ до π. Заметим, что система уравнений (5) инвариантна относительно преобразований

$$\theta \to \theta \pm \pi, \quad y \to -y, \quad z \to -z \tag{6}$$

и

$$\theta \to -\theta \pm \pi, \quad y \to -y, \quad z \to z. \tag{7}$$

1.1. Состояния равновесия

Нетрудно видеть, что координаты состояний равновесия определяются системой уравнений

$$\sin(2\theta)\sin(\alpha+\beta) = 0, \qquad y + 2\sin\beta\cos\theta = 0, \qquad z - 2\cos\beta\sin\theta = 0. \tag{8}$$

Очевидно, что возможны два принципиально различных решения системы уравнений (8).

1) Случай $\sin(\alpha+\beta) = 0$. В этом случае система уравнений (8) имеет однопараметрическое семейство решений

$$\theta = \theta_0 = \mathrm{const}, \qquad y = -2\sin\beta\cos\theta_0, \qquad z = 2\cos\beta\sin\theta_0.$$

Следовательно, в пространстве G^+ существует линия состояний равновесия

$$L_0 = \{\theta = \theta_0, \quad y = -2\sin\beta\cos\theta_0, \quad z = 2\cos\beta\sin\theta_0\},$$

где параметр θ_0 изменяется от $-\pi$ до π. Характеристические показатели линеаризованной на L_0 системы уравнений (5) равны

$$\lambda_1 = -\varepsilon, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -\varepsilon + 2\cos\alpha\sin\beta. \tag{9}$$

Очевидно, что в пространстве параметров D условие $\sin(\alpha+\beta) = 0$ выполняется в двух случаях: $\alpha+\beta = \pi$ и $\alpha+\beta = 2\pi$. Если $\alpha+\beta = \pi$, то $\lambda_3 < 0$ для значений параметров, выделяемых неравенствами

$$0 < \alpha < \frac{\arcsin\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad \frac{\pi}{2} - \frac{\arcsin\varepsilon}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\,. \tag{10}$$

Это означает, что линия L_0 локально асимптотически устойчива при выполнении условий (10) и локально неустойчива в противном случае. Если $\alpha+\beta=2\pi$, то в области D показатель $\lambda_3<0$ удовлетворяет

$$\lambda_3 = -\varepsilon - \sin(2\alpha) < 0$$

и, следовательно, линия L_0 локально асимптотически устойчива.

2) Случай $\sin(\alpha+\beta)\neq 0$. Из системы уравнений (8) следует, что при выполнении этого условия в G^+ существуют четыре состояния равновесия

$$O_1(\theta{=}-\pi/2, y{=}0, z{=}-2\cos\beta), \qquad O_2(\theta{=}0, y{=}-2\sin\beta, z{=}0),$$
$$O_3(\theta{=}\pi/2, y{=}0, z{=}2\cos\beta), \qquad O_4(\theta{=}\pi, y{=}2\sin\beta, z{=}0).$$

Стандартный анализ устойчивости этих состояний показывает, что каждое из них имеет характеристический показатель $\lambda_1=-\varepsilon$, а два других показателя определяются уравнением

$$\lambda^2 + (\varepsilon + 2\sin\alpha\cos\beta)\,\lambda + 2\varepsilon\sin(\alpha+\beta) = 0 \qquad (11)$$

для состояний равновесия O_1, O_3 и уравнением

$$\lambda^2 + (\varepsilon - 2\cos\alpha\sin\beta)\,\lambda - 2\varepsilon\sin(\alpha+\beta) = 0 \qquad (12)$$

для состояний O_2 и O_4. В силу уравнений (11) и (12) бифуркации состояний равновесия в системе уравнений (5) происходят попарно. Тип состояний равновесия легко может быть установлен из анализа корней уравнений (11) и (12) при условии $\lambda_1=-\varepsilon$. Результаты такого анализа представлены в табл. 1 и показывают, что в системе уравнений (5) происходят два типа бифуркаций состояний равновесия.

Таблица 1. Типы состояний равновесия системы уравнений (5)

Тип состояний равновесия	Состояние равновесия	
	O_1, O_3	O_2, O_4
устойчивый узел	$\sin(\alpha+\beta)>0$, $\varepsilon+2\sin\alpha\cos\beta>0$, $8\varepsilon\sin(\alpha+\beta)<(\varepsilon+2\sin\alpha\cos\beta)^2$,	$\sin(\alpha+\beta)<0$, $\varepsilon-2\cos\alpha\sin\beta>0$, $-8\varepsilon\sin(\alpha+\beta)<(\varepsilon-2\cos\alpha\sin\beta)^2$,
устойчивый фокус	$\sin(\alpha+\beta)>0$, $\varepsilon+2\sin\alpha\cos\beta>0$, $8\varepsilon\sin(\alpha+\beta)>(\varepsilon+2\sin\alpha\cos\beta)^2$,	$\sin(\alpha+\beta)<0$, $\varepsilon-2\cos\alpha\sin\beta>0$, $-8\varepsilon\sin(\alpha+\beta)>(\varepsilon-2\cos\alpha\sin\beta)^2$,
седло $\dim W^{\mathrm{u}}(O_i){=}1$ $\dim W^{\mathrm{s}}(O_i){=}2$	$\sin(\alpha+\beta)<0$	$\sin(\alpha+\beta)>0$
седло $\dim W^{\mathrm{u}}(O_i){=}2$ $\dim W^{\mathrm{s}}(O_i){=}1$	$\sin(\alpha+\beta)>0$, $\varepsilon+2\sin\alpha\cos\beta<0$, $8\varepsilon\sin(\alpha+\beta)<(\varepsilon+2\sin\alpha\cos\beta)^2$,	$\sin(\alpha+\beta)<0$, $\varepsilon-2\cos\alpha\sin\beta<0$, $-8\varepsilon\sin(\alpha+\beta)<(\varepsilon-2\cos\alpha\sin\beta)^2$,
седло-фокус	$\sin(\alpha+\beta)>0$, $\varepsilon+2\sin\alpha\cos\beta<0$, $8\varepsilon\sin(\alpha+\beta)>(\varepsilon+2\sin\alpha\cos\beta)^2$	$\sin(\alpha+\beta)<0$, $\varepsilon-2\cos\alpha\sin\beta<0$, $-8\varepsilon\sin(\alpha+\beta)>(\varepsilon-2\cos\alpha\sin\beta)^2$

Во-первых, в пространстве D существуют поверхности

$$A_1 = \{\varepsilon, \alpha, \beta : \varepsilon + 2\sin\alpha\cos\beta = 0\}$$

и

$$A_2 = \{\varepsilon, \alpha, \beta : \varepsilon - 2\cos\alpha\sin\beta = 0\}.$$

Поверхность A_1 расположена в области $\alpha + \beta \leqslant \pi$, а поверхность A_2 – в области $\alpha + \beta \geqslant \pi$. Эти поверхности смыкаются на плоскости $\alpha + \beta = \pi$ вдоль линий

$$\alpha = \frac{\arcsin\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad \alpha = \frac{\pi - \arcsin\varepsilon}{2}\,.$$

Поверхности A_1 и A_2 соответствуют суперкритическим бифуркациям Андронова—Хопфа. При пересечении поверхности A_1 (в сторону $\varepsilon + 2\sin\alpha\cos\beta < 0$) одновременно рождаются два устойчивых колебательных [2] предельных цикла в окрестности состояний равновесия O_1 и O_3. Пересечение поверхности A_2 в сторону $\varepsilon - 2\cos\alpha\sin\beta < 0$ приводит к появлению устойчивых колебательных предельных циклов в окрестности точек O_2 и O_4.

