УДК 534.222

ЭВОЛЮЦИЯ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В ОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ С РАЗНОМОДУЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ И РЕЛАКСАЦИЕЙ

В. Е. Назаров, С. Б. Кияшко, А. В. Радостин*

Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород, Россия

Приведены результаты аналитического и численного исследований распространения и эволюции первоначально гармонических акустических волн в однородных средах с разномодульной нелинейностью и релаксацией. Получены решения для профилей нелинейных волн и их спектральных характеристик.

ВВЕДЕНИЕ

Данная статья является продолжением работы [1], где было получено нелинейное волновое уравнение для плоских продольных волн в однородных средах с разномодульной нелинейностью и релаксацией и найдены точные решения этого уравнения в виде самоподобных волн, не изменяющих форму при распространении. В общем случае (при произвольном граничном условии) получить точное аналитическое решение нелинейного волнового уравнения для таких сред не представляется возможным, но его можно попытаться решить численно. В этом плане наиболее важной и интересной является задача о нелинейном распространении и искажении первоначально гармонических волн в таких средах.

В данной работе аналитически и численно исследуются распространение и эволюция первоначально гармонических волн в однородных средах с разномодульной нелинейностью и релаксацией. Получены решения для профилей и спектральных характеристик нелинейных волн в таких средах.

1. ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ОДНОРОДНОЙ РАЗНОМОДУЛЬНОЙ СРЕДЫ С РЕЛАКСАЦИЕЙ

Уравнение состояния однородной разномодульной среды с релаксацией имеет вид [1]

$$\sigma(\varepsilon) = E\left(\varepsilon - \gamma\left|\varepsilon\right|\right) + mC_0^2\rho \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{\mathrm{d}\varepsilon(t')}{\mathrm{d}t'} \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_0}\right) \mathrm{d}t', \tag{1}$$

где σ — напряжение, ε — деформация, $E = (E_1 + E_2)/2$, E_1 и E_2 — модули упругости при растяжении и сжатии среды соответственно, $\gamma = (E_2 - E_1)/(E_1 + E_2)$ — параметр разномодульной нелинейности ($|\gamma| \ll 1$), $C_0 = (E/\rho)^{1/2}$ — фазовая скорость низкочастотной волны, ρ — плотность среды, τ_0 — время релаксации, $0 < m = 2\,(C_\infty - C_0)/C_0 \ll 1$ — безразмерный параметр, определяющий диссипацию и дисперсию среды, $C_\infty = C(\omega \to \infty) = C_0\,(1 + m/2) > C_0$ — скорость высокочастотной волны. Для определённости мы будем полагать, что $\gamma < 0$.

* nazarov@hydro.appl.sci-nnov.ru

Из уравнения (1) и уравнения движения следует нелинейное эволюционное уравнение для волн, бегущих в положительном направлении оси x [1]:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = -\frac{\gamma}{2C_0}\frac{\partial |\varepsilon|}{\partial \tau} + \frac{m}{2C_0}\frac{\partial}{\partial \tau}\int\limits_{-\infty}^{\tau}\frac{\partial \varepsilon}{\partial t'}\exp\left(-\frac{\tau-\tau'}{\tau_0}\right)\mathrm{d}\tau', \tag{2}$$

где $\tau = t - x/C_0$. Граничное условие зададим в виде $\varepsilon(x=0,t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t)$. Вводя безразмерные переменные $e = \varepsilon/\varepsilon_0$, $\theta = \Omega\tau$ и $z = x\gamma\omega/(2C_0)$, получим

$$\frac{\partial e}{\partial z} = -\frac{\partial |e|}{\partial \theta} + h\frac{\partial}{\partial \theta}\int\limits_{-\infty}^{\theta}\frac{\partial e(\theta', z)}{\partial \theta'}\exp[-\mu\,(\theta-\theta')]\,\mathrm{d}\theta', \tag{3}$$

где $e(z=0,\theta) = \sin\theta$, $\mu = \Omega/\omega$, $\Omega = \tau_0^{-1}$ — частота релаксации, $h = m/\gamma$ — параметр, характеризующий отношение релаксации к нелинейности.

При распространении в нелинейной среде гармоническая волна будет искажаться и в её спектре возникнут высшие гармоники. Гармоники будут взаимодействовать друг с другом, а соотношения между их амплитудами и фазами будут изменяться [2, 3]. Разномодульная нелинейность и релаксационные дисперсия и диссипация затрудняют учёт этих взаимодействий и возможность получения аналитического и численного решений волнового уравнения (3). При этом закономерности нелинейных волновых процессов, в особенности зависимости амплитуд высших гармоник, возникающих при распространении гармонической волны в нелинейной среде, от амплитуды исходной волны отражают нелинейные свойства среды. Поэтому выявление этих закономерностей очень важно для нелинейной акустической диагностики сред и материалов. Для среды с разномодульной нелинейностью амплитуды высших гармоник первоначально гармонической волны пропорциональны ε_0, в отличие от среды с квадратичной нелинейностью, где, в первом приближении, возникает только вторая гармоника с амплитудой, пропорциональной ε_0^2 [2]. В эксперименте измерение амплитуд высших гармоник проводится при помощи спектроанализатора, поэтому теоретические расчёты искажения первоначально гармонической волны должны приводить к выражениям для амплитуд спектральных компонент нелинейной волны. Приближённые аналитические решения уравнения (3) и соответствующие выражения для амплитуд спектральных компонент нелинейной волны можно получить для низкочастотных и высокочастотных волн.

