

УДК 532.5

О ЧАСТОТНОМ СПЕКТРЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ДВУМЕРНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

А. А. Абрашкин¹ *, Е. И. Якубович²

¹ Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»;

² Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород, Россия

Показано, что дискретный частотный спектр плоского гидродинамического течения идеальной несжимаемой жидкости с локализованными траекториями жидких частиц может содержать лишь одну, две или бесконечное число гармоник.

ВВЕДЕНИЕ

При объяснении или интерпретации свойств физических систем (или решений соответствующих им уравнений) часто оказывается полезным спектральный подход. Его использование в наибольшей степени оправдано для линейных систем с постоянными параметрами [1]. Вместе с тем спектральный подход активно применяется и при анализе нелинейных проблем. В приближениях, соответствующих слабой нелинейности, уже классическими стали задачи о трёхволновых взаимодействиях и объяснение природы модуляционной неустойчивости ростом амплитуды колебаний на боковых частотах. В сильно нелинейных явлениях ярким примером использования спектрального подхода служит теория турбулентности.

В данной работе рассматривается задача о том, может ли точное решение уравнений двумерной гидродинамики иметь конечный дискретный набор временных частот. Этот вопрос возник в связи с открытием птолемеевских течений — класса точных решений уравнений двумерной гидродинамики идеальной жидкости [2]. Общее выражение для них содержит две произвольные частоты.

К числу птолемеевских течений принадлежат волны Герстнера (трохоидальные волны на глубокой воде), а также вихрь Кирхгофа (эллиптическая область с однородной завихрённостью, равномерно вращающаяся вокруг своего центра) [3]. В обоих случаях жидкие частицы вращаются по окружности, т. е. одна из частот в общей формуле для точного птолемеевского решения равна нулю. Одночастотные птолемеевские течения были применены для описания одиночной вихревой области в окружающем потенциальном течении [2] и к задаче о колебаниях свободной поверхности жидкости под действием неоднородного распределения давления на ней [4–6]. Примеры двухчастотных птолемеевских течений построены в работах [7, 8]. В первой из них это эпициклоидальные волны на поверхности равномерно вращающейся круговой полости, а во второй — гипоциклоидальные волны на поверхности плазменного цилиндра в однородном продольном магнитном поле. Возникает вопрос, существуют ли точные решения в случае трёх или большего числа дискретных частот.

Помимо двухчастотности, ещё одним важным свойством аналитического выражения, описывающего птолемеевские течения, является то, что оно содержит две в значительной степени произвольные функции пространственных координат. Это обстоятельство даёт возможность находить для определённых типов физических задач целые семейства точных решений. В силу

* aabrashkin@hse.ru

этого возможное обобщение птолемеевских решений на случай более сложного спектра гидродинамического течения представляет как практический, так и общетеоретический интерес. Математическая часть данного исследования основывается на оригинальном методе, предполагающем переход к комплексным лагранжевым координатам. В гидродинамических задачах лагранжевые переменные используются достаточно редко. Причиной тому служит более сложный (нелинейный) вид уравнений гидродинамики в форме Лагранжа по сравнению с их эйлеровым аналогом. Вместе с тем, в ряде конкретных задач метод комплексных лагранжевых координат оказывается эффективным [2, 4–8]. Поэтому анализ сильных и слабых его сторон видится крайне уместным и необходимым.

С физической точки зрения неизменность спектрального набора дискретных частот при движении идеальной среды означает, что либо энергия каждой из мод сохраняется, либо их общая энергия всё время перераспределяется между разными модами. Последняя ситуация, в частности, наблюдалась в численном эксперименте Ферми—Паста—Улама, в котором моделировались колебания в цепочке частиц, соединённых упругими пружинами [9]. Открытый в работе [9] эффект возвращаемости (т. е. квазипериодической зависимости энергии собственных мод от времени) объясняется близостью системы к полностью интегрируемой. В этом смысле нашу задачу можно переформулировать так: является ли интегрируемой система уравнений двумерной гидродинамики для дискретного ограниченного спектра с числом частот более двух.

В первом разделе статьи приводится вид птолемеевского решения и дан обзор различных течений, которые описываются с его помощью. Второй раздел посвящён доказательству отрицательного ответа на поставленный вопрос и обсуждению некоторых вытекающих из этого следствий.

