

УДК 538.566.2+621.372.8

## ДИФРАКЦИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ НА ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ ЦИЛИНДРЕ ИЗ МЕТАМАТЕРИАЛА

А. П. Анютин, И. П. Коршунов\*, А. Д. Шатров

Институт радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, г. Фрязино, Россия

В двумерной геометрии рассматриваются свойства электромагнитных полей, возбуждаемых нитевидным источником, расположенным вблизи поверхности эллиптического цилиндра. Цилиндр состоит из метаматериала, диэлектрическая и магнитная проницаемости которого равны минус единице. Исследуется влияние формы цилиндра и места расположения источника на эффекты субволновой локализации и нерезонансного усиления поля.

### ВВЕДЕНИЕ

В последние годы интенсивно развивается электродинамика искусственных сред, у которых относительные диэлектрическая,  $\epsilon$ , и магнитная,  $\mu$ , проницаемости являются отрицательными величинами. Первые теоретические исследования радиофизических свойств данных сред были выполнены В. Г. Веселаго [1]. В настоящее время такие искусственные среды принято называть метаматериалами [2]. Весьма велико и продолжает лавинообразно нарастать количество работ, посвящённых изучению разнообразных эффектов при взаимодействии электромагнитных волн с телами из метаматериалов (см. обзоры [3–5]).

Следует отметить, что природных материалов с проницаемостями  $\epsilon < 0$  и  $\mu < 0$  нет. Способы создания метаматериалов в микроволновом диапазоне длин волн изложены в обзоре [5]. Магнетизм метаматериалов обеспечивается резонансными свойствами формирующих их проводящих элементов. В качестве элементарных рассеивателей наибольшее распространение получили кольцевые резонаторы, состоящие из двух концентрических планарных колец с противолежащими по диаметру разрывами [6]. Регулярную решётку из таких элементов можно рассматривать как непрерывную среду при условии, что их размер и расстояние между ними много меньше длины волны. На частотах, несколько превышающих резонансную частоту, магнитная проницаемость такой искусственной среды становится отрицательной. Комбинация решётки разомкнутых кольцевых резонаторов и решётки проволочных диполей позволяет получить среду с проницаемостями  $\epsilon < 0$  и  $\mu < 0$  [7, 8]. В частности, подбором параметров таких решёток можно добиться на заданной частоте выполнения условия  $\epsilon = \mu = -1$ .

Электромагнитные поля источников, расположенных вблизи границ тел, состоящих из метаматериала с  $\epsilon = \mu = -1$ , обладают необычными свойствами [9]. Так, в работе [10] показано, что в задаче дифракции цилиндрической волны на пластине с бесконечной шириной при  $\epsilon \rightarrow -1$  и  $\mu \rightarrow -1$  поле всюду неограниченно возрастает. В работе [11] исследованы поля, возникающие при возбуждении нитевидным источником кругового цилиндра из материала с проницаемостями  $\epsilon = \mu = -1$ . При этом был обнаружен эффект субволновой локализации поля на поверхности цилиндра. Других работ по дифракции электромагнитного излучения на телах конечных размеров из материала с такими параметрами авторам не известно.

В данной статье рассматривается задача дифракции цилиндрической волны на эллиптическом цилиндре из материала с параметрами  $\epsilon = \mu = -1$  при различных соотношениях между

---

\* korip@ms.ire.rssi.ru

полуосями эллипса  $a$ ,  $b$  и различных положениях источника. Исследуется эволюция полей при переходе от кругового цилиндра ( $a = b$ ) к случаю  $a \gg b$ , который приближённо соответствует плоской пластине с конечной шириной. Обсуждаются эффекты субволновой локализации и нерезонансного усиления поля.

## 1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД ЕЁ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим двумерную задачу возбуждения нитевидным источником эллиптического цилиндра. Внутренний объём цилиндра заполнен метаматериалом с параметрами

$$\varepsilon = \mu = -1. \quad (1)$$

Будем считать, что зависимость электромагнитного поля от времени определяется множителем  $\exp(i\omega t)$ . Используем цилиндрическую систему координат  $r, \varphi, z$ . В ней сечение эллиптического цилиндра описывается уравнением

$$r = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}}, \quad (2)$$

где  $a$  и  $b$  — полуоси эллипса. Предположим, что

источник расположен вне цилиндра (рис. 1) в точке с координатами  $(r_0, \varphi_0)$ .