В низкочастотном приближении ($\mu \gg 1$) уравнение (3) преобразуется к виду

$$\frac{\partial e}{\partial z} = -\frac{\partial |e|}{\partial \theta} + h\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 e}{\partial \theta^2} - \frac{1}{\mu^2}\frac{\partial^2 e}{\partial \theta^2}\right). \tag{4}$$

Это уравнение является аналогом уравнения Кортевега де Вриза—Бюргерса для среды с квадратичной нелинейностью и линейными диссипацией и дисперсией [2, 3]. Решая его методом возмущений, при $z \ll 1$ и $hz/\mu^2 \ll 1$ получим

$$e(\theta, z) = \left(1 - \frac{hz}{\mu}\right)\sin(\theta + hz/\mu^2) - \frac{8z}{3\pi}\sin[2\,(\theta + hz/\mu^2)] - \frac{16z}{15\pi}\sin[4\,(\theta + hz/\mu^2)] + \ldots\,. \tag{5}$$

В этом приближении дисперсия фазовой скорости не проявляется, и волна с основной частотой затухает как в среде с вязкой диссипацией ($1 - hz/\mu \approx \exp(-hz/\mu) = \exp[-m\omega^2 x/(2\Omega C_0)]$). При этом в среде генерируются чётные гармоники, они распространяются с низкочастотной скоростью $C_0\,[1 + m/(2\mu^2)] \approx C_0$, их амплитуды пропорциональны $\gamma\varepsilon_0 x$.

В высокочастотном приближении ($\mu \ll 1$) уравнение (3) имеет вид

$$\frac{\partial e}{\partial z} = -\frac{\partial |e|}{\partial \theta'} - \mu h e, \tag{6}$$

где $\theta' = \theta + hz$. В этом приближении дисперсия среды также не проявляется, волна распространяется с высокочастотной скоростью $C_\infty = C_0\,(1+m/2) > C_0$, а релаксационное затухание волны не зависит от её частоты и определяется множителем $\exp(-\mu h z) = \exp[-m\Omega x/(2\Omega C_0)]$. Точное решение уравнения (6) для одного периода волны имеет вид

$$e(z,\theta') = \exp(-\mu h z)\begin{cases} 0, & 0 \le \theta' \le z; \\ \sin(\theta' - z), & z \le \theta' \le \pi + z; \\ \sin(\theta' + z), & \pi - z \le \theta' \le 2\pi - z; \\ 0, & 2\pi - z \le \theta' \le 2\pi. \end{cases} \tag{7}$$

Как следует из выражения (7), при распространении первоначально гармонической волны в ней при $z > 0$ вблизи точек $\theta' = \pi + 2\pi n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ (при $\gamma > 0$) возникают неоднозначности, которые устраняются введением в её профиль разрывов в этих точках [4] (см. рис. 1). Амплитуда разрывов равна $e_S(z) = \exp(-\mu h z)\sin z$ (при $\gamma < 0$ неоднозначности возникают вблизи точек $\theta' = z$). В результате волна $e(z,\theta')$ затухает не только из-за поглощения, независящего от частоты, но и за счёт нелинейных потерь на разрыве, причём из-за последних волна затухает «до нуля» на конечном расстоянии $z_0 = \pi$. Таким образом, здесь, как и в среде с квадратичной нелинейностью (и релаксацией) [2, 3], постоянство коэффициента затухания (т. е. его независимость от частоты) не предотвращает образования неоднозначностей в профиле высокочастотной волны. Для их предотвращения необходимо введение в уравнение состояния (1) вязкого диссипативного слагаемого $\alpha\rho\dot{\varepsilon}$ (α — коэффициент вязкой диссипации) [1]. В этом случае при $\alpha \to 0$ форма волны $e(z,\theta')$ будет определяться выражением

