

УДК 532.59

СТРУКТУРА ПОЛЯ КВАЗИСОЛИТОНА ПРИ ПРИБЛИЖЕНИИ К КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКЕ

*К. А. Горшков*¹, *И. А. Соустова*^{1,2*}, *А. В. Ермошкин*¹

¹ Институт прикладной физики РАН;

² Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева,
г. Нижний Новгород, Россия

В рамках приближённого подхода, основанного на представлении солитонов уравнения Гарднера в виде составных структур (кинков с разными полярностями), обсуждается неквазистационарная эволюция таких уединённых волн, обусловленная переменным параметром квадратичной нелинейности α . Исследована структура составных солитонов в критических для квазистационарного описания ситуациях, когда предсказываемое увеличение масштабов уединённых волн становится неограниченным на конечных пространственно-временных интервалах. Детально изучена зависимость пространственных масштабов распределения поля квазисолитона от коэффициента квадратичной нелинейности вблизи критической точки при степенной временной зависимости $\alpha(t)$. Полученное приближённое решение сравнивается с результатами прямого численного моделирования уравнения Гарднера с переменными коэффициентами.

ВВЕДЕНИЕ

В работах [1–3] было предложено приближённое описание эволюции солитонов, допускающих представление в виде составных структур, которые сформированы более простыми стационарными образованиями — кинками (т. е. перепадами поля с разной полярностью). Использование этого подхода в задачах о взаимодействии уединённых волн позволило существенно расширить рамки традиционного описания столкновения солитонов как классических частиц и исследовать, в частности, взаимодействие солитонов со значительно различающимися масштабами [1, 2]. Предложенный подход оказывается эффективным и в задачах об эволюции солитонов в средах с переменными параметрами и, как показано в работах [3, 4], позволяет правильно описать сильные отличия формы уединённых волн от формы стационарной волны в ситуациях, когда масштабы изменения параметров среды оказываются существенно меньше масштабов солитона.

Последнее обстоятельство позволяет использовать указанный подход при исследовании эволюции составных солитонов в критических для квазистационарного описания ситуациях, когда предсказываемое увеличение масштабов уединённых волн становится неограниченным на конечных пространственно-временных интервалах. Такие ситуации не являются экзотическими и характерны, в частности, для солитонов внутренних волн в шельфовой зоне океанов и морей [5–9].

Решения, получаемые с помощью указанного подхода, позволяют выявить механизм неквазистационарной трансформации уединённых волн, а также дают возможность оценить поля в конкретных физических реализациях. Обсуждаемая ниже задача рассмотрена в рамках уравнения Гарднера с переменными коэффициентами для поля ϕ :

$$\phi_t + \phi[\alpha(t) - \mu(t)\phi]\phi_x + \beta\phi_{xxx} = 0, \quad (1)$$

где t — время, x — координата, нижние индексы обозначают соответствующие частные производные. При постоянных коэффициентах α , β и $\mu > 0$ уравнение (1) имеет семейство солитонных

* soustova@hydro.appl.sci-nnov.ru

решений

$$\phi_s(x, t) = \Phi + \frac{D}{2} \{ \text{th}[\lambda(x - vt + \Delta)] - \text{th}[\lambda(x - vt - \Delta)] \}, \quad (2)$$