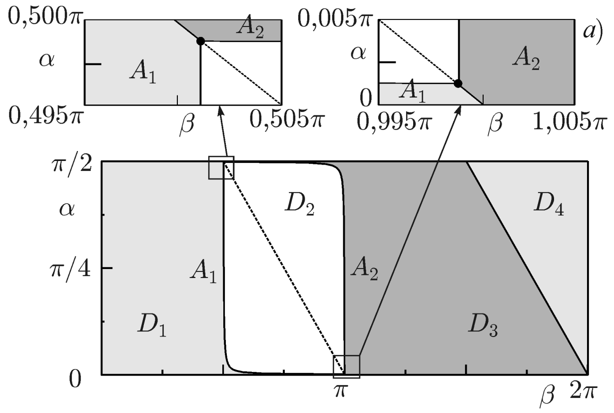
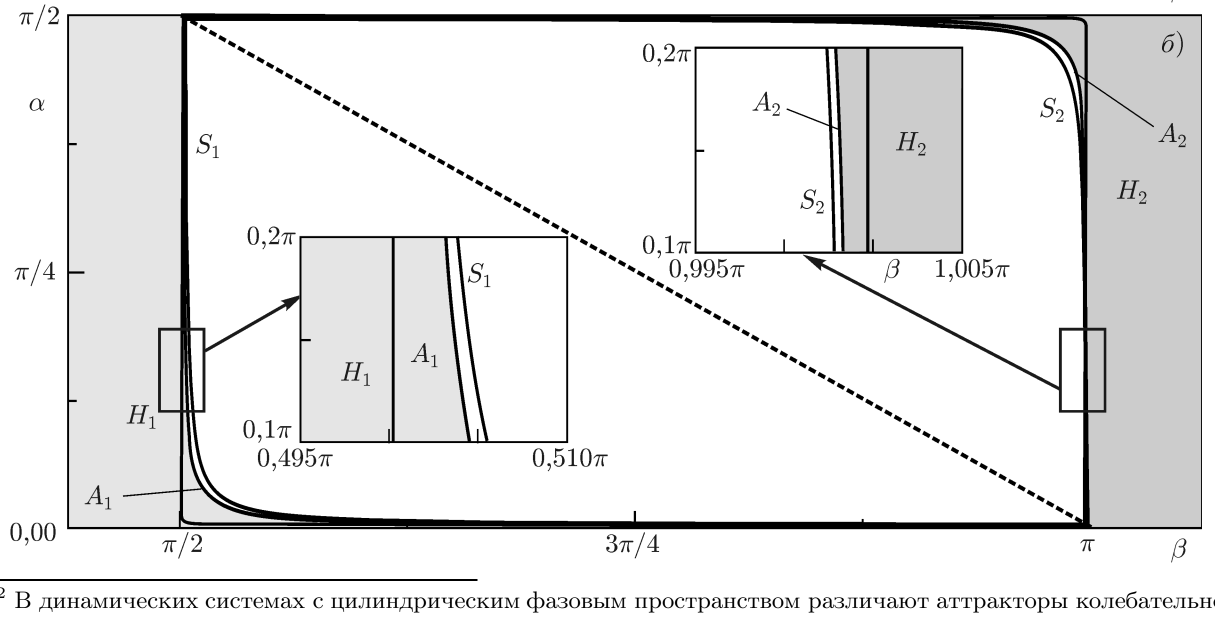


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма системы уравнений (5) в плоскости параметров (β, α) при $\varepsilon = 0{,}01$: кривые, определяющие основные бифуркации состояний равновесия системы (*а*), и фрагмент бифуркационной диаграммы в окрестности кривых потери устойчивости состояний равновесия (*б*)



[2] В динамических системах с цилиндрическим фазовым пространством различают аттракторы колебательного и вращательного типов. К первым относятся аттракторы, не охватывающие фазовый цилиндр по циклической фазовой переменной (т. е. набег по переменной θ меньше 2π). Аттракторы, охватывающие фазовый цилиндр по циклической фазовой переменной, будем называть вращательными.

Во-вторых, состояния равновесия системы уравнений (5) изменяют свой тип при пересечении плоскости $\alpha+\beta=\pi$ через области, задаваемые неравенствами (10). В этом случае один из характеристических показателей обращается в нуль (см. соотношения (9)), а в фазовом пространстве G^+ формируется линия состояний равновесия L_0. Для $\varepsilon=0{,}01$ бифуркационные линии состояний равновесия представлены на рис. 1.

Заметим, что состояния равновесия системы уравнений (5) расположены в фазовом пространстве на границе поглощающей области.

1.2. Глобальные двумерные и одномерные инвариантные многообразия

Непосредственно из системы уравнений (5) вытекает, что для значений $\beta=\pi/2$ и $3\pi/2$ в фазовом пространстве G^+ существует глобальное устойчивое многообразие $z=0$, а для $\beta=\pi$ и 2π — глобальное устойчивое многообразие $y=0$.

Пусть $\beta=\pi/2$. В этом случае на многообразии $z=0$ определена двумерная система уравнений

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=-y\cos\alpha\sin\theta,\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\varepsilon(y+2\cos\theta). \tag{13}$$

Из первого уравнения системы (13) следует, что прямые $\theta=-\pi;0;\pi$ являются инвариантными. На прямых $\theta=\pm\pi$ траектории асимптотически приближаются к единственному состоянию равновесия $y=2$, а на прямой $\theta=0$ – к состоянию равновесия $y=-2$. Существование этих инвариантных прямых означает, что система уравнений (13) не имеет вращательных предельных циклов. Покажем, что эта система также не имеет колебательных предельных циклов. Если предположить, что такие циклы существуют, то на фазовой плоскости (θ,y) они должны быть целиком расположены между инвариантными прямыми $\theta=-\pi$ и $\theta=0$ или $\theta=0$ и $\theta=\pi$. Введём в рассмотрение (в полосах между этими прямыми) функцию $B(\theta,y)=1/\sin\theta$ и воспользуемся критерием Бендиксона—Дюлака [13]. Применяя этот критерий, получим, что

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{-y\cos\alpha\sin\theta}{\sin\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-\varepsilon y-2\varepsilon\cos\theta}{\sin\theta}\right)=-\frac{\varepsilon}{\sin\theta}\,.$$

В каждой из рассматриваемых полос величина $-\varepsilon/\sin\theta$ является знакопостоянной и, следовательно, система уравнений (13) действительно не имеет колебательных предельных циклов. Таким образом, эта система не имеет предельных циклов, и все её траектории, за исключением траекторий, лежащих на инвариантных прямых, асимптотически приближаются либо к состоянию равновесия $(\theta=-\pi/2,y=0)$, либо к $(\theta=\pi/2,y=0)$, как показано на рис. 2*а*.

При $\beta=3\pi/2$ на устойчивом инвариантном многообразии $z=0$ действует двумерная система уравнений вида

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=-y\cos\alpha\sin\theta,\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\varepsilon(y-2\cos\theta). \tag{14}$$

Исследование её динамики здесь проводить не будем, поскольку оно аналогично предыдущему. Заметим лишь, что для системы уравнений (14) состояния равновесия $(\theta=-\pi/2,y=0)$ и $(\theta=\pi/2,y=0)$ являются сёдлами и использовать критерий Бендиксона—Дюлака нет необходимости. Все траектории системы уравнений (14) с начальными условиями вне инвариантных прямых $\theta=-\pi;0;\pi$ асимптотически приближаются к устойчивым узлам, расположенным на этих прямых (см. рис. 2*б*).