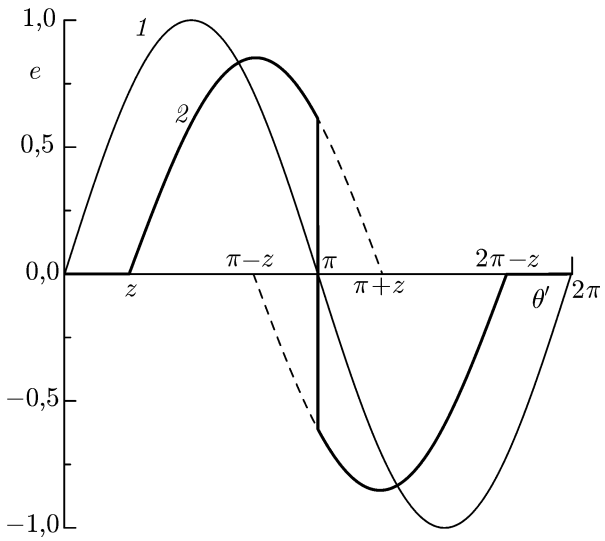

Рис. 1. Эволюция формы одного периода высокочастотной синусоидальной волны: профиль синусоидальной волны при $z = 0$ (кривая *1*) и профиль волны при $z > 0$ (кривая *2*)

$$e(z,\theta') = \exp(-\mu h z)\begin{cases} 0, & 0 \le \theta' \le z; \\ \sin(\theta' - z), & z \le \theta' \le \pi; \\ \sin(\theta' + z), & \pi \le \theta' \le 2\pi - z; \\ 0, & 2\pi - z \le \theta' \le 2\pi. \end{cases} \tag{8}$$

Спектральное представление разрывной волны (8) имеет вид

$$e(z,\theta') = \exp(-\mu h z)\Big\{\Big[\cos z - \frac{1}{\pi}\,(z\cos z - \sin z)\Big]\sin\theta' + \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n\sin z + (-1)^n \sin nz}{n^2-1}\sin(n\theta')\Big\}. \tag{9}$$

Из выражения (9) следует, что с увеличением z амплитуда первой гармоники уменьшается, а амплитуды высших гармоник пропорциональны ε_0, вначале они растут, затем достигают максимумов и потом также уменьшаются.

Для волн с промежуточными частотами ($\omega \approx \Omega$, $\mu \approx 1$) уравнение (3) можно решить численно. Отметим, однако, что предложенный ниже метод численного решения уравнения (3) применим, когда в профиле волны нет неоднозначностей. Анализ формы самоподобной периодической волны в однородной среде с разномодульной нелинейностью и релаксацией [1] показывает, что при $h = m/\gamma \geq 1$ и $\mu = \Omega/\omega \geq 1$ неоднозначностей в волне не образуется. Следовательно, предложенный метод расчёта формы нелинейной волны работает при $h \geq 1$ и $\mu \geq 1$.

2. СХЕМА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Численное решение уравнения (3) для первоначально гармонической волны $e(z=0,\theta) = \sin\theta$ мы будем так же, как и в работах [5–8], искать спектральным методом, полагая, что

$$e(z,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty}[a_n(z)\cos(n\theta) + b_n\sin(n\theta)] = \sum_{n=1}^{\infty} e_n(z)\sin[n\theta + \Psi_n(z)], \tag{10}$$

где

$$a_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e(\theta,z)\cos(n\theta)\,\mathrm{d}\theta, \qquad b_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e(\theta,z)\sin(n\theta)\,\mathrm{d}\theta, \qquad a_0(z) = 0,$$

$$e_n(z) = [a_n^2(z) + b_n^2(z)]^{1/2}, \qquad \mathrm{tg}\,\Psi_n(z) = a_n(z)/b_n(z).$$

Здесь, из-за неаналитического вида разномодульной нелинейности и наличия дисперсии, спектральный метод расчёта является более предпочтительным, чем метод конечных разностей [6, 7].

Из выражения (10) следует, что локальная фазовая скорость $C(n\omega,z)$ гармонической составляющей волны $e(\theta,z)$ на частоте $n\omega$ определяется величиной $(1/n)\,\mathrm{d}\Psi_n(z)/\,\mathrm{d}z$:

$$C(n\omega,z) = \frac{C_0}{1 - \gamma/(2n)\,\mathrm{d}\Psi_n(z)/\,\mathrm{d}z}, \qquad \frac{\Delta C(n\omega,z)}{C_0} = \frac{C(n\omega,z) - C_0}{C_0} \approx \frac{\gamma}{2n}\,\frac{\mathrm{d}\Psi_n(z)}{\mathrm{d}z}. \tag{11}$$

При этом, вообще говоря, функции $\Psi_n(z)/n$, $\mathrm{C}(n\omega,z)$ и $\Delta C(n\omega,z)$ зависят от частоты $n\omega$, от параметра $h = m/\gamma$ и расстояния z. Таким образом, в среде с разномодульной нелинейностью и релаксацией могут проявляться эффекты нелинейной дисперсии, а дисперсия фазовой скорости $\mathrm{C}(n\omega,z)$ определяет эффективность генерации и взаимодействия гармонических составляющих нелинейной волны $e(z,\theta)$.