Будем изучать случай ТМ-поляризации, когда в электромагнитном поле присутствуют компоненты  $H_z(r, \varphi)$ ,  $E_r(r, \varphi)$  и  $E_\varphi(r, \varphi)$ . Тогда задача дифракции сводится к нахождению скалярной функции  $U(r, \varphi) = H_z(r, \varphi)$ , которая должна удовлетворять неоднородному уравнению Гельмгольца

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + k^2 \right) U(r, \varphi) = -\frac{4i}{r} \delta(r - r_0) \delta(\varphi - \varphi_0), \quad (3)$$

где  $k$  — волновое число в свободном пространстве,  $\delta$  — дельта-функция. На границе цилиндра должны выполняться условия

$$U^+ = U^-, \quad \frac{\partial U^+}{\partial N} = -\frac{\partial U^-}{\partial N}, \quad (4)$$

где  $N$  — координата вдоль внешней нормали к поверхности эллиптического цилиндра, а величины  $U^+$  и  $U^-$  соответствуют значениям функции  $U$  на внутренней и внешней сторонах поверхности цилиндра.

Поле  $U(r, \varphi)$  должно также удовлетворять условию излучения, т. е. иметь при  $kr \rightarrow \infty$  вид

$$U(r, \varphi) = \sqrt{2/(\pi kr)} \Phi(\varphi) \exp(-ikr + i\pi/4), \quad (5)$$

где  $\Phi(\varphi)$  — диаграмма направленности.

Первичное поле расходящейся цилиндрической волны является решением уравнения (3), удовлетворяет граничным условиям  $U^+ = U^-$  и  $\partial U^+/\partial N = \partial U^-/\partial N$  и определяется формулой

$$U^0(r, \varphi) = H_0^{(2)} \left[ k \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)} \right], \quad (6)$$

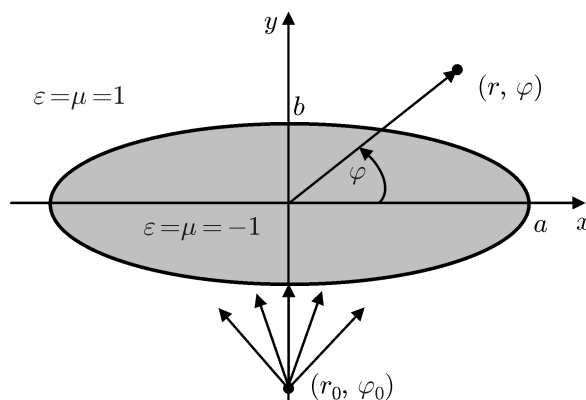


Рис. 1. Сечение эллиптического цилиндра из метаматериала, положение источника и точки наблюдения

где  $H_0^{(2)}(x)$  — функция Ганкеля нулевого порядка. Диаграмма направленности поля  $U^0(r, \varphi)$  имеет вид

$$\Phi^0(\varphi) = \exp[ikr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)]. \quad (7)$$

Полное поле вне цилиндра может быть представлено в виде суммы первичного  $U^0$  и рассеянного  $U^{(s)}$  полей:

$$U(r, \varphi) = U^0(r, \varphi) + U^{(s)}(r, \varphi). \quad (8)$$

Для получения численного решения граничной задачи (3)–(5) мы воспользуемся модифицированным методом дискретных источников [12, 13], который позволяет найти его с контролируемой точностью. При этом вспомогательные контуры будем выбирать в соответствии с результатами работ [9–14]. Точность решения задачи контролируется невязкой граничных условий в точках, где они выполняются наихудшим образом. В приведённых ниже расчётах невязка граничных условий была меньше  $10^{-3}$ .

Модифицированный метод дискретных источников для задач с аналогичным контуром рассеивающего тела описан достаточно подробно в работе [14], поэтому мы не будем обсуждать его особенности в рассматриваемом случае.

## 2. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Рассмотрим сначала задачу дифракции цилиндрической волны на эллиптическом цилиндре для случая, когда её источник располагался в точке с координатами  $r_0 = 1,2k^{-1}$  и  $\varphi_0 = -\pi/2$ , т.е. вблизи нижней широкой стороны эллипса (см. рис. 1). Были рассчитаны распределения амплитуд полного поля  $U(l)$  вдоль границ нескольких эллиптических цилиндров для случая, когда малая полуось эллипсов  $b = k^{-1}$ , а большие полуоси принимали значения  $a = 1,25k^{-1}$ ,  $3k^{-1}$  и  $5k^{-1}$ . На рис. 2–4 изображены графики функций  $|U(l)|$  для этих цилиндров. Аргумент  $l$  у функции  $U(l)$  представляет собой длину дуги контура, которая отсчитывается от его пересечения с направлением  $\varphi = 0$ .