Как отмечалось выше, при $\beta=\pi$ и $\beta=2\pi$ в фазовом пространстве G^+ существует устойчивое инвариантное многообразие $y=0$, которое притягивает все траектории с начальными условиями

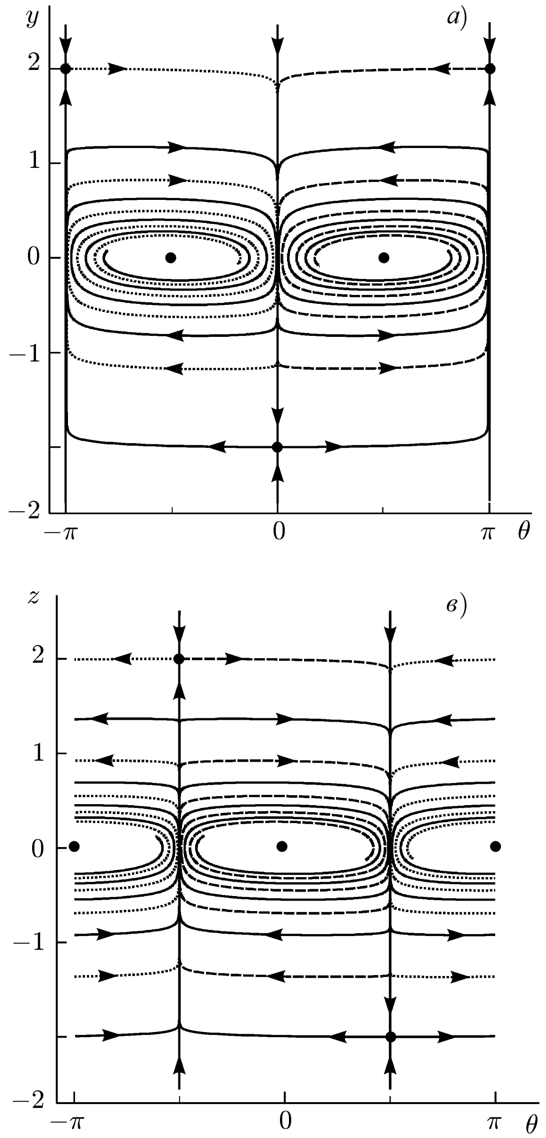


Рис. 2. Фазовые портреты, иллюстрирующие поведение системы уравнений (5) на устойчивых инвариантных многообразиях, при $\beta = \pi/2$ (*а*), $\beta = 3\pi/2$ (*б*), $\beta = \pi$ (*в*) и $\beta = 2\pi$ (*г*). Значения параметров: $\alpha = 0{,}3\pi$, $\varepsilon = 0{,}01$

вне этого многообразия. Движения на многообразии $y = 0$ описываются системой уравнений

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = z\sin\alpha\cos\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -\varepsilon(z + 2\sin\theta) \tag{15}$$

для $\beta = \pi$ и системой

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = z\sin\alpha\cos\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -\varepsilon(z - 2\sin\theta) \tag{16}$$

для $\beta = 2\pi$. Исследование динамики этих систем может быть проведено аналогично случаю систем уравнений (13) и (14). Результаты такого исследования представлены на рис. 2*в, г*.

Рассмотрим теперь «общий» случай, когда $\beta \neq \pi/2; \pi; 3\pi/2$ и 2π. Для этих значений параметров непосредственно из системы уравнений (5) следует существование в пространстве G^+

следующих одномерных инвариантных отрезков:

$$L(O_1) = \{\theta{=}-\pi/2, y{=}0, |z|{\leqslant}2\,|\cos\beta|\}, \qquad L(O_2) = \{\theta{=}0, z{=}0, |y|{\leqslant}2\,|\sin\beta|\},$$
$$L(O_3) = \{\theta{=}\pi/2, y{=}0, |z|{\leqslant}2\,|\cos\beta|\}, \qquad L(O_4) = \{\theta{=}\pi, z{=}0, |y|{\leqslant}2\,|\sin\beta|\}.$$

На каждом таком отрезке расположено по одному состоянию равновесия, к которому асимптотически приближается любая другая траектория системы уравнений (5) с начальными условиями на этом отрезке.

1.3. Гетероклинические контуры

Рассмотрим результаты бифуркационного анализа системы уравнений (5) на плоскости (β,α) при фиксированном значении параметра $\varepsilon = 0{,}01$. В этом случае бифуркационные кривые, изображённые на рис. 1*а*, определяют основные бифуркации состояний равновесия. Эти кривые разбивают рассматриваемую плоскость параметров на несколько областей:

$$D_1 = \left\{0 \leqslant \beta \leqslant \pi,\quad 0 \leqslant \alpha < \min\left[\arccos\left(-\frac{\varepsilon}{2\sin\alpha}\right), \frac{\pi}{2}, \pi-\beta\right]\right\},$$

$$D_2 = \left\{\frac{\pi+\arcsin\varepsilon}{2} \leqslant \beta \leqslant \pi - \frac{\arcsin\varepsilon}{2},\quad \arccos\left(-\frac{\varepsilon}{2\sin\alpha}\right) < \alpha < \pi - \arcsin\left(\frac{\varepsilon}{2\cos\alpha}\right)\right\},$$

$$D_3 = \left\{\frac{\pi}{2} \leqslant \beta \leqslant 2\pi,\quad \max\left[0, \arccos\left(\frac{\varepsilon}{2\sin\beta}\right), \pi-\beta\right] < \alpha < \min\left(\frac{\pi}{2}, 2\pi-\beta\right)\right\},$$

$$D_4 = \{3\pi/2 \leqslant \beta \leqslant 2\pi,\quad \alpha > 2\pi - \beta\}.$$

В областях D_1, D_3 и D_4 аттракторами системы уравнений (5) является только соответствующая пара состояний равновесия и все траектории фазового пространства стремятся к ним при $t \to +\infty$. Опираясь на результаты, представленные в табл. 1, нетрудно установить, что в областях D_1 и D_4 устойчивыми являются состояния равновесия O_1 и O_3, а в области D_3 — состояния равновесия O_2 и O_4. Вторая пара состояний равновесия в каждой из этих областей состоит из сёдел с одномерным неустойчивым и двумерным устойчивым многообразиями. В области параметров D_2, расположенной между бифуркационными кривыми A_1 и A_2, все состояния равновесия системы являются седловыми.

Нетрудно видеть, что система уравнений (5) инвариантна относительно преобразования

$$\alpha \to \frac{\pi}{2} - \alpha,\quad \beta \to \frac{3\pi}{2} - \beta,\quad \theta \to \theta - \frac{\pi}{2},\quad y \to z,\quad z \to -y. \tag{17}$$

Следовательно, достаточно провести анализ её динамики в области параметров, ограниченной бифуркационными кривыми A_1 и $\alpha{+}\beta = \pi$, и на основании полученных результатов восстановить структуру разбиения области параметров, расположенной выше прямой $\alpha + \beta = \pi$, с учётом преобразования (17).

Покажем существование в системе уравнений (5) гетереоклинических контуров, образованных сепаратрисами седел O_2 и O_4. Введём так называемую [14, 15] функцию расщепления $\rho(\alpha,\beta,\varepsilon)$. Для этого построим в фазовом пространстве G^+ вспомогательную сферу Σ с достаточно малым радиусом с центром в состоянии равновесия O_2, которую многообразие $W^{\rm s}(O_2)$ делит на две части. Обозначим эти части через Σ^+ и Σ^-. Будем считать, что функция $\rho(\alpha,\beta,\varepsilon) > 0$, если сепаратриса $W_1^{\rm u}(O_4)$ пересекает сферу Σ в точке $M_2^{\rm u}$, принадлежащей Σ^+, и $\rho(\alpha,\beta,\varepsilon) < 0$ — если в точке, принадлежащей области Σ^-. При этом значение функции $\rho(\alpha,\beta,\varepsilon)$ равно минимальному