зависящее от произвольного пьедестала $\Phi(x, t) = \text{const}$ и ещё одного параметра, в качестве которого удобно выбрать безразмерную величину $\lambda\Delta$. При этом $D = \Phi_m \text{th}(2\lambda\Delta)$, $\lambda = 0,5 \sqrt{(v_m - v_0)/\beta} \times \text{th}(2\lambda\Delta)$, $\Delta = 2\lambda\Delta \sqrt{\beta/(v_m - v_0)} \text{cth}(2\lambda\Delta)$, $(v - v_0)/(v_m - v_0) = \text{th}^2(2\lambda\Delta)$, $\Phi_m = \alpha/\mu - 2\bar{\Phi}$, $v_m = \alpha^2/(6\mu) + \bar{\Phi}(\alpha - \mu\bar{\Phi})/3$, $v_0 = \bar{\Phi}(\alpha - \mu\bar{\Phi})$. Амплитуда солитона $\Phi_0 = \max(\Phi_s - \bar{\Phi})$ и его ширина L на уровне $0,5\Phi_0$ также выражаются через величину $\lambda\Delta$: $\Phi_0 = \Phi_m[1 - \text{ch}^{-1}(2\lambda\Delta)]$, $\text{ch}(\lambda L) = 2 + \text{ch}(2\lambda\Delta)$.

Уравнение (1), кроме солитонного, имеет однопараметрическое семейство решений в виде перепадов поля (кинков):

$$\phi_k^+(x, t) = \Phi + \frac{\Phi_m}{2} \{ 1 \pm \text{th}[\lambda_m(x - v_m t)] \}, \quad (3)$$

где разные знаки соответствуют кинкам с разными полярностями,

$$\lambda_m = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{v_m - v_0}{\beta}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(\alpha - 2\mu\Phi)^2}{6\mu\beta}}, \quad v_m - v_0 = \frac{\alpha^2}{6\mu} + \frac{\Phi}{3} (\alpha - \mu\Phi) - \Phi(\alpha - \mu\Phi) = \frac{(\alpha - 2\mu\Phi)^2}{6\mu}.$$

Солитоны (2) можно рассматривать как структуры, образованные парой кинков (3) с разными полярностями с перенормированными из-за взаимодействия величинами: $\Phi_m \rightarrow D$, $\lambda_m \rightarrow \lambda$, $v_m \rightarrow v$. При этом параметр $\lambda\Delta$ представляет собой отношение расстояния между кинками 2Δ к характерному масштабу перепадов поля в кинках $2\lambda^{-1}$ и меняется в полубесконечном интервале $0 < \lambda\Delta < \infty$. При $\lambda\Delta \ll 1$ и $\lambda\Delta \gg 1$ возможно неограниченное увеличение размеров (длительностей) солитонов. В случае $\lambda\Delta \ll 1$ из-за сильного перекрытия полей отдельных кинков амплитуды солитонов малы, их скорости близки к минимальной скорости v_0 , а размеры не зависят от величины Δ и определяются только масштабом λ^{-1} . В целом солитоны в этом пределе близки к уединённым волнам уравнения Кортевега—де Вриза и не имеют признаков составной структуры.

При $\lambda\Delta \gg 1$ амплитуды и скорости солитонов близки к максимальным возможным значениям Φ_m и v_m , а форма солитонов стремится к прямоугольной с протяжённой плоской вершиной, ограниченной резкими перепадами поля. Размер солитона L в этом пределе практически совпадает с расстоянием между кинками 2Δ и составной характер уединённых волн оказывается наиболее выраженным.

Когда коэффициенты $\alpha(t)$, $\mu(t) > 0$ и $\beta(t)$ меняются во времени медленно по сравнению с длительностью солитона L/v , известно [5] квазистационарное решение уравнения (1). Основное соотношение, определяющее эволюцию уединённой волны, следует из закона сохранения полного волнового импульса солитона $\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_s^2(x, t) dx = P_0 = \text{const}$ и при $\Phi = 0$ имеет вид

$$2\lambda\Delta - \text{th}(2\lambda\Delta) = P_0 |\alpha^{-2}\mu^3\beta^{-1}|^{1/2}. \quad (4)$$