Отметим, что спектральный метод расчёта волны хорошо работает для сред с квадратичной (аналитической) нелинейностью, но для среды с разномодульной (неаналитической) нелинейностью и дисперсией его прямое применение невозможно. Вследствие того, что нелинейное слагаемое в уравнении (3) является неаналитическим, схема численного решения этого уравнения, основанная на простой подстановке ряда (10) в уравнение (3), применена быть не может. Это связано с тем, что при разложении неаналитической периодической функции $f[e(z,\theta)] = |e(z,\theta)|$ в ряд Фурье по $\sin(n\theta)$ и $\cos(n\theta)$ не удаётся установить связь коэффициентов этого ряда с коэффициентами $a_n(z)$ и $b_n(z)$ ряда (10). Для решения этой проблемы поступим следующим образом.

Периодически продолжим чётную функцию $f[e(z,\theta)] = |e(z,\theta)| \le p(z) \le 1$ по $e(z,\theta)$ с периодом $T = 2p(z)$ и представим её в виде ряда Фурье по $\cos[\pi\,(2m+1)e(z,\theta)/p(z)]$:

$$|e(z,\theta)| = p(z)\left\{\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos[\pi\,(2m+1)\,e(z,\theta)/p(z)]}{(2m+1)^2}\right\}. \tag{12}$$

Здесь $p(z)$ — некоторая функция от z, удовлетворяющая условию $p(z) \ge \max|e(z,\theta)|$ при $-\pi < \theta < \pi$.

Рассмотрим две вспомогательные периодические функции: $\cos[\pi\,(2m+1)e(z,\theta)/p(z)]$ и $\sin[(2m+1)\,e(z,\theta)/p(z)]$. Разложим их в ряды Фурье по θ:

$$\cos[(2m+1)e(z,\theta)/p(z)] = D_0^m(z) + \sum_{n=1}^{\infty}[C_n^m(z)\sin(n\theta) + D_n^m(z)\cos(n\theta)], \tag{13}$$

$$\sin[(2m+1)e(z,\theta)/p(z)] = B_0^m(z) + \sum_{n=1}^{\infty}[A_n^m(z)\sin(n\theta) + B_n^m(z)\cos(n\theta)], \tag{14}$$

где $D_0^m(z)$, $C_n^m(z)$, $D_n^m(z)$ и $B_0^m(z)$, $A_n^m(z)$, $B_n^m(z)$ — коэффициенты этих рядов. Подставляя выражение (13) в уравнение (12), получим:

$$|e(z,\theta)| = N_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty}[M_n(z)\sin(n\theta) + N_n(z)\cos(n\theta)], \tag{15}$$

где

$$N_0(z) = \frac{p(z)}{2} - \frac{4p(z)}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{D_0^m(z)}{(2m+1)^2}, \qquad M_n(z) = -\frac{4p(z)}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{C_n^m(z)}{(2m+1)^2},$$

$$N_n(z) = -\frac{4p(z)}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{D_n^m(z)}{(2m+1)^2}.$$

Подставляя выражения (10) и (15) в уравнение (3), получим систему связанных уравнений для амплитуд $a_n(z)$ и $b_n(z)$ ряда (10):

$$\frac{\mathrm{d}a_n}{\mathrm{d}z} = \frac{4n}{\pi}N_n(z) + \frac{hn^3}{\mu^2+n^2}b_n - \frac{h\mu n^2}{\mu^2+n^2}a_n, \tag{16}$$

$$\frac{\mathrm{d}b_n}{\mathrm{d}z} = -\frac{4n}{\pi}M_n(z) - \frac{h\mu n^2}{\mu^2+n^2}b_n - \frac{hn^3}{\mu^2+n^2}a_n. \tag{17}$$

Далее рассмотрим два очевидных тождества

$$\frac{\partial}{\partial z}\cos[(2m+1)\,e(z,\theta)/p(z)] = -(2m+1)\,\sin[(2m+1)\,e(z,\theta)/p(z)]\,\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{e(z,\theta)}{p(z)}\right], \tag{18}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\sin[(2m+1)\,e(z,\theta)/p(z)] = (2m+1)\,\cos[(2m+1)\,e(z,\theta)/p(z)]\,\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{e(z,\theta)}{p(z)}\right]. \tag{19}$$

Подставляя в левую часть тождества (18) выражение (13), а в его правую часть — выражения (10) и (14), получим связь коэффициентов $C_n^m(z)$ и $D_n^m(z)$ с коэффициентами $A_k^m(z)$ и $B_k^m(z)$:

$$\frac{\mathrm{d}D_0^m(z)}{\mathrm{d}z} = -\frac{2m+1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{A_k^m(z)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{b_k(z)}{p(z)}\right] + B_k^m(z)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{a_k(z)}{p(z)}\right]\right\}, \tag{20}$$