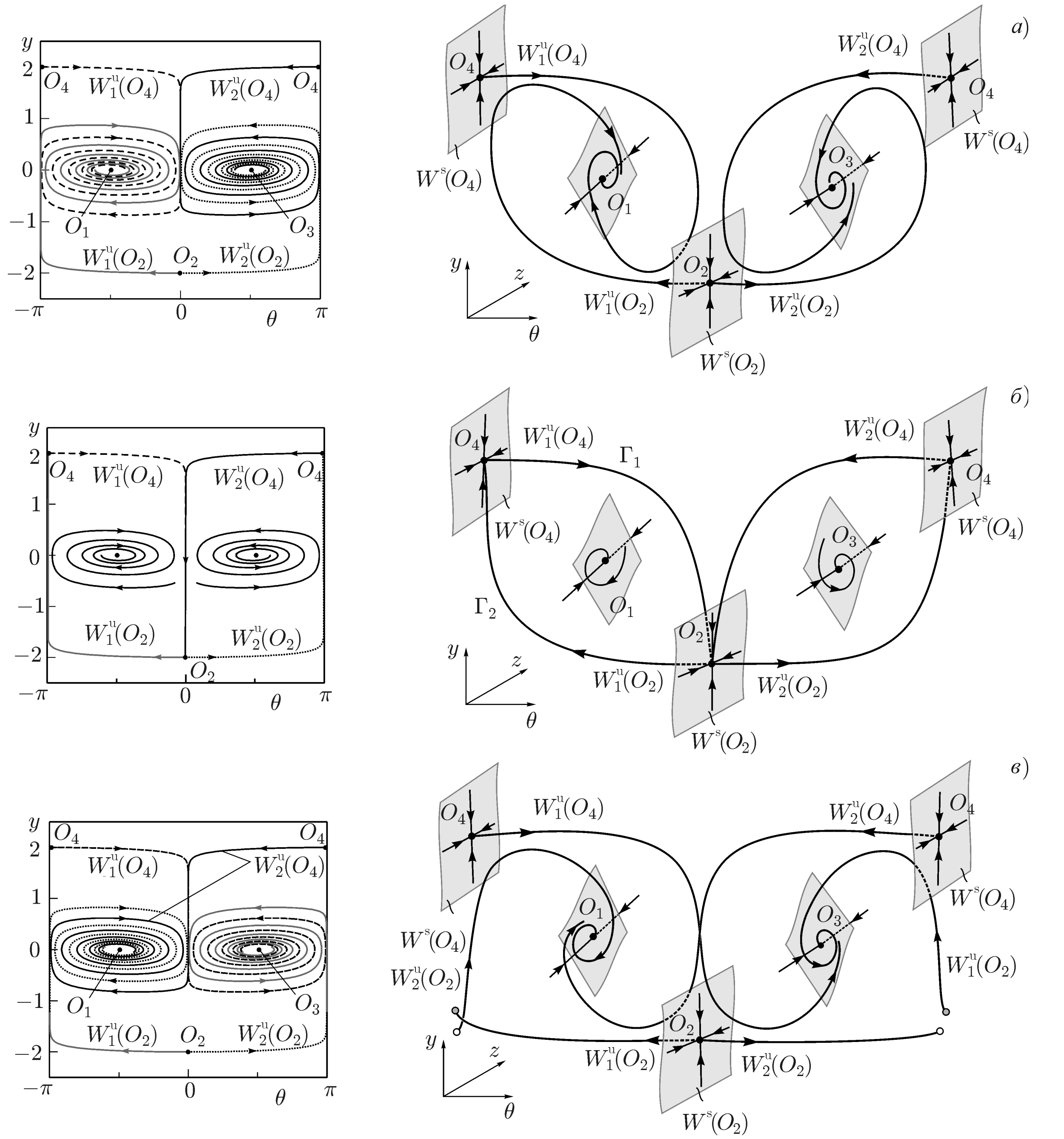


Рис. 3. Вид фазовых проекций и схематическое представление структуры фазового пространства, иллюстрирующие поведение неустойчивых сепаратрис $W_{1,2}^{\rm u}(O_4)$ и $W_{1,2}^{\rm u}(O_2)$ и их взаимное расположение относительно двумерных устойчивых многообразий $W^{\rm s}(O_2)$ и $W^{\rm s}(O_4)$ для $\beta = 1{,}57$ (*а*); $\beta = 1{,}510797$ (*б*) и $\beta = 1{,}575$ (*в*). Значения параметров $\varepsilon = 0{,}01$, $\alpha = 0{,}5$

расстоянию между точкой $M_2^{\rm u}$ и частью многообразия $W^{\rm s}(O_2)$, расположенной внутри сферы Σ. Численное решение системы уравнений (5) показало, что в пространстве D существуют области, соответствующие разным знакам функции $\rho(\alpha, \beta, \varepsilon)$ (см. рис. 3*а* и *в*). Следовательно, в силу непрерывности функции $\rho(\alpha, \beta, \varepsilon)$, в пространстве D существует, по крайней мере, одна поверхность $H_1 = \{\rho(\alpha, \beta, \varepsilon) = 0\}$, для точек которой сепаратриса $W_1^{\rm u}(O_4)$ при $t \to +\infty$ асимптотически стремится к седлу O_2, образуя в пространстве G^+ гетероклиническую траекторию, которую обозначим через Γ_1 (см. рис. 3*б*). Поскольку система уравнений (5) инвариантна относительно преобразований (7), для значений параметров, принадлежащих поверхности H_1, одновременно с траекторией Γ_1 в пространстве G^+ существует также и гетероклиническая траектория Γ_2, образованная сепаратрисой $W_1^{\rm u}(O_2)$ (см. рис. 3*б*). Следовательно, точкам поверхности H_1 соответствует существование гетероклинического контура C_1 в пространстве G^+. Численное решение системы уравнений (5) показало, что в пространстве D поверхность H_1 является единственной (см. рис. 1*б*). Более того, в силу инвариантности этой системы относительно преобразований (6) и (7) одновременно с контуром C_1 в фазовом пространстве G^+ существует также гетероклинический контур C_2, образованный сепаратрисами $W_2^{\rm u}(O_2)$ и $W_2^{\rm u}(O_4)$ (см. рис. 3*б*). Заметим,что для траекторий системы уравнений (5) характерен релаксационный характер движений, поскольку параметр ε является достаточно малым. В частности, сепаратрисы сёдел O_2 и O_4 имеют «быстрые» участки движения, на которых переменные y и z изменяются незначительно, и «медленные» — в окрестности отрезков $L(O_2)$ и $L(O_4)$.

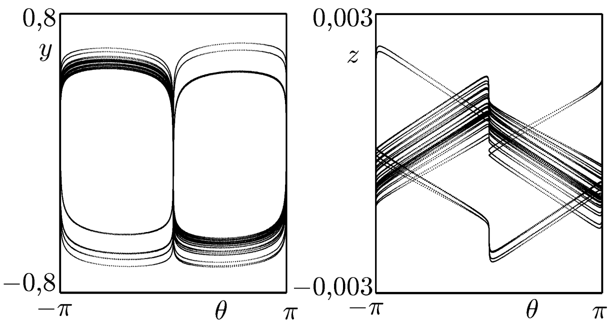


Рис. 4. Вид фазовых проекций хаотического репеллера, существующего в фазовом пространстве G системы уравнений (5) при $\alpha = 0{,}5$; $\beta = 1{,}575$ и $\varepsilon = 0{,}01$