Из анализа рис. 2–4 следует, что на большей части контура поле имеет вид стоячей поверхностной волны, у которой частота интерференционных осцилляций увеличивается в областях, где кривизна контура максимальна. Однако на конце короткой полуоси со стороны источника поле сильно увеличивается. При этом расстояние между соседними нулями интерференционной

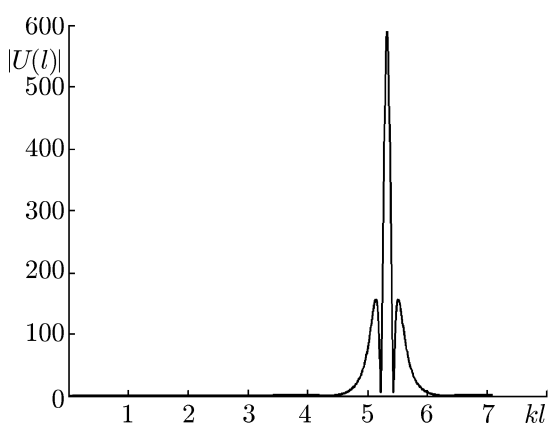


Рис. 2. Распределение модуля амплитуды поля на поверхности эллиптического цилиндра с полуосями  $b = k^{-1}$ ,  $a = 1,25k^{-1}$  для источника в точке  $r_0 = 1,2k^{-1}$ ,  $\varphi_0 = -\pi/2$

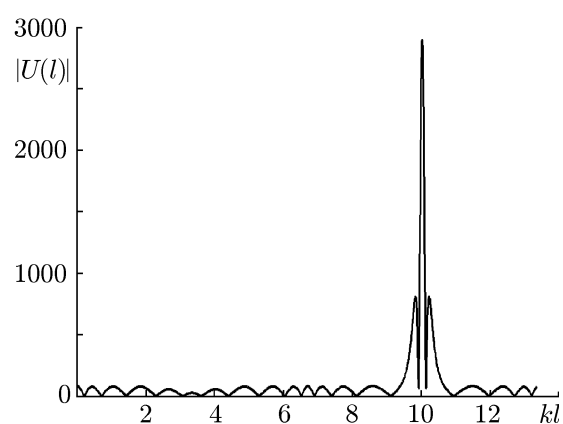


Рис. 3. Распределение модуля амплитуды поля на поверхности эллиптического цилиндра с полуосями  $b = k^{-1}$ ,  $a = 3k^{-1}$  для источника в точке  $r_0 = 1,2k^{-1}$ ,  $\varphi_0 = -\pi/2$

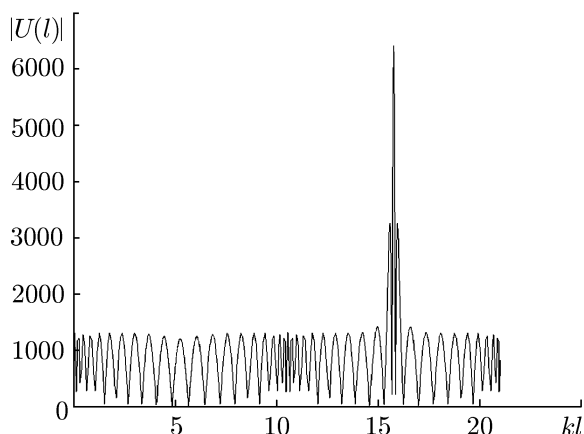


Рис. 4. Распределение модуля амплитуды поля на поверхности эллиптического цилиндра с полуосями  $b = k^{-1}$ ,  $a = 5k^{-1}$  для источника в точке  $r_0 = 1,2k^{-1}$ ,  $\varphi_0 = -\pi/2$