1. ПТОЛЕМЕЕВСКИЕ ТЕЧЕНИЯ

Двумерные уравнения гидродинамики в переменных Лагранжа имеют вид [9, 10]

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (X_a Y_b - X_b Y_a) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (X_{ta} X_b - X_{tb} X_a + Y_{ta} Y_b - Y_{tb} Y_a) = 0. \quad (2)$$

Здесь X, Y — декартовы координаты жидкой частицы, a, b — её лагранжевые координаты, индекс t обозначает дифференцирование по времени. Уравнение (1) является уравнением непрерывности, а уравнение (2) выражает условие сохранения завихрённости для жидких частиц.

Перейдём в уравнениях в форме Лагранжа (1) и (2) к комплексным переменным $\chi = a + ib$, $\bar{\chi} = a - ib$ и комплексной координате траектории $W = X + iY$ ($\bar{W} = X - iY$). Тогда систему уравнений (1) и (2) удаётся записать в виде двух законов сохранения, т. е. независимости от времени двух якобианов [2]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{D(W, \bar{W})}{D(\chi, \bar{\chi})} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{D(W_t, \bar{W})}{D(\chi, \bar{\chi})} = 0. \quad (3)$$

Непосредственной подстановкой в систему (3) можно убедиться, что выражение

$$W = G(\chi) \exp(i\lambda t) + F(\bar{\chi}) \exp(i\mu t), \quad (4)$$

где G, F — аналитические функции, λ, μ — произвольные действительные числа, является точным решением уравнений двумерной гидродинамики [2]. Функции G и F в значительной степени

Таблица 1

$G(\chi)$	$F(\bar{\chi})$	λ	μ	Вид или название течения
χ	$iA \exp(ik\bar{\chi})$	0	$\neq 0$	волны Герстнера [3]
$\alpha \exp(ik\chi)$	$\beta \exp(-ik\bar{\chi})$	$\neq 0$	0	вихрь Кирхгофа [3]
$\alpha \exp(ik\chi)$	$ F' \leq 1, \chi \leq 1$	$\neq 0$	0	«вихри Абрашкина—Якубовича» [2, 11]
$\alpha \exp(ik\chi)$	$\beta \exp(ikn\bar{\chi}), n = 2, 3, \dots$	$\neq 0$	$\neq 0$	гипоциклоидальный вихрь в плазме [8]
$\alpha \exp(ik\chi)$	$\beta \exp(-ikn^2\bar{\chi}), n = \pm 1, \pm 2, \dots$	$\neq 0$	$n\lambda$	эпициклоидальные волны внутри цилиндрической полости [7]
$\chi - \frac{i\beta}{(\chi - ia)^2}$	$iA \exp(ik\bar{\chi}) + \frac{i\beta}{(\bar{\chi} + ia)^2}$	= 0	$\neq 0$	«волна-убийца» на фоне однородного волнения [4, 5]
$\chi - \frac{i\beta}{(\chi - i)^2}$	$\frac{i\beta}{(\bar{\chi} + i)^2}$	= 0	$\neq 0$	бризер на спокойной воде [6]

произвольны, т. к. единственным ограничением на их выбор является требование не обращения якобиана D (см. уравнение (1)) в нуль в области течения, гарантирующее однозначность функций $X(a, b, t)$ и $Y(a, b, t)$. Поэтому выражение (4) описывает достаточно широкий класс вихревых течений. В комплексных координатах якобиан D равен величине $|G'|^2 - |F'|^2$.

Траекториями жидких частиц для течений (4) будут эпициклоиды (гипоциклоиды). Двигаясь по ним, частицы описывают окружность, центр которой, в свою очередь, движется по другой окружности. Подобные течения называются птолемеевскими по аналогии с орбитами планет в птолемеевской картине мира.

Птолемеевские решения (4), включающие две произвольные аналитические функции, описывают весьма широкий класс двумерных вихревых движений. В табл. 1 собраны различные примеры течений, которые удаётся описать с помощью птолемеевских решений (4). Во всех течениях, за исключением двух, одна из частот (λ или μ) равна нулю и жидкие частицы движутся по окружности. Для вихря в плазме и волн внутри полости траектории частиц зависят от двух частот. В первом случае они являются гипоциклоидами, а во втором могут быть как гипоциклоидами ($n < 0$), так и эпициклоидами ($n > 0$).