Левая часть равенства (4) как функция аргумента $\lambda\Delta$ является монотонно растущей во всём диапазоне $0 < \lambda\Delta < \infty$. Поэтому неограниченное увеличение масштабов солитона происходит, когда правая часть этого равенства стремится либо к нулю, либо к бесконечности. Поскольку используемый подход [3] в существенной мере опирается на составной характер солитонов, далее обсуждается предел $\lambda\Delta \rightarrow \infty$, $|\alpha^{-2}\mu^3\beta^{-1}|^{1/2} \rightarrow \infty$. Наиболее реалистичная ситуация, отвечающая этому пределу, связана с обращением коэффициента α в нуль. Такая задача численно решалась в работе [5] при линейной зависимости $\alpha(t) = 1 + \varepsilon t$, где ε — постоянная. При $\alpha \rightarrow 0$ ($t \rightarrow -\varepsilon^{-1}$) амплитуда квазистационарного солитона стремится к нулю, а его размер и длительность — к бесконечности. В данной работе эта задача в более общей постановке решается аналитически.

1. ПОСТРОЕНИЕ ПРИБЛИЖЁННОГО РЕШЕНИЯ

Приближённое описание неквазистационарной эволюции солитонов, предложенное в работе [3], строится в соответствии с составной структурой солитонов уравнения (1): решения ищутся независимо в относительно узких областях перепадов поля (кинков) и в существенно более протяжённых областях между ними, а потом сшиваются друг с другом. Предполагается, что масштабы изменения параметров среды Λ существенно превышают масштабы перепадов поля кинков λ^{-1} , но остаются малыми или сравнимыми с расстоянием между кинками. Малый параметр задачи имеет порядок $(\lambda\Lambda)^{-1}$. Указанное соотношение масштабов позволяет считать эволюцию перепадов поля квазистационарной, а поля вне кинков — медленно меняющимися и потому описываемыми исходным уравнением (1) в бездисперсионном приближении, т. е. уравнением простой волны

$$\Phi_t + \Phi(\alpha - \mu\Phi)\Phi_x = 0. \quad (5)$$

Квазистационарный характер перепадов поля позволяет связать медленно меняющиеся поля $\Phi^+(x, t)$ и $\Phi^-(x, t)$ в областях, примыкающих к данному кинку с координатой $x_k(t)$ со сторон $x > x_k(t)$ и $x < x_k(t)$ соответственно:

$$\Phi^-[x_k(t), t] = \alpha(t) - \Phi^+[x_k(t), t]. \quad (6)$$

При этом траектория кинков $x_k(t)$ определяется стационарным выражением для их скорости:

$$\frac{dx_k}{dt} = \frac{\alpha^2(t)}{6} + \frac{\Phi^q(x_k, t)}{3} [\alpha(t) - \Phi^q(x_k, t)], \quad (7)$$

где $q = +, -$. Как отмечалось в работе [3], характеристические скорости медленно меняющихся возмущений в областях $x > x_k(t)$ и $x < x_k(t)$ вблизи кинка равны и всегда оказываются меньше его скорости. Указанное равенство характеристических скоростей позволяет использовать в соотношении (7) как поле Φ^+ , так и Φ^- . Поэтому уравнение (5) с условиями (6) и (7) образует замкнутую систему для последовательного нахождения медленно меняющихся полей во всех областях между кинками, начиная с области перед кинком, отвечающей фронту квазисолитона.

Рассмотрим ситуацию, когда в начальный момент времени возмущения перед солитоном отсутствуют и, следовательно, в соответствии с только что сделанными замечаниями, будут отсутствовать и в дальнейшем. Это позволяет из соотношений (6) и (7) сразу же определить поле Φ_f вблизи фронта квазисолитона со стороны вершины, $\Phi(x_f, t)$, и координату этого фронта $x_f(t)$:

$$\Phi_f(x_f, t) = \alpha(t), \quad x_f(t) = \int_0^t v_m(t') dt' + x_f(0) = \frac{1}{6} \int_0^t \alpha^2(t') dt' + x_f(0). \quad (8)$$