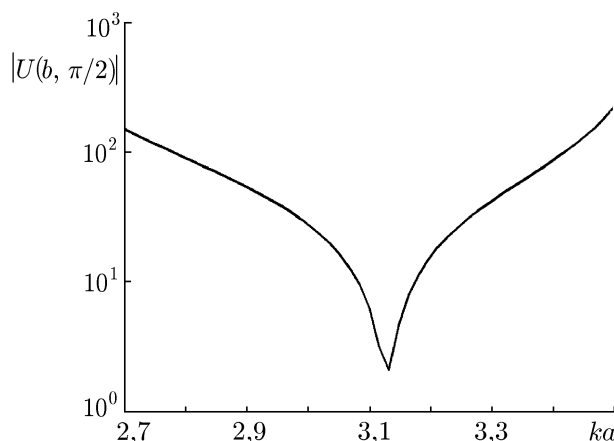


Рис. 5. Зависимость модуля амплитуды поля в точке с координатами  $r = b$  и  $\varphi = \pi/2$  от безразмерной частоты  $ka$  при отношении полуосей  $a/b = 3$  для источника в точке  $r_0 = 1,2b$ ,  $\varphi_0 = -\pi/2$

картины (размер пятна поля на контуре) равно  $4 \cdot 10^{-2} \lambda$ , где  $\lambda = 2\pi/k$  — длина волны в свободном пространстве. В рассматриваемой задаче размер пятна определяется главным образом расстоянием от источника до границы метаматериала.

Амплитуда интерференционных осцилляций практически равна нулю при  $a = 1,25b$  (т. е. когда эллипс мало отличается от окружности, см. рис. 2) и монотонно возрастает с увеличением большей полуоси эллипса  $a$ . Одновременно монотонно возрастает поле в точке своей локализации. Из рис. 4 следует, что амплитуда осцилляций поля на контуре сильно вытянутого эллипса (когда  $a/b = 5$ ) на три порядка превышает величину первичного поля. Такое поведение поля согласуется с результатами работы [10], в которой показано, что задача возбуждения плоского слоя с неограниченными размерами не имеет решения.

На рис. 5 приведена зависимость модуля поля на конце короткой полуоси с азимутом  $\varphi = \pi/2$  от безразмерного параметра  $ka$ , пропорционального частоте. Эта зависимость не содержит высокочастотных резонансов. Этим она принципиально отличается от аналогичных частотных характеристик, рассчитанных в работе [9] для круговых цилиндров из метаматериала с диэлектрической и магнитной проницаемостями, отличными от минус единицы. Частотная характеристика, изображённая на рис. 5, имеет минимум в точке  $ka = 3,13$ . Расчёты показывают, что картины модулей амплитуд полей  $|U(l)|$  для частот, расположенных по разные стороны от точки  $ka = 3,13$ , отличаются числом интерференционных лепестков. Так, на участке контура  $0 < \varphi < \pi$  число осцилляций равно 10 и 9 при  $ka = 3$  и  $3,3$  соответственно.

Таким образом, в рассматриваемом случае ( $\varepsilon = \mu = -1$ ) механизм возникновения больших значений поля на границе метаматериала не связан с высокочастотными резонансами поверхностных волн. Здесь имеет место эффект нерезонансного усиления поля [9], когда его относительно большие значения наблюдаются в широкой полосе частот.

На рис. 6 изображены диаграммы рассеяния на эллиптических цилиндрах с разными эксцентриситетами, когда  $a = 1,25b$  и  $a = 5b$ . В случае  $a = 1,25b$  (форма эллипса близка к окружности) главный максимум диаграммы рассеяния направлен в нижнюю полуплоскость — к источнику — и рассеянное поле практически равномерно засвечивает верхнюю полуплоскость. В случае вытянутого эллипса ( $a = 5b$ ) рассеяние в верхнюю полуплоскость значительно превышает рассеяние в нижнюю полуплоскость. При этом для рассеянного вперёд поля характерно наличие двух

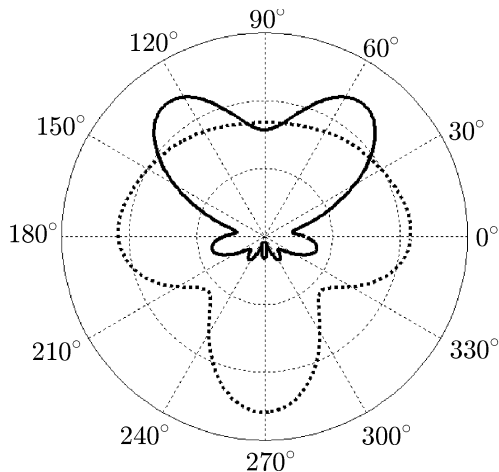


Рис. 6. Диаграммы рассеяния эллиптического цилиндра с малой полуосью  $b = k^{-1}$ , облучаемого источником из точки  $r_0 = 1,2k^{-1}$ ,  $\varphi_0 = -\pi/2$ : пунктирная кривая соответствует большой полуоси  $a = 1,25k^{-1}$ , сплошная кривая —  $a = 5k^{-1}$