$$\frac{\mathrm{d}C_n^m(z)}{\mathrm{d}z} = -\frac{2m+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left\{A_k^m(z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{a_{n-k}(z)}{p(z)}\right] + B_k^m(z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{b_{n-k}(z)}{p(z)}\right]\right\} -$$
$$-\frac{2m+1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{A_{k+n}^m(z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{a_k(z)}{p(z)}\right] + B_k^m(z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{b_{n+k}(z)}{p(z)}\right]\right\} +$$
$$+\frac{2m+1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{A_k^m(z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{a_{k+n}(z)}{p(z)}\right] + B_{n+k}^m(z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{b_k(z)}{p(z)}\right]\right\}, \quad (21)$$

$$\frac{\mathrm{d}D_n^m(z)}{\mathrm{d}z} = -\frac{2m+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left\{-A_k^m(z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{b_{n-k}(z)}{p(z)}\right] + B_k^m(z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{a_{n-k}(z)}{p(z)}\right]\right\} -$$
$$-\frac{2m+1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{A_k^m(z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{b_{n+k}(z)}{p(z)}\right] + B_k^m(z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{a_{n+k}(z)}{p(z)}\right]\right\} -$$
$$-\frac{2m+1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{A_{k+n}^m(z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{b_n(z)}{p(z)}\right] + B_{k+n}^m(z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{a_n(z)}{p(z)}\right]\right\}, \qquad n \geq 1. \quad (22)$$

Подставляя в левую часть тождества (19) выражение (14), а в его правую часть — выражения (10) и (13), получим аналогичную связь коэффициентов $A_n^m(z)$ и $B_n^m(z)$ с коэффициентами $C_k^m(z)$ и $D_k^m(z)$:

$$\frac{\mathrm{d}B_0^m(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{2m+1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{C_n^m(z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{b_n(z)}{p(z)}\right] + D_n^m(z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{a_n(z)}{p(z)}\right]\right\}, \quad (23)$$

$$\frac{\mathrm{d}A_n^m(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{2m+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left\{C_k^m(z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{a_{n-k}(z)}{p(z)}\right] + D_k^m(z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{b_{n-k}(z)}{p(z)}\right]\right\} +$$
$$+\frac{2m+1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{C_{k+n}^m(z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{a_k(z)}{p(z)}\right] + D_k^m(z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{b_{n+k}(z)}{p(z)}\right]\right\} -$$
$$-\frac{2m+1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{C_k^m(z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{a_{k+n}(z)}{p(z)}\right] + D_{n+k}^m(z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{b_k(z)}{p(z)}\right]\right\}, \quad (24)$$

$$\frac{\mathrm{d}B_n^m(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{2m+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left\{-C_k^m(z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{b_{n-k}(z)}{p(z)}\right] + D_k^m(z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{a_{n-k}(z)}{p(z)}\right]\right\} +$$
$$+\frac{2m+1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{C_k^m(z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{b_{n+k}(z)}{p(z)}\right] + D_k^m(z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{a_{n+k}(z)}{p(z)}\right]\right\} +$$
$$+\frac{2m+1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{C_{k+n}^m(z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{b_n(z)}{p(z)}\right] + D_{k+n}^m(z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{a_n(z)}{p(z)}\right]\right\}, \quad n \geq 1. \quad (25)$$

Уравнения (15)–(17) и (20)–(25) представляют собой полную систему дифференциальных уравнений для нахождения коэффициентов $a_n(z)$ и $b_n(z)$ ряда Фурье (10) и для определения профиля нелинейной волны $e = e(z,\theta)$ на расстоянии z. При численном решении задачи общее число этих уравнений определяется точностью вычислений, т. е. количеством гармоник, или коэффициентов

Фурье, в рядах (10) и (12), т. е. максимальными значениями чисел m и n, необходимыми для достижения заданной точности. В такой схеме относительная погрешность вычисления $|e(z,\theta)|$ по формуле (12) определяется выражением

$$s(z,R)=\frac{4}{\pi^2}\left|\sum_{m=R+1}^{\infty}\frac{\cos[\pi\,(2m+1)\,e(z,\theta)/p(z)]}{(2m+1)^2}\right|\frac{p(z)}{\max\limits_{-\pi<\theta<\pi}|e(z,\theta)|}\le\frac{4}{\pi^2}\,\frac{p(z)}{\max\limits_{-\pi<\theta<\pi}|e(z,\theta)|}\sum_{m=R+1}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}\,,$$

где R — число членов ряда (12), учитываемых при численном моделировании.