Заметим, что для значений параметров на поверхности H_1 состояния равновесия O_2 и O_4 являются сёдлами с положительными седловыми величинами $\sigma(O_i)$, $i = 2, 4$:

$$\sigma(O_i) = \lambda_1(O_i) + \lambda_2(O_i),$$

где $\lambda_1(O_i)$ и $\lambda_2(O_i)$ — корни характеристического уравнения для состояния равновесия O_i, удовлетворяющие условию $\lambda_3(O_i) < \lambda_2(O_i) < 0 < \lambda_1(O_i)$. Следовательно, при разрушении гетероклинических контуров в сторону увеличения параметра β в фазовом пространстве системы уравнений (5) появляются два колебательных седловых предельных цикла $L_1^{\rm u}$ и $L_2^{\rm u}$, охватывающих состояния равновесия O_1 и O_3 соответственно. Также было обнаружено, что, одновременно с рождением седловых колебательных циклов $L_1^{\rm u}$ и $L_2^{\rm u}$, при разрушении гетероклинических контуров C_1 и C_2 в пространстве G^+ возникает хаотический репеллер вращательного типа (см. рис. 4). Вид фазовых проекций хаотического репеллера установлен путём численного интегрирования системы уравнений (5) в обратном времени. При пересечении бифуркационной кривой A_1 происходит мягкая потеря устойчивости состояний равновесия O_1 и O_3, которая сопровождается рождением в фазовом пространстве системы двух устойчивых колебательных предельных циклов $L_1^{\rm s}$ и $L_2^{\rm s}$. Дальнейшее увеличение параметра β приводит к исчезновению циклов $L_1^{\rm u}$ и $L_2^{\rm u}$ через касательную (седло-узловую) бифуркацию с соответствующими циклами $L_1^{\rm s}$ и $L_2^{\rm s}$, происходящую на кривой S_1 (см. рис. 1*б*).

В силу инвариантности системы уравнений (5) относительно преобразования (17), описанный выше сценарий реализуется и в области $\alpha + \beta > \pi$ при уменьшении параметра β (см. рис. 1*б*), но для другой пары состояний равновесия. Например, бифуркационная кривая H_2 отвечает формированию гетероклинических контуров, образованных сепаратрисами $W_1^{\rm u}(O_1)$, $W_2^{\rm u}(O_1)$, $W_1^{\rm u}(O_3)$ и $W_2^{\rm u}(O_3)$, а кривая S_2 соответствует касательной бифуркации колебательных предельных циклов, которые появляются в окрестности состояний равновесия O_2 и O_4 при смене их устойчивости (кривая A_2 на рис. 1*б*).

1.4. Формирование хаотического аттрактора и его кризис

Проведённое численное моделирование системы уравнений (5) показало, что переход через бифуркационную кривую S_1 приводит к формированию в фазовом пространстве хаотического аттрактора вращательного типа (типичный вид фазовых проекций которого приведён на рис. 5*а*). На рис. 5*б* представлен вид хаотического аттрактора в сечении Пуанкаре плоскостью $\theta = -\pi/2$, иллюстрирующий наличие слоистой структуры аттрактора, что отчётливо видно при анализе его увеличенного фрагмента. Процесс движения вдоль фазовой траектории, принадлежащей хаотическому аттрактору, может быть представлен как последовательное переключение между двумя «активными состояниями», каждое из которых определяется продолжительным вращением траектории в фазовом пространстве вокруг инвариантных отрезков $L(O_1)$ и $L(O_3)$ соответственно. При этом переключение между этими состояниями может происходить, когда значение циклической фазовой переменной θ достигает либо значения ноль, либо значений $\pm\pi$. Если для каждого момента переключения ввести соответствующее обозначение, например переходу через $\theta = 0$ поставить в соответствие знак 0, а переход через $\theta = \pm\pi$ обозначить знаком 1, то каждая траектория хаотического аттрактора может быть представлена в виде последовательности, состоящей из 0 и 1. В качестве примера на рис. 5*в, г* приведены временны́е зависимости переменной $\theta(t)$, отвеча-

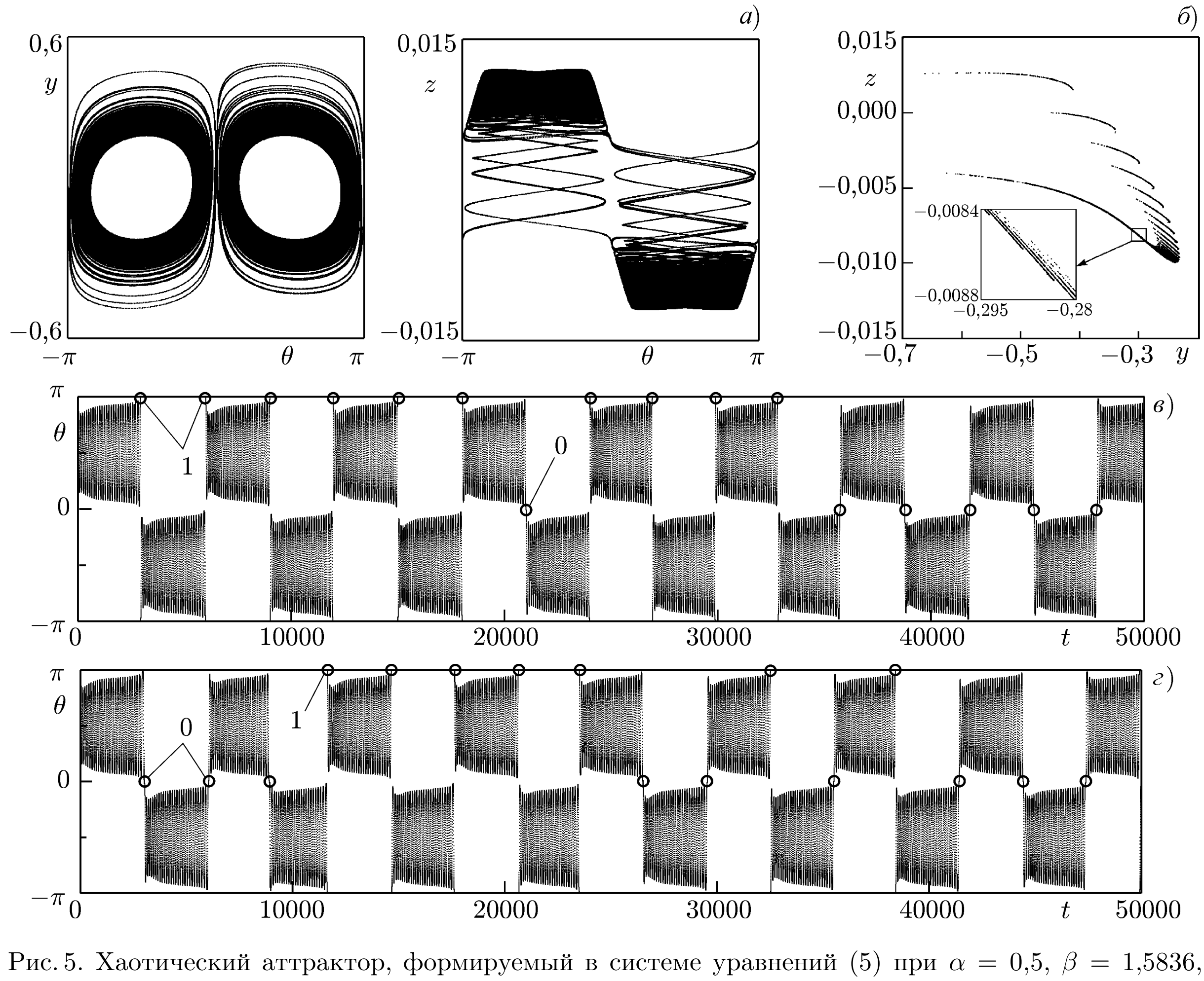


Рис. 5. Хаотический аттрактор, формируемый в системе уравнений (5) при $\alpha = 0{,}5$, $\beta = 1{,}5836$, $\varepsilon = 0{,}01$: фазовые проекции (*а*), вид аттрактора в сечении Пуанкаре плоскостью $\theta = -\pi/2$ (*б*), временны́е зависимости переменной $\theta(t)$, построенные для различных начальных условий (*в*), (*г*)