Соотношения (8) дополняются линией (отрезком) начальных данных:

$$\Phi(x, t = 0) = \alpha(t = 0), \quad x_{bf}(0) < x < x_f(0), \quad (9)$$

отвечающих плоской вершине солитона при $t = 0$, где $x_{bf}(t)$ — координата склона квазисолитона. Поскольку любое распределение $\Phi(x, t) = \text{const}$ удовлетворяет уравнению (5), участок вершины, соответствующий условиям (9), остаётся плоским, а эволюция этого участка сводится к изменению его границ. Постоянство поля $\Phi(t = 0) = \alpha(t = 0)$ позволяет определить скорости граничных

точек: $\alpha(0)[\alpha(t) - \alpha(0)]$ — скорость со стороны фронта (характеристическая скорость из соотношения (5)), $dx_{bf}(t)/dt = (1/6)\alpha^2(t) + (1/3)\alpha(0)[\alpha(t) - \alpha(0)]$ — скорость склона квазисолитона (7). В результате плоский участок вершины с протяжённостью

$$L_{pl}(t) = x_f(0) - x_{bf}(0) - \frac{1}{6} \int_0^t [\alpha(t') - 2\alpha(0)]^2 dt' \tag{10}$$

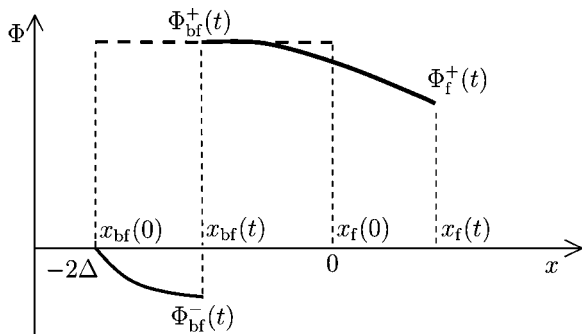


Рис. 1. Структура составного солитона уравнения Гарднера

уменьшается с течением времени и исчезает при $t = t_*$, когда $L_{pl}(t_*) = 0$. В то же время, начиная с $t = 0$, непосредственно за фронтом возникает и расширяется участок вершины с неоднородным и нестационарным распределением поля, порождаемый движением фронта (8). Расширение этого участка превышает сокращение плоской части вершины так, что размер квазисолитона при убывающей зависимости $\alpha(t)$ непрерывно растет при $t > 0$ (см. ниже). Решение уравнения (5) с условиями (8) имеет вид

$$x - x_f[t_f(\Phi)] = \Phi \{A(t) - A[t_f(\Phi)]\} - \Phi^2 [t - t_f(\Phi)], \tag{11}$$

где $A(t)$ — первообразная функции $\alpha(t)$, $t_f(\Phi)$ — функция, обратная к функции $\alpha(t)$ в равенстве (8). Выражение (11) в неявном виде описывает поле на вершине квазисолитона: при $0 < t < t_*$ — на части вершины от фронта до начала уменьшающегося плоского участка, а при $t \geq t_*$ — на всём протяжении от фронта до склона. Поскольку при $t \geq t_*$ поле $\Phi_{bf}^+(t)$ перед склоном солитона (рис. 1) оказывается заданным, зависимости $x_{bf}(t)$ и $\Phi_{bf}^+(t)$ находятся из выражения (11) при $x = x_{bf}(t)$ и $\Phi = \Phi_{bf}^+(t)$,

$$x_{bf}(t) - x_f[t_f(\Phi_{bf}^+)] = \Phi_{bf}^+ \{A(t) - A[t_f(\Phi_{bf}^+)]\} - (\Phi_{bf}^+)^2 [t - t_f(\Phi_{bf}^+)], \tag{12}$$