Разделение решения (4) на одно- и двухчастотные решения, однако, всё же достаточно условно, и относится к рассмотрению поля течения в лабораторной системе отсчёта. Равномерное вращение жидкости как целого с угловой скоростью ω характеризуется в выражении для траектории W общим множителем $\exp(i\omega t)$, и выбором подходящей системы отсчёта множители при функциях G и F могут быть изменены. При такой процедуре невозможно лишь изменить разность частот $\lambda - \mu$, но одно из слагаемых в соотношении (4) можно сделать не зависящим от времени. Другими словами, в системе отсчёта, вращающейся с угловой скоростью λ (или угловой скоростью μ) решение (4) становится одночастотным.

В дальнейшем все рассуждения будут проводиться для покоящейся системы отсчёта.

2. ОБ УНИКАЛЬНОСТИ ПТОЛЕМЕЕВСКИХ ТЕЧЕНИЙ

В связи с видом решения (4) возникает вопрос, можно ли обобщить птолемеевские решения путём добавления эпициклов. Проанализируем, возможно ли существование решений уравнений

гидродинамики в виде конечного ряда

$$W = \sum_{k=1}^N W_k(\chi, \bar{\chi}) \exp(i\lambda_k t), \quad (5)$$

где число слагаемых $N > 2$ конечно и все λ_k — действительные постоянные. Частотный спектр выражения (5) является дискретным и ограниченным по ширине, но это не представляется излишне жёстким ограничением. Так, теорема Котельникова утверждает, что непрерывный сигнал с ограниченным спектром можно эффективно представлять через сумму сигналов на дискретных частотах. Тем не менее, выражение (5) не может быть точным решением уравнений гидродинамики для $N > 2$. Докажем это.

Рассмотрим последовательно возможность существования решения для случаев $N = 2, 3$ и, наконец, для произвольного конечного числа частот λ_k .

Пусть $N = 2$. В этом случае якобианы системы (3) не зависят от времени только в том случае, если

$$W_{1\chi} \bar{W}_{2\bar{\chi}} = W_{1\bar{\chi}} \bar{W}_{2\chi}. \quad (6)$$

Заметим, что

$$\bar{W}_{2\chi} = (\bar{W}_2)_\chi, \quad \bar{W}_{2\bar{\chi}} = (\bar{W}_2)_{\bar{\chi}},$$

поэтому равенство (6) эквивалентно уравнению:

$$\frac{D(W_1, \bar{W}_2)}{D(\chi, \bar{\chi})} = [W_1, \bar{W}_2] = 0. \quad (7)$$

В дальнейшем квадратные скобки мы будем применять для обозначения операции взятия якобиана.

Из равенства якобиана (7) нулю вытекает, что

$$W_1 = f(\bar{W}_2).$$

где f — некоторая аналитическая функция. Эта ситуация как раз реализуется для птолемеевских течений.

Из приведённого анализа следует, в частности, что в случае конечного набора функций вида $W_k \exp(i\lambda_k t)$ члены, содержащие максимальный и минимальный показатели в экспоненте (пусть это будут λ_1 и λ_N), связаны соотношением

$$W_1 = f(\bar{W}_N).$$

Перейдём к случаю $N = 3$. Подставим выражение

$$W = \sum_{k=1}^3 W_k \exp(i\lambda_k t) \quad (8)$$

в якобиан уравнения непрерывности и приравняем нулю все осциллирующие во времени слагаемые. Здесь возможны два случая.

1) Все разности частот не равны друг другу. Тогда получаем

$$[W_1, \bar{W}_2] = 0, \quad [W_1, \bar{W}_3] = 0, \quad [W_2, \bar{W}_3] = 0.$$

Из первого условия следует, что координата $\bar{W}_2$ — функция от W_1 , из второго, что $\bar{W}_3$ — функция от W_1 , но тогда из последнего и первого равенства получаем, что координата $\bar{W}_1$ — функция от W_1 . Это возможно только тогда, когда W_1 — комплексная функция одного действительного параметра. Очевидно, что W_2, W_3 тоже функции только этого же действительного параметра. Примем этот параметр за лагранжевую переменную a . В итоге приходим к утверждению, что траектория W зависит только от переменной a , а значит, течение, описываемое выражением (8) с неэквидистантным спектром, не может быть двумерным. Этот результат был получен без использования условия сохранения завихрённости жидкой частицы (якобиана второго уравнения системы (3)).