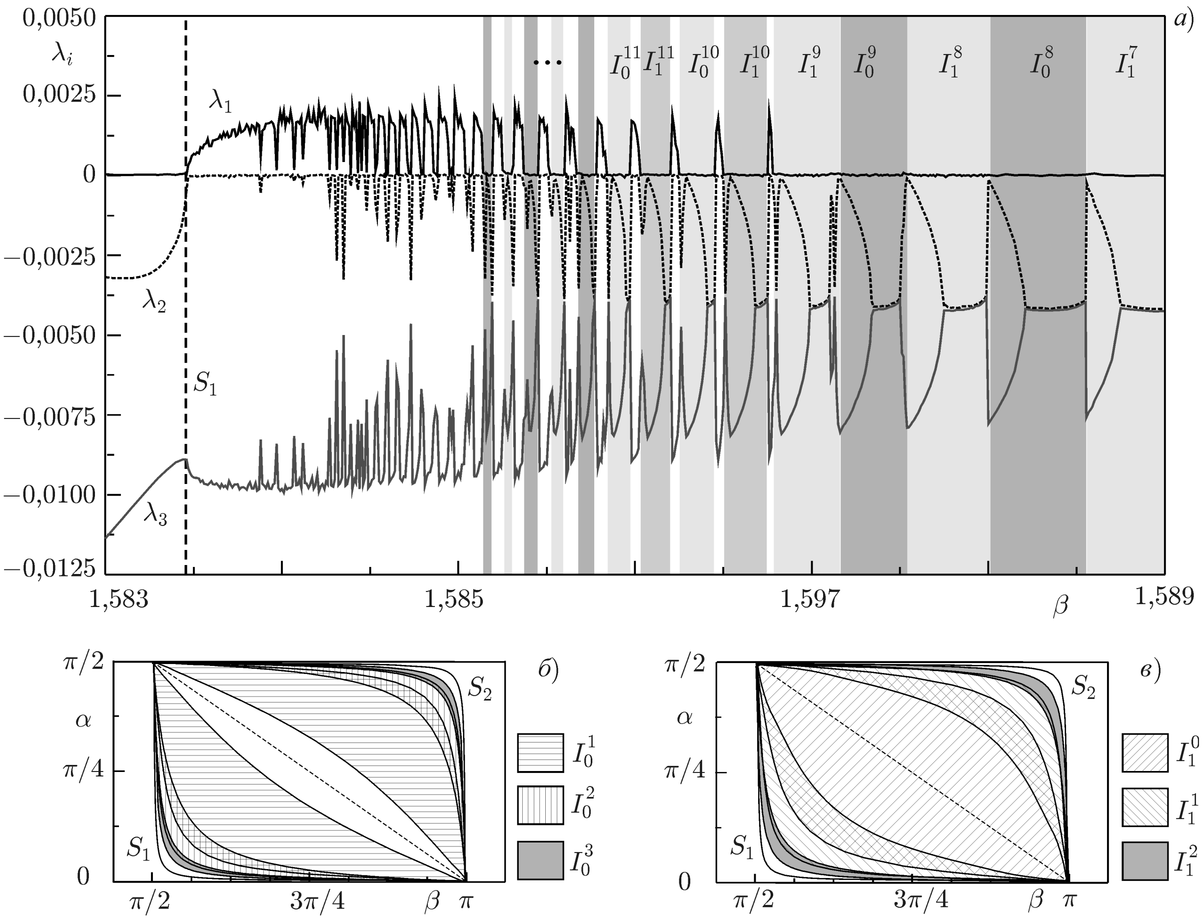


Рис. 6. Структура области D_2: однопараметрическая диаграмма спектра ляпуновских показателей при $\alpha = 0{,}5$ (*а*); семейство колебательных предельных циклов I_0^l, $l = 1, 2, 3$ (*б*); семейство вращательных предельных циклов I_1^l, $l = 0, 1, 2$ (*в*)

ющие двум траекториям хаотического аттрактора, построенным для близких наборов начальных условий. Эти траектории порождают две различные хаотические последовательности переключений: 1111110111100000… (рис. 5*в*) и 0001111100101000… (рис. 5*г*). Данный факт иллюстрирует высокую чувствительность поведения системы к выбору начальных условий, свойственную хаотическим режимам.

Проследим, как изменяется динамика системы уравнений (5) при увеличении параметра β в интервале от значения, принадлежащего кривой S_1, до $\beta = \pi - \alpha$. Для этого рассмотрим однопараметрическую диаграмму, представленную на рис. 6*а*, которая иллюстрирует спектр ляпуновских показателей при изменении параметра β. Она показывает, что в системе действительно существует хаотический аттрактор, о чём свидетельствует наличие положительного старшего ляпуновского показателя λ_1. Увеличение параметра β приводит к возникновению так называемых окон регулярности (интервалов значений β, для которых $\lambda_1 \approx 0$), размеры которых увеличиваются по мере удаления от бифуркационной кривой S_1. При превышении некоторого критического значения $\beta_{\rm cr}(\alpha, \varepsilon)$ динамика системы становится регулярной (см. рис. 6*а*) и определяется наличием в фазовом пространстве устойчивых предельных циклов.

Проведённое численное исследование системы уравнений (5) показало, что для значений параметров из области, ограниченной бифуркационными кривыми S_1 и $\beta + \alpha = \pi$, в фазовом пространстве G существует множество устойчивых колебательных и вращательных предельных циклов. Данные циклы отличаются числом оборотов, которые совершает изображающая точка, лежащая на предельном цикле, вокруг отрезков $L(O_1)$ и $L(O_3)$ до замыкания траектории. Для определённости будем обозначать область существования соответствующего предельного цикла как I_k^l, где верхний индекс l указывает число оборотов цикла вокруг этих отрезков, а нижний индекс k — тип аттрактора (0 — колебательный, 1 — вращательный).

Обнаружено, что при движении от бифуркационной кривой S_1 к кривой $\beta + \alpha = \pi$ в системе происходит последовательное чередование режимов, определяемых аттракторами вращательного и колебательного типов: $\ldots \to I_1^{m+1} \to I_0^m \to I_1^m \to \ldots \to I_1^1 \to I_0^1 \to I_1^0$. С ростом параметра β в фазовом пространстве системы появляются устойчивые предельные циклы как колебательного, так и вращательного типа, характеризуемые меньшим количеством оборотов цикла вокруг отрезков $L(O_1)$ и $L(O_3)$. При этом области существования динамических режимов, определяемых данными циклами, становятся шире, что подтверждает и однопараметрическая диаграмма на рис. 6*а*. Границы областей существования режимов I_k^l устроены сложным образом, они включают в себя кривые, отвечающие бифуркациям Неймарка—Сакера (рождением инвариантного тора) и седло-узловым бифуркациям предельных циклов.