Из этого выражения видно, что для уменьшения погрешности $s(z,R)$ нужно, чтобы функция $p=p(z)$ было как можно ближе к амплитуде волны $e(z,\theta)$. При первой итерации расчётов, естественно, следует положить $p(z)=p(0)=1$ и определить амплитуду волны $e(z,\theta)$, т. е. $\max|e(z,\theta)|$, которая по мере распространения волны, уменьшается. Затем, при второй итерации, при уточнённом вычислении волны $e(z,\theta)$, функцию $p(z)$ нужно положить равной найденной амплитуде $\max|e(z,\theta)|$. Таким образом, функцию $p(z)$ нужно «подстраивать» под амплитуду волны $e(z,\theta)$, при этом погрешность счёта будет практически постоянной и можно рассчитывать форму волны $e(z,\theta)$ на больших расстояниях z с высокой точностью. В проведённых ниже расчётах $\max n=200$, $R=50$, так что максимальная относительная ошибка $s(z,R)$ составляет $2\cdot10^{-3}$.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

В данном разделе приведены результаты численного моделирования профилей первоначально гармонических относительно низкочастотных волн на различных расстояниях z, а также закономерности генерации их высших гармоник. На рис. 2 показана эволюция низкочастотной волны при $\mu=10$ и $h=2$. Видно, что с ростом расстояния z волна искажается и затухает, при этом её нулевые точки почти не смещаются. Последнее связано со слабой дисперсией низкочастотных волн в релаксирующей среде. При $z>2$ форма волны практически не изменяется, что свидетельствует о формировании самоподобной волны [1, 9], не изменяющей своей формы при

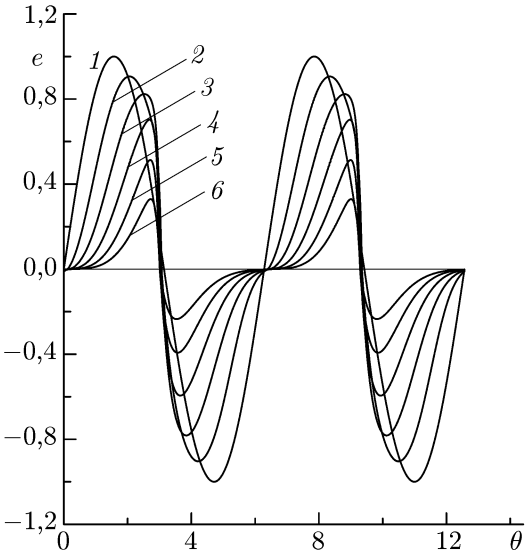

Рис. 2. Эволюция первоначально гармонической волны при $\mu=10$ и $h=2$: $z=0$ (кривая *1*), $z=0{,}5$ (*2*), $z=1$ (*3*), $z=1{,}5$ (*4*), $z=2$ (*5*), $z=2{,}5$ (*6*)

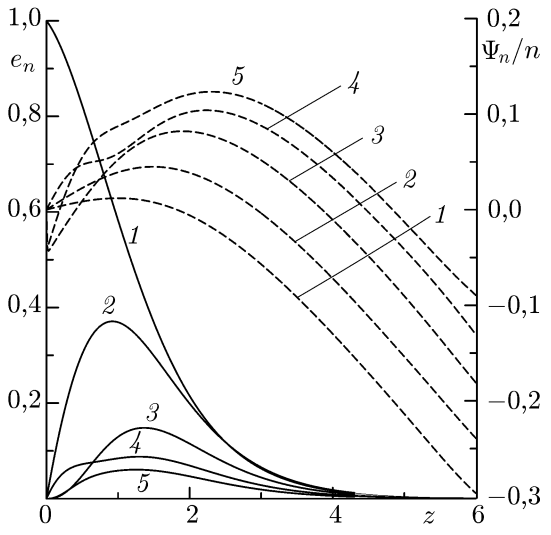

Рис. 3. Зависимости амплитуд (сплошные линии) и фаз (пунктирные линии) первых пяти гармоник первоначально гармонической волны от расстояния z при $\mu=10$ и $h=2$

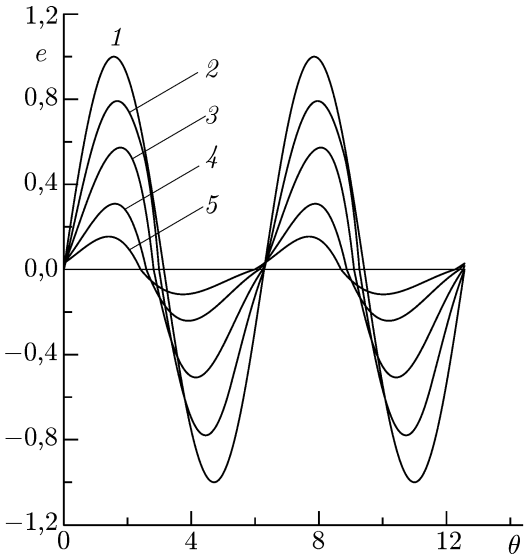

Рис. 4. Эволюция первоначально гармонической волны при $\mu = 3$ и $h = 4$: $z = 0$ (кривая *1*), $z = 0{,}2$ (*2*), $z = 0{,}5$ (*3*), $z = 1$ (*4*), $z = 1{,}5$ (*5*)