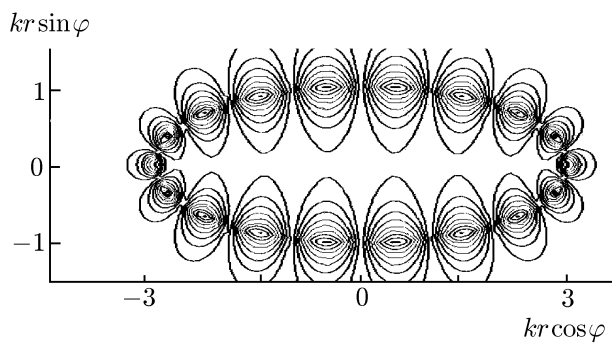


Рис. 8. Линии постоянного уровня функции  $|U(r, \varphi)|$  в случае цилиндра с полуосями  $a = 3k^{-1}$  и  $b = k^{-1}$ , источник находится в точке  $r_0 = 3,2k^{-1}$ ,  $\varphi_0 = \pi$

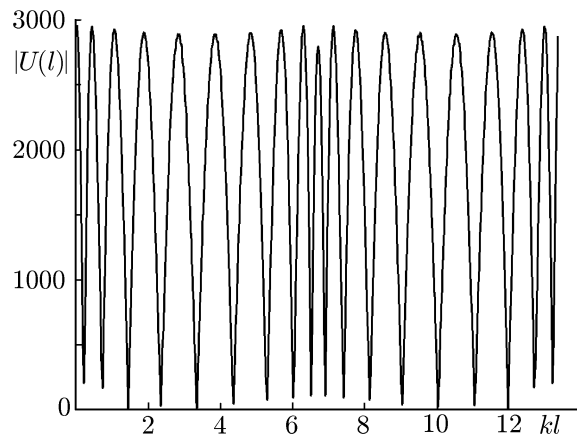


Рис. 7. Распределение модуля амплитуды поля на поверхности эллиптического цилиндра с полуосями  $b = k^{-1}$  и  $a = 3k^{-1}$ , источник расположен в точке  $r_0 = 3,2k^{-1}$ ,  $\varphi_0 = \pi$

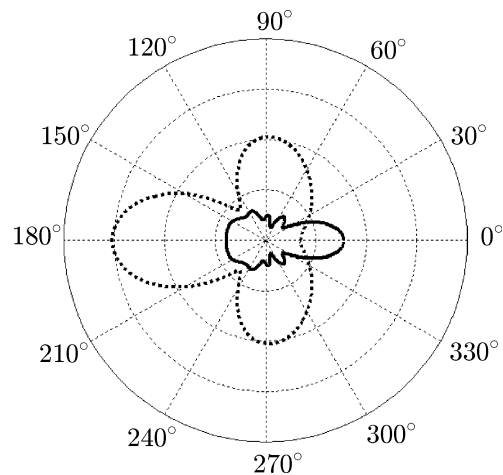


Рис. 9. Диаграммы рассеяния эллиптического цилиндра с короткой полуосью  $b = k^{-1}$ , азимут источника  $\varphi_0 = \pi$ : пунктирная кривая соответствует  $a = 1,25k^{-1}$  и  $r_0 = 1,45k^{-1}$ , сплошная кривая —  $a = 5k^{-1}$  и  $r_0 = 5,2k^{-1}$

лепестков.

2. Рассмотрим теперь случай, когда источник цилиндрической волны расположен вблизи конца длинной полуоси эллиптического контура. На рис. 7 изображено распределение модуля амплитуды полного поля  $|U(l)|$  вдоль поверхности рассеивателя с полуосями  $a = 3k^{-1}$  и  $b = k^{-1}$ , подсвечиваемого источником из точки  $r_0 = 3,2k^{-1}$ ,  $\varphi_0 = \pi$ . Видно, что эффект субволновой локализации поля отсутствует в этом случае. Источника удалён от границы цилиндра на расстояние  $0,2k^{-1}$ , как и на рис. 3, и здесь амплитуда осцилляций поля увеличилась примерно в 30 раз. Это свидетельствует о большей эффективности возбуждения поверхностных волн при размещении источника вблизи конца длинной полуоси эллипса.