и уравнения (7), преобразованного с помощью равенства (12) в уравнение для функции $\Phi_{bf}^+(t)$:

$$\frac{1}{6} [\alpha(t) - 2\Phi_{bf}^+]^2 \left(\frac{d\Phi_{bf}^+}{dt} \right)^{-1} - A(t) + 2t\Phi_{bf}^+ = \frac{1}{6} (\Phi_{bf}^+)^2 \frac{dt_f}{d\Phi_{bf}^+} - A[t_f(\Phi_{bf}^+)] + 2\Phi_{bf}^+ t_f(\Phi_{bf}^+). \tag{13}$$

Полученная зависимость $\Phi_{bf}^+(t)$ после подстановки в равенство (6) определяет поле $\Phi_{bf}^-(t)$ непосредственно за склоном солитона и вместе с координатой $x_{bf}(t)$ из соотношения (12) задаёт линию начальных данных для нахождения медленно меняющегося поля, возникающего за эволюционирующим квазисолитоном: решение имеет вид (11) с заменой $x_f[t_f(\Phi)]$ на $x_{bf}[t_{bf}(\Phi)]$ и $t_f(\Phi)$ на $t_{bf}(\Phi)$. Таким образом, полное описание медленно меняющегося поля квазисолитона при произвольной зависимости $\alpha(t)$ сводится к решению единственного уравнения (13) в обыкновенных производных для величины $\Phi_{bf}^+(t)$. Вместе с тем в качественном отношении общая картина эволюции, описываемая решениями (8)–(13), достаточно наглядна и не требует непосредственного обращения к решению уравнения (13). Согласно уравнениям (5) и (11), возмущения, появляющиеся вблизи фронта и имеющие скорость, меньшую скорости фронта, движутся вдоль вершины квазисолитона в направлении его склона без изменения своей величины. Поэтому поле $\Phi_{bf}^+(t)$

вблизи склона в момент времени t равно полю вблизи фронта в некоторый предыдущий момент времени $(t - \tau)$. В случае монотонно убывающей зависимости $\alpha(t)$ это приводит к монотонно-му же убыванию поля вдоль вершины квазисолитона от его склона к фронту. Такой характер распределения поля сохраняется вплоть до момента $t = t_{cr}$, когда $\alpha(t_{cr}) = 0$ и, следовательно, $\Phi_f(t_{cr}) = 0$. При этом поле вблизи склона, $\Phi_{bf}^+(t_{cr})$, остаётся конечным, а перепад поля становится симметричным: $\Phi_{bf}^+(t_{cr}) = -\Phi_{bf}^-(t_{cr})$. Из-за ограниченности скоростей движения фронта и склона на всех стадиях процесса остаётся конечным и размер квазисолитона $L(t) = x_f(t) - x_{bf}(t)$. В случае убывающей зависимости $\alpha(t)$ скорость склона всегда меньше скорости фронта на величину $\Phi_{bf}^+(\Phi_{bf}^+ - \alpha)/3$, так что величина $L(t) = L(0) + 1/3 \int_0^t \Phi_{bf}^+(\Phi_{bf}^+ - \alpha) dt'$ монотонно растёт в интервале $0 < t < t_{cr}$, а скорость склона в окрестности $\alpha = 0$ всегда отрицательна: $dx_{bf}(t_{cr})/dt = -[\Phi_{bf}^+(t_{cr})]^2/3$.

2. РАСЧЁТ ПАРАМЕТРОВ КВАЗИСОЛИТОНА ПРИ СТЕПЕННОЙ ЗАВИСИМОСТИ $\alpha(t)$

В количественном отношении параметры распределения поля, особенно в критической точке, когда $\alpha(t_{cr}) = 0$, зависят от вида функции $\alpha(t)$. Для исследования этих особенностей обратимся к уравнению (13), которое может быть решено в квадратурах для нескольких классов зависимостей $\alpha(t)$. Подходящими для наших целей являются степенные зависимости $\alpha(t) = (1 + \varepsilon t)^\delta$, где $\delta > 0$, обращающиеся в нуль при $t = t_{cr} = -\varepsilon^{-1}$, где ε — малый параметр. Переход от переменных $\Phi_{bf}^+(t)$ и t к переменным $p = \Phi_{bf}^+/\alpha$ и α приводит уравнение (13) к уравнению с разделяющимися переменными, решение которого имеет вид