2) Пусть теперь частоты в триплете эквидистантны, т. е.

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \lambda_3 - \lambda_2.$$

В данном случае необходимо воспользоваться уже обоими уравнениями гидродинамики. Из уравнения непрерывности следует, что

$$[W_1, \bar{W}_3] = 0 \text{ и } [W_1, \bar{W}_2] + [W_2, \bar{W}_3] = 0,$$

а из уравнения движения —

$$\lambda_1[W_1, \bar{W}_2] + \lambda_2[W_2, \bar{W}_3] = 0.$$

Тогда, как и в случае 1), получим, что

$$[W_1, \bar{W}_2] = 0, \quad [W_1, \bar{W}_3] = 0, \quad [W_2, \bar{W}_3] = 0, \text{ если } \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

Таким образом, снова траектория W зависит только от переменной a .

Рассмотрим, наконец, случай произвольного конечного числа слагаемых. Согласно сделанному выше замечанию, $[W_1, \bar{W}_N] = 0$ и, следовательно, $W_1 = f(\bar{W}_N)$. Расположим все разности частот в порядке их невозрастания от максимальной (равной $\lambda_N - \lambda_1$) до наиболее близкой к $(\lambda_N - \lambda_1)/2$, но превышающей её. Якобианы, составленные из пар функций, соответствующих парам частот, входящих в эти разности, обязаны равняться нулю. Это сразу же следует из уравнения непрерывности, если нет равных разностей частот, и из уравнения движения и уравнения непрерывности, если пары равных разностей частот есть (см. рассуждения о триплете).

Отсюда следует, в частности, что функции W_k с частотами, расположенными на оси частот по одну сторону от частоты $(\lambda_N - \lambda_1)/2$, будут функционально зависеть от комплексно сопряжённых функций $\bar{W}$, соответствующих частотам из другой половины частотного интервала. Легко видеть, что любая пара функций из одной половины частотного интервала функционально связана между собой (без комплексного сопряжения).

Рассмотрим теперь функцию W_p с частотой λ_p , наиболее близкой к середине частотного интервала. Пусть для определённости она расположена в той же половине интервала что и W_1 . Тогда, согласно последнему утверждению, W_1 является функцией от W_p , т. е. $W_1 = f(W_p)$, поскольку обе они относятся к одной половине частотного интервала. Однако согласно уравнению непрерывности (см. рассуждения о дуплете и триплете), имеем $W_1 = h(\bar{W}_p)$. Последние два равенства означают, что координата W_j зависит только от одного действительного параметра a . Очевидно, что и остальные величины W_j тоже являются функциями только этого действительного параметра. Примем его за лагранжевую переменную a . В итоге мы пришли к утверждению, что комплексная функция W зависит только от одной лагранжевой переменной a и не зависит от b , что противоречит начальному предположению относительно её вида.

Если частота λ_p находится в другой половине частотного спектра, то все вышеприведённые рассуждения останутся в силе, но вместо функции W_1 нужно будет использовать функцию W_N .

3. ОБСУЖДЕНИЕ

Решение вида (5) нельзя обобщить на случай трёх и более частот. Требования ограниченности и дискретности частотного спектра плоского течения оказываются достаточно жёсткими. Общие результаты такого типа применительно к уравнению Эйлера нам неизвестны.

Согласно сценарию перехода к турбулентности Ландау—Хопфа после последовательного развития ряда неустойчивых режимов спектр гидродинамического течения можно представить как конечный набор несоизмеримых частот. Суперпозиция определяемых этими частотами колебаний даст, вообще говоря, сложную неповторяющуюся картину движения, которую предлагается отождествить с турбулентностью. Подобного рода течение описывает формула (5), если принять, что отношение хотя бы одной пары частот λ_k — иррациональное число. Особенностью такого течения является то, что жидкие частицы движутся в ограниченной области и не сносятся потоком. Считается, что, в силу явления синхронизации колебаний, вероятность реализации сценария Ландау—Хопфа крайне мала [12]. Наше исследование доказывает, что для двумерных плоских течений с локализованными траекториями жидких частиц он принципиально невозможен.