Представление о пространственном распределении полного поля даёт рис. 8, на котором изображены линии постоянного уровня функции  $|U(r, \varphi)|$ . Структура этих линий характерна для

стоячей поверхностной волны.

На рис. 9 приведены диаграммы рассеяния при нахождении источника вблизи конца большой полуоси эллипса с длиной  $a = 1,25b$  и  $a = 5b$ . В случае эллипса, близкого к окружности ( $a = 1,25b$ ), основная часть рассеянного поля распределена в трёх направлениях:  $\varphi = \pi$  (назад к источнику),  $\varphi = \pi/2$  и  $\varphi = -\pi/2$ . В случае вытянутого эллипса ( $a = 5b$ ) рассеяние происходит в основном в направлении  $\varphi = 0$  — вперёд от источника.

### 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследована пространственная структура электромагнитного поля, возбуждаемого нитью магнитного тока, расположенной вблизи эллиптического цилиндра с материальными параметрами  $\varepsilon = \mu = -1$ . Показано, что поле концентрируется вблизи границы цилиндра и его величина может значительно превышать величину первичного поля на границе в широкой полосе частот. Если рассеиватель имеет вытянутую форму и источник расположен вблизи конца короткой полуоси эллипса, имеет место эффект субволновой локализации поля — поле концентрируется не только вблизи границы, но и вдоль касательной к ней. При этом распределение поля вдоль границы имеет вид интерференционной картины, у которой амплитуда основного лепестка значительно превосходит уровень боковых лепестков, а его ширина существенно меньше длины волны  $\lambda$ . При удлинении большой оси эллипса поле на границе возрастает, т.е. эффект его нерезонансного усиления становится более значимым. Показано, что диаграммы рассеяния эллиптического цилиндра существенным образом зависят от его эксцентриситета и места расположения источника.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 12-02-00062-а).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Веселаго В. Г. // УФН. 1967. Т. 92, № 3. С. 517.
2. Sihvola A. // Metamaterials. 2007. V. 1, No. 1. P. 2.
3. Блюх К. Ю., Блюх Ю. П. // УФН. 2004. Т. 174, № 4. С. 439.
4. Smith D. R., Pendry J. B., Wiltshire M. C. K. // Science. 2004. V. 305. P. 788.
5. Жаров А. А., Кондратьев И. Г., Смирнов А. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 2005. Т. 48, № 10–11. С. 978.
6. Pendry J. B., Holden A. J., Robbins D. J., Stewart W. J. // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 1999. V. 47, No. 11. P. 2075.
7. Smith D. R., Padilla W. J., Vier D. C., et al. // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84, No. 18. P. 4184.
8. Shelby R. A., Smith D. R., Nemat-Nasser S. C., Schultz S. // Appl. Phys. Lett. 2001. V. 78, No. 1. P. 489.
9. Анютин А. П., Коршунов И. П., Шатров А. Д. // ЖЭТФ. 2014. Т. 145, № 1. С. 35.
10. Шатров А. Д. // Радиотехника и электроника. 2007. Т. 52, № 8. С. 909.
11. Анютин А. П., Коршунов И. П., Шатров А. Д. // Радиотехника и электроника. 2013. Т. 58, № 7. С. 679.
12. Кюркчан А. Г., Минаев С. А., Соловейчик А. Л. // Радиотехника и электроника. 2001. Т. 46, № 6. С. 666.
13. Анютин А. П., Кюркчан А. Г., Минаев С. А. // Радиотехника и электроника. 2008. Т. 53, № 11. С. 1404.
14. Анютин А. П. // Радиотехника и электроника. 2002. Т. 47, № 8. С. 955.

Поступила в редакцию 27 декабря 2013 г.; принята в печать 27 апреля 2014 г.

## DIFFRACTION OF A CYLINDRICAL WAVE AT AN ELLIPTICAL METAMATERIAL CYLINDER

*A. P. Anyutin, I. P. Korshunov, and A. D. Shatrov*

We consider the properties of electromagnetic fields excited by a filament source, which is located near the surface of an elliptical cylinder, within two-dimensional geometry. The cylinder is made of a metamaterial, whose dielectric permittivity and magnetic permeability are equal to minus one. The influence of the cylinder shape and the position of the source on the effects of subwave localization and non-resonance field amplification.