$$\alpha(p) = \alpha(p_*) \exp \left\{ - \int_{p_*}^p \frac{b(p')^{1+1/\delta} - 2p' + 1/(1+\delta)}{b(p')^{2+1/\delta} - 2(1+1/3\delta)(p')^2 + [(2/3\delta) + 1/(1+\delta)]p - (1/6\delta)} dp' \right\}, \quad (14)$$

где $p_* \leq p \leq \infty$, $b = (12\delta^2 + 7\delta + 1)/[6\delta(1 + \delta)]$, $\alpha(p_*) = p_*^{-1} = (1 + \varepsilon t_*)^\delta$, $t_* > 0$.

Полученное решение можно использовать для представления зависимостей, характеризующих эволюционирующий квазисолитон, функциями аргумента α . При этом поле вблизи фронта уединённой волны и координата самого фронта являются явными функциями этого аргумента:

$$\Phi_f(\alpha) = \alpha, \quad \varepsilon x_f(\alpha) = \frac{\alpha^{2+1/\delta} - 1}{6(1 + 2\delta)} + x_f(0). \quad (15)$$

Аналогичные зависимости для склона квазисолитона, $\Phi_{bf}^+(\alpha)$, $\Phi_{bf}^-(\alpha)$ и $x_{bf}(\alpha)$, представляются в параметрической форме. Имея в виду, что функция $\alpha(p)$ известна из соотношения (14), из равенств (6) и (11) получим:

$$\begin{aligned} \Phi_{bf}^+(p) &= p\alpha(p), & \Phi_{bf}^-(p) &= (1-p)\alpha(p), \\ \varepsilon[x_{bf}(p) - x_f|_{\alpha=0}] &= p \left[\frac{1}{1+\delta} - p + \frac{\delta b}{1+2\delta} p^{1+1/\delta} \right] \alpha(p)^{2+1/\delta}. \end{aligned} \quad (16)$$

В случае степенной зависимости $\alpha(t)$ для поля на вершине квазисолитона из соотношения (11) получаем неявную формулу для функции $\Phi(x, t)$:

$$\varepsilon(x - x_f|_{\alpha=0}) = (1 + \varepsilon t) \Phi \left[\frac{(1 + \varepsilon t)^\delta}{1 + \delta} - \Phi \right] + \frac{\delta b}{1 + 2\delta} \Phi^{2+1/\delta}, \quad (17)$$

а распределение поля за склоном квазисолитона может быть представлено в параметрической форме $\{\Phi(p) = (1 - p)\alpha(p); x = x(p, t)\}$:

$$\begin{aligned} \varepsilon[x(p, t) - x_{\text{bf}}(p)] = (1 + \varepsilon t) (1 - p)\alpha(p) \left[\frac{(1 + \varepsilon t)^\delta}{1 + \delta} - (1 - p)\alpha(p) \right] + \\ + (1 - p) \left[1 - p - \frac{1}{1 + \delta} \right] \alpha(p)^{2+1/\delta}. \end{aligned} \quad (18)$$

Интеграл в равенстве (14) берётся в элементарных функциях при рациональных значениях δ . Так, при $\delta = 0,5, 1, 2$ эти функции имеют вид

$$\alpha(p) = \begin{cases} c(p - 1)^{\delta_0} (p - p_1)^{\delta_1} (p - p_1^*)^{\delta_1^*}, & \delta = 1; \\ c(p - 1)^{\delta_0} (p - p_1)^{\delta_1} (p - p_2)^{\delta_2} (p - p_2^*)^{\delta_2^*}, & \delta = 0,5; \\ c(p - 1)^{\delta_0} (p - p_1)^{\delta_1} (p - p_1^*)^{\delta_1^*} (p - p_2)^{\delta_2} (p - p_2^*)^{\delta_2^*}, & \delta = 2, \end{cases} \quad (19)$$