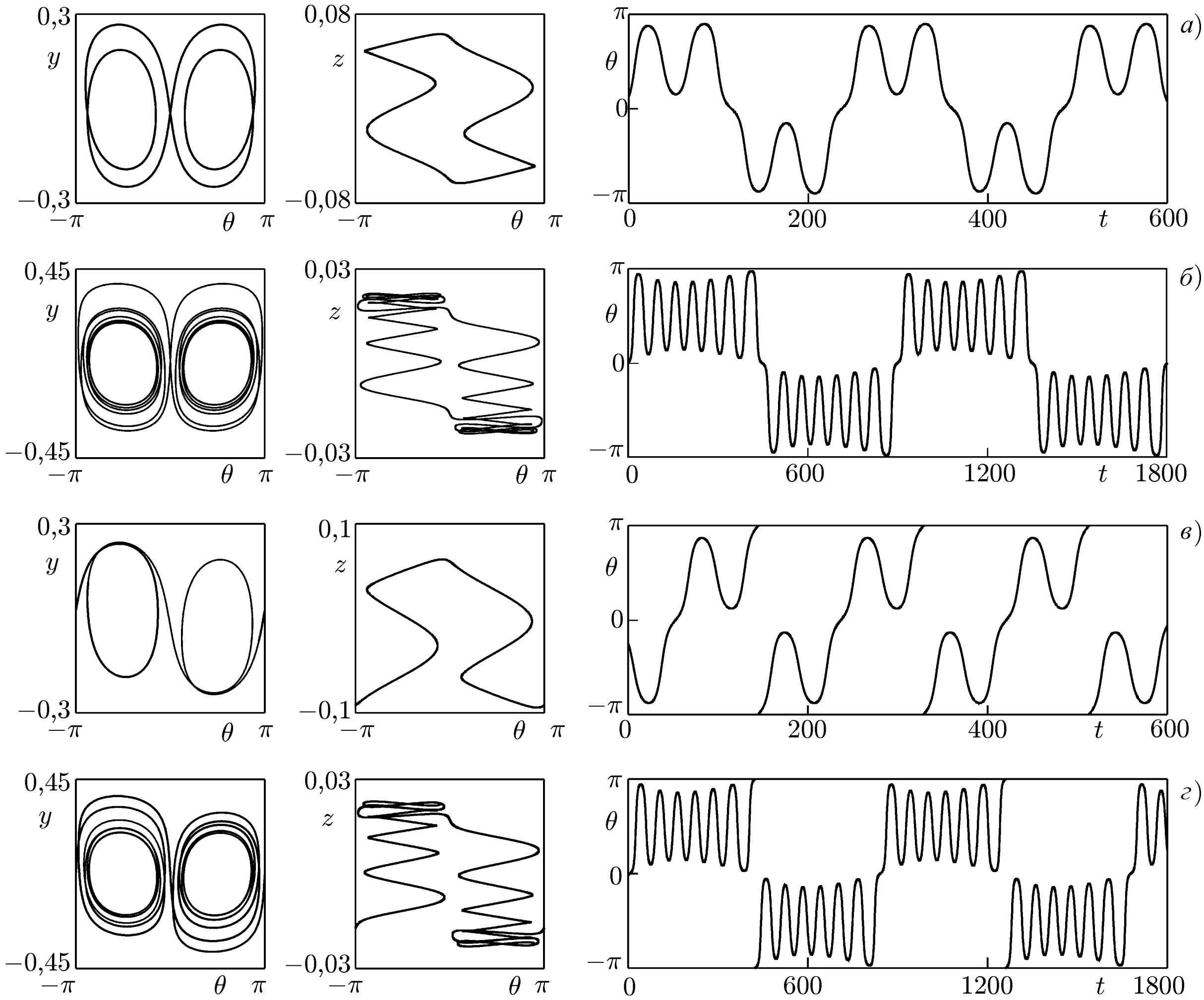


Рис. 7. Примеры колебательных и вращательных аттракторов системы уравнений (5), существующих в области D_2 и определяющих режимы I_0^2, I_0^7, I_1^1 и I_1^6 при $\beta = 1{,}64$ (*а*), $\beta = 1{,}59$ (*б*), $\beta = 1{,}7$ (*в*) и $\beta = 1{,}591$ (*г*) соответственно. Значения параметров: $\varepsilon = 0{,}01$, $\alpha = 0{,}5$

Рассматриваемая область параметров имеет достаточно сложную слоистую структуру разбиения на подобласти, отвечающие существованию различных аттракторов системы. Данный факт иллюстрируют диаграммы, приведённые на рис. 6, где выделены области существования лишь трёх основных предельных циклов колебательного (I_0^l, $l = 1, 2, 3$; рис. 6*б*) и вращательного (I_1^l, $l = 0, 1, 2$; рис. 6*в*) типов. Нетрудно заметить, что области существования различных аттракторов пересекаются между собой. Следовательно, в рассматриваемой области параметров динамика системы характеризуется наличием мультистабильных свойств. На рис. 7 представлены примеры фазовых проекций таких предельных циклов.

2. СИНХРОННЫЕ И АСИНХРОННЫЕ РЕЖИМЫ

Как и в случае системы взаимодействующих идентичных осцилляторов со статическими связями (т. е. когда коэффициенты силы связи κ_{ij} являются параметрами, значения которых не изменяются во времени), основным режимом системы уравнений (5) является режим синхронизации осцилляторов, при котором их частоты равны, а разность фаз принимает некоторое постоянное значение. В фазовом пространстве G модели такие режимы определяют устойчивые состояния равновесия. При этом координаты θ этих состояний равновесия характеризуют фиксированные значения расстройки фаз осцилляторов в режиме синхронизации в отличие от случая статических связей, когда эти величины могут принимать любые значения в интервале от 0 до 2π. Кроме того, введение пластичных связей приводит к возникновению областей с бистабильным синхронным поведением (области D_1, D_3 и D_4 на рис. 1*а*). При этом величины «ошибок» синхронизации могут принимать два фиксированных значения: 0 и π – в областях D_1 и D_4, и $\pi/2$ и $-\pi/2$ — в области D_3.

Структура разбиения плоскости параметров (β, α) на области с различным динамическим поведением системы (см. рис. 1) свидетельствует о том, что переход от одного типа режимов к другому практически не зависит от величины задержки взаимодействия между осцилляторами (параметр α), а определяется преимущественно свойствами функции пластичности, которые контролируются с помощью параметра β. В частности, переходы между синхронным и асинхронным режимами системы происходят в окрестности значений $\beta = \pi/2$ и $\beta = \pi$, при которых характер изменения силы взаимодействия принципиально различается. При $\beta = \pi/2$ функция пластичности принимает вид $\chi(\phi) = \cos\phi$ и, следовательно, в соответствии с уравнением (3), определяет уменьшение коэффициентов силы связи между синхронизованными осцилляторами и их увеличение для осцилляторов с существенно различающимися фазами. В случае $\beta = \pi$ функция пластичности имеет вид $\chi(\phi) = -\sin\phi$, т. е. является несимметричной. Вследствие этого изменение коэффициентов силы связи между осцилляторами с различающимися фазами будет происходить в противоположных направлениях ($\kappa_{12} = -\kappa_{21}$), а в случае осцилляторов с близкими фазами коэффициенты силы связи будут стремиться к нулю.

Другой эффект, вызванный пластичными связями, состоит в том, что существуют определённые соотношения параметров, определяющих задержку взаимодействия и свойства функции пластичности связей (например, $\alpha+\beta = 2\pi$), при которых величина расстройки фаз осцилляторов в режиме синхронизации может принимать любое значение в интервале от 0 до 2π в зависимости от выбора начальных условий.

Введение пластичных связей также приводит к возникновению в системе взаимодействующих осцилляторов различных асинхронных режимов, которые в фазовом пространстве модели (5) определяют аттракторы колебательного и вращательного типа. Колебательные аттракторы отвечают квазисинхронным режимам системы, когда средняя разность частот осцилляторов равна нулю, а разность фаз колеблется в некоторых ограниченных пределах, не превышающих 2π.