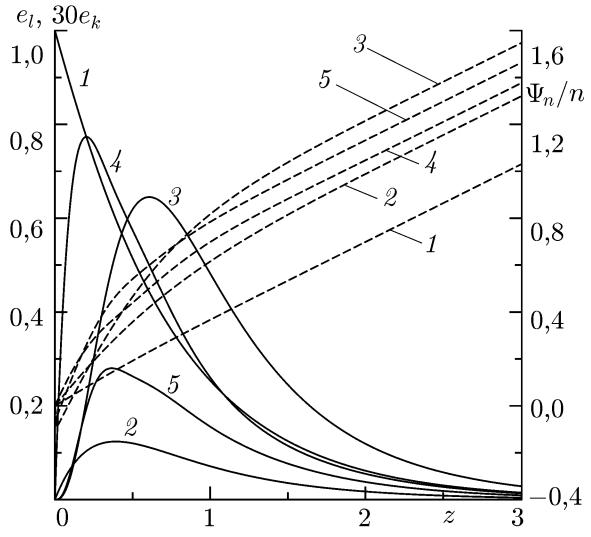

Рис. 5. Зависимости амплитуд (сплошные линии) и фаз (пунктирные линии) первых пяти гармоник первоначально гармонической волны от расстояния z при $\mu = 3$ и $h = 4$. Номер кривой соответствует номеру гармоники, $l = 1, 2$, $k = 3, 4, 5$

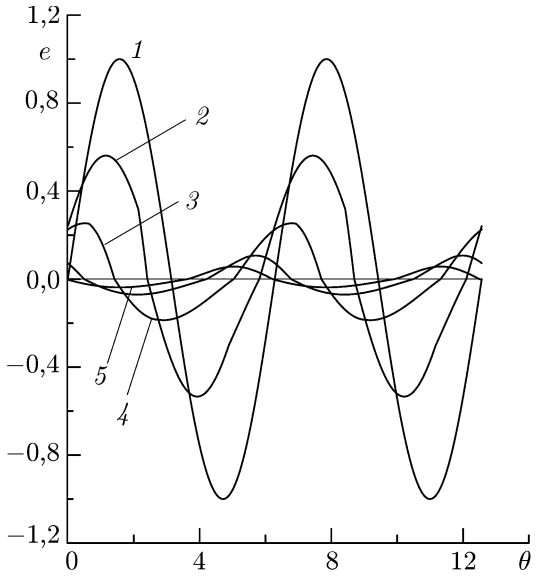

Рис. 6. Эволюция первоначально гармонической волны при $\mu = 1$ и $h = 6$: $z = 0$ (кривая *1*), $z = 0{,}2$ (*2*), $z = 0{,}5$ (*3*), $z = 0{,}8$ (*4*), $z = 1$ (*5*)

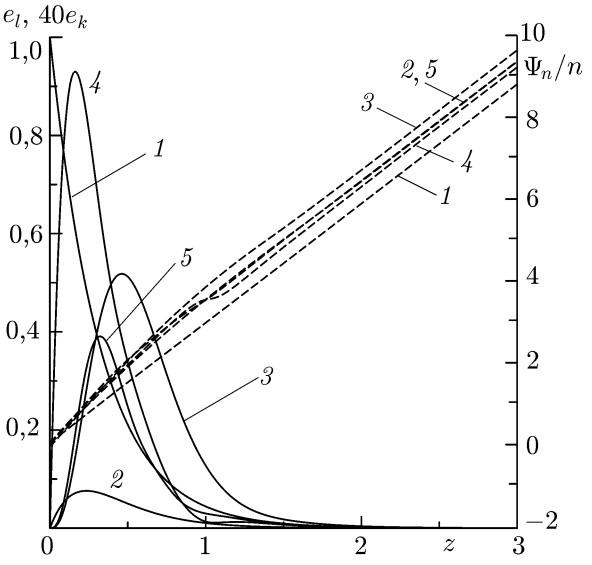

Рис. 7. Зависимости амплитуд (сплошные линии) и фаз (пунктирные линии) первых пяти гармоник первоначально гармонической волны от расстояния z при $\mu = 1$ и $h = 6$. Номер кривой соответствует номеру гармоники, $l = 1, 2$, $k = 3, 4, 5$

распространении. Неизменность формы такой волны обеспечивается балансом эффектов нелинейности и релаксации: разномодульная нелинейность увеличивает крутизну фронта волны, а релаксационные диссипация и дисперсия стремятся её уменьшить. На рис. 3 приведены зависимости амплитуд $e_n(z)$ и пропорциональных фазам величин $\Psi_n(z)/n$ для первых пяти гармоник низкочастотной волны от расстояния z. Видно, что с увеличением z амплитуда первой гармони-