где $p_1, p_1^*, p_2, p_2^*, \delta_0, \delta_1, \delta_1^*, \delta_2, \delta_2^*$ — постоянные, а величина c определяется из условия $\alpha(p_*) = p_*^{-1}$. Для этих значений δ на рис. 2 приведены распределения полей квазисолитонов, построенные по формулам (15)–(19), в момент, когда $\alpha = 0$. Как следует из этих выражений, поля на вершине квазисолитонов в этот момент описываются степенными зависимостями

$$\Phi(x, t = t_{\text{cr}}) = [\varepsilon k(x_f|_{\alpha=0} - x)]^\gamma, \quad (20)$$

где $k = (1 + 2\delta)/(\delta b)$, $\gamma = \delta/(1 + 2\delta)$, поля Φ_{bf}^+ и Φ_{bf}^- на склоне квазисолитона равны $\Phi_{\text{bf}}^+|_{\alpha=0} = -\Phi_{\text{bf}}^-|_{\alpha=0} = \lim_{p \rightarrow \infty} [p\alpha(p)] = c$, а координата склона степенным образом связана со значением c (см. формулу (20) при $x = x_{\text{bf}}$).

Обращает на себя внимание значительное увеличение размеров квазисолитона с ростом δ (рис. 2). Несмотря на то, что расстояние, проходимое фронтом до его остановки при $\alpha = 0$, уменьшается с ростом величины δ , за счёт более существенного продвижения склона в противоположном направлении размер квазисолитона увеличивается. Такое поведение обусловлено происходящим при увеличении δ ростом промежутка времени, в течение которого значение α близко к нулю, а скорость склона отрицательна, конечна и составляет примерно $(\Phi_{\text{bf}}^+|_{\alpha=0})^2/3$.

Проблемными с точки зрения приближённого описания остаются области вблизи фронта квазисолитона и за его склоном. При $\alpha \rightarrow 0$ эволюция перепада поля на фронте становится неквазистационарной из-за роста масштаба фронта ($\lambda_m^{-1} \approx \alpha^{-1}$). Однако из-за относительной малости как полей, так и размеров прифронтной области практически вся вершина квазисолитона в рамках предложенного подхода описывается правильно. В области же за склоном приближённый подход, давая правильно величину поля Φ_{bf}^- , не при всех значениях δ в целом адекватно описывает эволюцию поля в этой области: уже при $\delta = 1$ появляются сильные укручения и неоднозначности профиля поля (см. рис. 2).

Сравнение результатов приближённого описания и прямого численного моделирования эволюции солитона уравнения Гарднера для случая переменного коэффициента $\alpha(t) = 1 + \varepsilon t$ при квадратичной нелинейности показывает как качественное, так и неплохое количественное совпадение.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведённое описание эволюции солитона уравнения Гарднера вблизи критического значения коэффициента $\alpha(t)$ как качественно, так и неплохо количественно согласуется с результатами прямого численного моделирования, представленными в работе [5] для случая $\delta = 1$ (см. рис. 3).

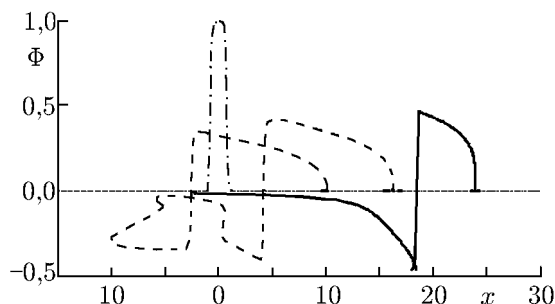


Рис. 2. Распределение полей квазисолитона уравнения Гарднера при $\alpha = 0$ для различных законов изменения $\alpha(t)$. Сплошная линия соответствует закону $\alpha = (1 + \varepsilon t)^{0,5}$, штрихпунктирная линия — закону $\alpha = 1 + \varepsilon t$, пунктирная линия — закону $\alpha = (1 + \varepsilon t)^2$; $\varepsilon = -0,0036$; начальная ширина солитона для всех случаев одинакова ($\Delta_0 = 0,77015$) и соответствует таковой для начального солитона в работе [5]