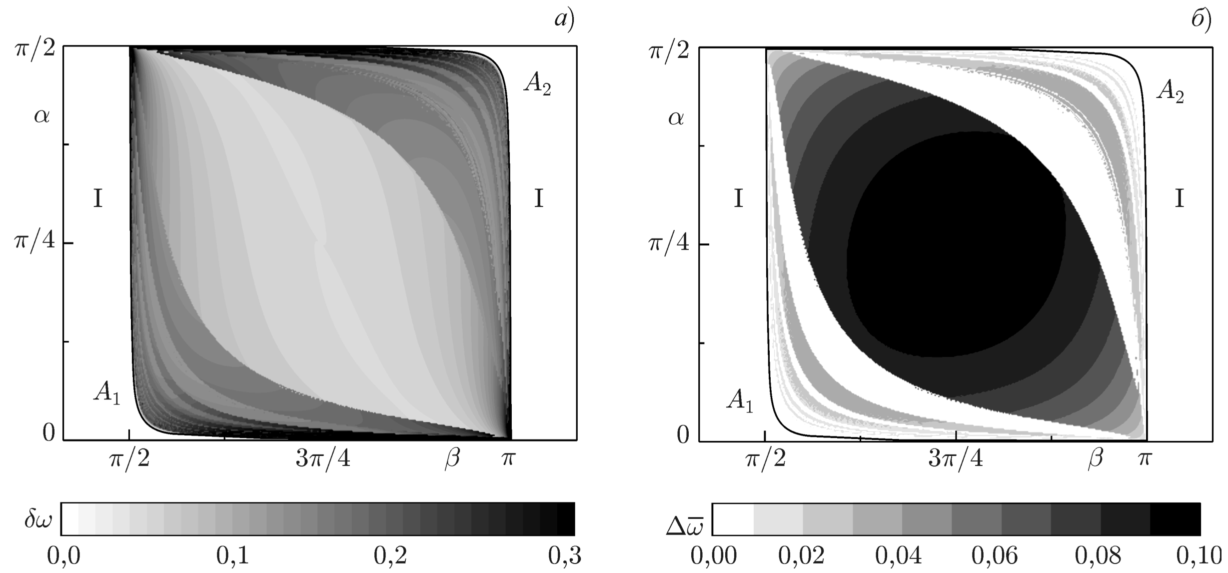


Рис. 8. Зависимости характеристик асинхронных режимов двух взаимодействующих осцилляторов с пластичными связями от параметров α и β: девиация частоты осцилляторов (*а*) и разность средних частот осцилляторов (*б*). Цифрой I обозначены области существования синхронных режимов

В этом случае осцилляторы совершают колебания с угловой модуляцией около средней частоты, значение которой совпадает с индивидуальной частотой осцилляторов ω_i. Аттракторы вращательного типа определяют режимы биений, когда разность фаз непрерывно нарастает, а средняя разность частот отлична от нуля. При этом осцилляторы совершают колебания с угловой модуляцией около средних частот, значения которых отличаются от индивидуальных частот осцилляторов ω_i. Как показал бифуркационный анализ модели, данные режимы наблюдаются для значений параметров, ограниченных кривыми A_1 и A_2 (область D_2 на рис. 1).

На рис. 8 приведены диаграммы, иллюстрирующие зависимость характеристик асинхронных режимов (девиации частоты $\delta\omega$ и разности средних частот осцилляторов $\Delta\overline{\omega}$) от параметров, характеризующих задержку взаимодействия и вид функции пластичности связей. Как можно заметить, величина отклонения частоты колебаний осцилляторов от их индивидуальных частот ω_i возрастает по мере приближения к границам области D_2, а максимального значения девиация частоты достигает в окрестности граничных значений задержки взаимодействия $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi/2$ (см. рис. 8*а*). Другими словами, девиация частоты выше для квазисинхронных режимов I_0^l и режимов биений I_1^l, характеризуемых большим значением индекса l. И наоборот, разность средних частот осцилляторов выше для режима I_1^0, а максимальных значений данная характеристика достигает по мере приближения к центру области D_2 (см. рис. 8*б*).

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследована динамика двух взаимодействующих фазовых осцилляторов с пластичными связями. Особенностью рассматриваемой системы является совместная эволюция переменных, описывающих состояние элементов и силы межэлементных связей. Установлено, что в зависимости от параметров система может демонстрировать следующие динамические режимы: синхронный режим, когда частоты осцилляторов равны, а разность фаз фиксирована; режим квазисинхронизации в случае, если средняя разность частот осцилляторов равна нулю, а разность фаз колеблется в некоторых ограниченных пределах; режим биений, когда разность фаз непрерывно нарастает, а средняя разность частот отлична от нуля. При этом асинхронные режимы могут быть как регулярными, так и хаотическими. Проведённое исследование показало, что введение пластических связей приводит к мультистабильности поведения системы, а также к появлению новых динамических режимов, таких как квазисинхронные режимы и режимы биений, которые не наблюдаются для рассматриваемых значений параметров в случае статических связей.

Проведён анализ влияния на динамику взаимодействующих осцилляторов параметров, характеризующих задержку передачи взаимодействия от одного осциллятора к другому и свойства функции пластичности связей. Выделены области параметров, при которых система демонстрирует бистабильное синхронное поведение, а также область, где наблюдается сосуществование множества различных асинхронных режимов. Система может иметь четыре различных синхронных режима, различающиеся значениями разности фаз колебаний. При этом всегда одновременно существует пара синхронных режимов, величины относительной разности фаз для которых отличаются на π. Обнаружено, что при определённых соотношениях контрольных параметров величина расстройки фаз осцилляторов в режиме синхронизации может принимать любое значение в зависимости от начальных условий. Установлено, что переходы между различными типами динамического поведения системы можно контролировать посредством изменения свойств функции пластичности связей. Полученные результаты позволят объяснить эффекты, наблюдаемые в больших сетях динамически связанных осцилляторов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 13–02–00858 и 15–42–02353).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kuramoto Y. Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence. Berlin: Springer, 1984. 158 p.
2. Stout J., Whiteway M., Ott E., et al. // Chaos. 2011. V. 21, No. 2. Art. no. 025109.
3. Gomes-Gardenes J., Moreno Y., Arenas A. // Phys. Rev. Lett. 2007. V. 98, No. 3. Art. no. 034101.
4. Yuan D., Zhang M., et al. // Phys. Rev. E. 2014. V. 89, No. 1. Art. no. 012910.
5. Acebron J. A., Bonilla L. L., Perez Vicente C. J., et al. // Rev. Modern Phys. 2005. V. 77, No. 1. P. 137.
6. Takahashi Y., Kori H., Masuda N. // Phys. Rev. E. 2009. V. 79, No. 5. Art. no. 051904.
7. Picallo C.B., Riecke H. // Phys. Rev. E. 2011. V. 83, No. 3. Art. no. 036206.
8. Ren Q., Zhao J. // Phys. Rev. E. 2007. V. 76, No. 1. Art. no. 016207.
9. Timms L., English L. Q. // Phys. Rev. E. 2014. V. 89, No. 3. Art. no. 032906.
10. Chandrasekar V. K., Sheeba J. H., Subash B., et al. // Physica D. 2014. V. 267. P. 36.
11. Aoki T., Aoyagi T. // Phys. Rev. Lett. 2009. V. 102, No. 3. Art. no. 034101.
12. Aoki T., Aoyagi T. // Phys. Rev. E. 2011. V. 84, No. 6. Art. no. 066109.
13. Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. Методы и приёмы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1990. 486 с.
14. Kuznetsov Y. Elements of applied bifurcation theory. New York: Springer, 2004. 631 p.
15. Nekorkin V. I., Shapin D. S., Dmitrichev A. S., et al. // Physica D. 2008. V. 237. P. 2463.

Поступила в редакцию 22 июля 2015 г.; принята в печать 30 октября 2015 г.

DYNAMICS OF THE PHASE OSCILLATORS WITH PLASTIC COUPLINGS

D. V. Kasatkin and V. I. Nekorkin

Dynamic regimes in the system of two identical interacting phase oscillators with plastic couplings are studied. The joint evolution of the elements and the interelement couplings is a feature of the system studied. It is shown that introduction of the plastic couplings leads to a multistable behavior of the system and emergence of the asynchronous regimes, which are not observed for the considered parameter values in the case of static couplings. The parameter plane is divided into the regions with different dynamic regimes of the system. In particular, the regions in which the system demonstrates bistable synchronous behavior and the region in which the coexistence of many various asynchronous regimes is observed are singled out.