ки уменьшается, а амплитуды высших гармоник вначале растут, достигают максимумов и затем также уменьшаются, при этом вначале генерируются чётные гармоники, а затем — нечётные. На малых расстояниях $z \leq 2$ фазы гармоник изменяются по-разному, а при $z > 3$ все они линейно зависят от z, так что $(1/n)\,\mathrm{d}\Psi_n(z)/\,\mathrm{d}z = \mathrm{const} < 0$. Это соответствует распространению сформировавшейся самоподобной волны [1, 9]: её гармоники, согласно выражению (11), распространяются с одинаковой скоростью $C(n\omega, z) = \mathrm{const}$, так что форма волны $e(z, \theta)$ не зависит от z, несмотря на то, что волна затухает. При повышении частоты затухание и дисперсия фазовой скорости возрастают, волна затухает сильнее (см. рис. 4) и имеет место заметный сдвиг нулевых точек. При этом форма волны также стремится к самоподобной [1]. При $\mu = 3$ и $h = 4$ (см. рис. 5) амплитуды и фазы высших гармоник качественно ведут себя также, как и при $\mu = 10$ и $h = 2$, но амплитуды гармоник существенно меньше, а $(1/n)\,\mathrm{d}\Psi_n(z)/\,\mathrm{d}z = \mathrm{const} > 0$.

Аналогичные закономерности проявляются и при распространении волн с более высокими частотами (например, при $\mu = 1$ и $h = 6$, см. рис. 6 и 7). Из рис. 2–7 следует, что для сформировавшихся самоподобных волн с разными частотами значения скоростей $C(n\omega, z)$ различны: при $\mu = 10$, $h = 2$ величина $\Delta C(n\omega, z)/C_0 = -3{,}8 \cdot 10^{-2}\gamma$; при $\mu = 3$, $h = 4$ имеем $\Delta C(n\omega, z)/C_0 = 1{,}5 \cdot 10^{-2}\gamma$; при $\mu = 1$, $h = 6$ получаем $\Delta C(n\omega, z)/C_0 = 1{,}5 \cdot 10^{-1}\gamma$. Это свидетельствует о том, что для сформировавшихся самоподобных волн в среде с разномодульной нелинейностью и релаксацией проявляется нелинейная дисперсия, т. е. имеет место зависимость фазовой скорости гармонических составляющих самоподобной волны от её частоты и от параметра разномодульной нелинейности среды.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе приведены результаты исследования распространения и эволюции первоначально гармонических волн в однородных средах с разномодульной нелинейностью и релаксацией. Они состоят в следующем.

1) Получены аналитические выражения для спектров первоначально гармонических низкочастотных и высокочастотных волн.

2) Предложена схема численного решения нелинейного эволюционного волнового уравнения.

3) Получены численные решения для профилей и спектральных характеристик относительно низкочастотных нелинейных волн.

4) Показано, что на достаточно больши́х расстояниях первоначально гармонические низкочастотные волны становятся близкими к самоподобным.

5) Показано, что такие среды обладают нелинейной дисперсией, т. е. имеет место зависимость фазовой скорости гармонических составляющих самоподобной волны от её частоты и от параметра разномодульной нелинейности среды.

Полученные результаты могут быть использованы для развития нелинейных методов акустической диагностики разномодульных сред с релаксацией.

Авторы благодарят Е. А. Шеронова за интерес к работе и полезные дискуссии. Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15–05–05143 а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Назаров В. Е., Кияшко С. Б., Радостин А. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 2014. Т. 58, № 2. С. 134.

2. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 288 с.
3. Руденко О. В. // Акуст. журн. 2014. Т. 60, № 4. С. 368.
4. Назаров В. Е., Островский Л. А. // Акуст. журн. 1990. Т. 36, № 1. С. 106.
5. Fenlon F. N. // J. Acoust. Soc. Am. 1971. V. 50, No. 5. P. 1 299.
6. Васильева О. А., Карабутов А. А., Лапшин Е. А., Руденко О. В. Взаимодействие одномерных волн в средах без дисперсии. М.: Изд-во МГУ, 1983. 152 с.
7. Бахвалов Н. С., Жилейкин Я. М., Заболотская Е. А. Нелинейная теория звуковых пучков. М.: Наука, 1982. 176 с.
8. Пищальников Ю. А., Сапожников О. А., Хохлова В. А. // Акуст. журн. 1996. Т. 42, № 3. С. 412.
9. Radostin A. V., Nazarov V. E., Kiyashko S. B. // Wave Motion. 2013. V. 50, No. 2. P. 191.

Поступила в редакцию 5 ноября 2014 г.; принята в печать 17 сентября 2015 г.

EVOLUTION OF ACOUSTIC WAVES IN HOMOGENEOUS MEDIA WITH DIFFERENT-MODULUS NONLINEARITY AND RELAXATION

V. E. Nazarov, S. B. Kiyashko, and A. V. Radostin

The results of analytical and numerical studies of propagation and evolution of the initially harmonic acoustic waves in homogeneous media with different-modulus nonlinearity and relaxation are presented. The solutions for the profiles of nonlinear waves and their spectral characteristics are obtained.