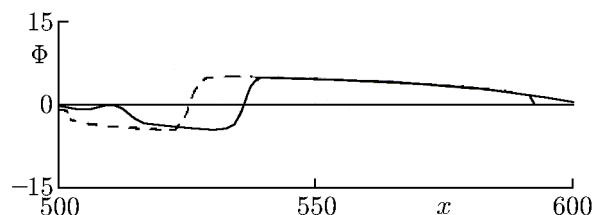


Рис. 3. Форма квазисолитона при $\alpha = 1 + \varepsilon t$ в момент времени $t = t_{cr}$. Пунктирная линия соответствует приближённому подходу, сплошная линия — численному решению уравнения Гарднера [5]; $\varepsilon = -0,0036$; $\mu = 0,083$; $\Delta = 0,77015$

Заслуживает внимания и более детального изучения обнаруженная в данной работе зависимость пространственных масштабов распределения поля квазисолитона от характера изменения коэффициента $\alpha(t)$ вблизи критической точки. Такое изучение имеет смысл проводить с учётом зависимости от времени всех коэффициентов уравнения (1), что обеспечит возможность оценки полей квазисолитонов применительно к реальным физическим ситуациям.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проекты 15-42-02-357а, 15-05-2430а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горшков К. А., Соустова И. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 2001. Т. 44, № 5–6. С. 502.
2. Gorshkov K. A., Ostrovsky L. A., Soustova I. A., Irisov V. G. // Phys. Rev. E. 2004. V. 69. P. 1.
3. Горшков К. А., Соустова И. А., Ермошкин А. В., Зайцева Н. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 2012. Т. 55, № 5. С. 324.
4. Горшков К. А., Соустова И. А., Ермошкин А. В., Зайцева Н. В. // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2013. Т. 6, № 3. С. 54.
5. Grimshaw R., Pelinovsky E., Talipova T. // Phys. D. 1999. V. 132. P. 40.
6. Grimshaw R., Pelinovsky E., Talipova T. // Surv. Geophys. 2007. V. 28. P. 273.
7. Nakoulima O., Zabybo N., Pelinovsky E., et al. // Appl. Math. Comput. 2004. V. 152. P. 449.
8. Серебряный А. Н., Пао К. П. // Докл. РАН. 2008. Т. 420, № 4. С. 543.
9. Сабинин К. Д., Серебряный А. Н. // Акуст. журн. 2007. Т. 53, № 3. С. 410.

Поступила в редакцию 22 декабря 2014 г.; принята в печать 29 апреля 2015 г.

**THE FIELD STRUCTURE OF A QUASISOLITON APPROACHING
THE CRITICAL POINT**

K. A. Gorshkov, I. A. Soustova, and A. V. Ermoshkin

The non-quasistationary evolution of the studied solitary waves due to the variable quadratic-nonlinearity parameter α is discussed within the framework of an approximate approach that is based on the representation of the Gardner-equation solitons as compound formations (heteropolar kinks). The composite-soliton structure is studied for the situations, which are critical for the quasistationary description when a predicted increase in the solitary-wave scales becomes unlimited for the finite spatiotemporal intervals. The dependence of the spatial scales of the quasisoliton-field distribution on the quadratic-nonlinearity coefficient near the critical point for the power-law time dependence $\alpha(t)$ is studied in detail. The obtained solution is compared with the results of direct numerical simulation of the Gardner equation with variable coefficients.