Формула (5) задаёт течения с периодическими или квазипериодическими (в случае несоизмеримости частот) траекториями жидких частиц. В ней отсутствует слагаемое, описывающее среднее (сдвиговое) течение. Вместе с тем она не включает в себя и круговое вращение жидкости, которое описывается выражением $W = \chi \exp[i f(|\chi|)t]$, где $f|\chi|$ — угловая скорость вращения жидких частиц. Это наблюдение открывает ещё два возможных направления обобщения птолемеевских течений — включение в формулу для комплексной координаты траектории W линейного по времени слагаемого и введение в выражении (4) зависимости частот λ и μ от лагранжевых координат. Но оба они, как выяснили авторы, не дают результата.

Птолемеевские течения удаётся, однако, обобщить на случай трёхмерной геометрии [13, 14]. Частотный спектр обобщённых птолемеевских течений содержит уже четыре частоты. Траектории жидких частиц представляют собой намотки на тороидальные поверхности, образованные путём вращения различным образом ориентированных в пространстве эллипсов вокруг вертикальной оси. Особенность этих течений заключается в том, что их можно представить как суперпозицию трёхчастотного движения в горизонтальной плоскости и вертикального одночастотного колебания. Таким образом, для функции W условно реализуется трёхчастотный режим, но это происходит за счёт добавления движения по третьей координате. Переход к трёхмерным течениям позволяет увеличить количество временных гармоник в спектре точного решения. Это обстоятельство переориентирует поиск точных решений птолемеевского типа на трёхмерные течения.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показано, что из всех возможных двумерных течений, содержащих конечный набор временных (не зависящих от координат) частот, уравнениям гидродинамики идеальной жидкости удовлетворяет только двухчастотное течение (птолемеевское течение).

Статья написана в рамках научного проекта 15–01–0044, выполненного при поддержке Программы «Научный фонд НИУ ВШЭ» в 2015 году. Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства РФ в рамках «Дорожной карты» Программы 5/100 Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. Часть I. М.: Наука, 1976. 494 с.
2. Абрашкин А. А., Якубович Е. И. // Докл. АН СССР. 1984. Т. 276, № 1. С. 76.
3. Ламб Г. Гидродинамика. М.-Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
4. Abrashkin A. A., Soloviev A. // Phys. Rev. Lett. 2013. V. 110. Art. no. 014501.
5. Абрашкин А. А., Соловьев А. Г. // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2013. № 5. С. 125.
6. Abrashkin A., Oshmarina O. // Phys. Lett. A. 2014. V. 378, No. 38–39. P. 2 866.
7. Абрашкин А. А. // Прикладная механика и техническая физика. 1984. № 3. С. 86.
8. Абрашкин А. А. // Физика плазмы. 1984. Т. 10, № 4. С. 730.
9. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Т. 1. М.: Физматгиз, 1963. 583 с.
10. Стоккер Дж. Волны на воде. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1959. 617 с.
11. Guimbard D., Leblanc S. // J. Fluid Mech. 2006. V. 567. P. 91.
12. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
13. Абрашкин А. А., Зенькович Д. А., Якубович Е. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1996. Т. 39, № 6. С. 783.
14. Абрашкин А. А., Зенькович Д. А., Якубович Е. И. // Докл. АН СССР. 1997. Т. 357. № 5. С. 619.

Поступила в редакцию 21 января 2015 г.; принята в печать 28 мая 2015 г.

**ON THE FREQUENCY SPECTRUM OF EXACT SOLUTIONS
OF THE TWO-DIMENSIONAL HYDRODYNAMICAL EQUATIONS**

A. A. Abrashkin and E. I. Yakubovich

It is shown that the discrete frequency spectrum of the plane hydrodynamic flow of an ideal incompressible liquid with localized trajectories of liquid particles can contain only one harmonic, two harmonics, or an infinite number of the latter.