

УДК 519.233.22+681.883

СИНТЕЗ АПЕРТУРЫ ЗА СЧЁТ ДВИЖЕНИЯ ОДИНОЧНОГО ПРИЁМНИКА ПРИ ПЕЛЕНГАЦИИ ИСТОЧНИКОВ УЗКОПОЛОСНОГО ШУМА

*А. С. Иваненков, П. И. Коротин, Д. А. Орлов, А. А. Родионов, В. И. Турчин**

Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород, Россия

Рассматриваются возможности апертурного синтеза на основе использования одиночного движущегося приёмника при пеленгации источников, излучающих случайный стационарный узкополосный сигнал. Показано, что определение координат и проекций скоростей источников в этом случае может выполняться за счёт текущих оценок доплеровского сдвига частоты. С использованием границы Крамера—Рао выполнен анализ точности определения параметров, характеризующих прямолинейную траекторию источника при движении приёмника по окружности в зависимости от размеров синтезируемой апертуры, ширины полосы излучаемого сигнала, отношения «сигнал/помеха» и т. п. Рассмотрены возможные приложения предложенной разновидности апертурного синтеза в подводной акустике и радиоастрономии.

ВВЕДЕНИЕ

Апертурный синтез как метод повышения пространственного разрешения за счёт движения приёмной системы получил широкое распространение начиная с середины прошлого века. Применительно к приёмным системам, решающим задачи пассивной локации, апертурный синтез используется в радиоастрономии (см., например, [1]). В этом случае приёмные системы состоят из пар приёмных элементов (радиотелескопов); за счёт их перемещения и суточного вращения Земли реализуется угловое разрешение, соответствующее расстоянию между радиотелескопами. Для гидроакустики был предложен и исследован ряд методов пассивного апертурного синтеза (см., например, [2–4]), однако широкого распространения там, а также при пеленгации источников теплового шума и т. п. этот подход не получил. Применительно к одиночному движущемуся приёмнику в отсутствие опорного сигнала и при случайном характере излучаемого сигнала задача пассивной пеленгации практически не рассматривалась. Если источник излучает белый шум, то отсчёты сигнала на выходе приёмника остаются статистически независимыми как при неподвижных приёмнике и источнике, так и при их взаимном движении. Информация о движении в принятом сигнале отсутствует, и пеленгация источника становится невозможной¹. Если же спектральный состав излучаемого сигнала содержит какие-либо особенности (например спектральная плотность мощности этого сигнала локализована в достаточно узкой полосе частот или в его спектре присутствуют достаточно резкие градиенты), то, как будет показано ниже, пеленгация источника становится возможной. Исследованию пеленгации источника узкополосного сигнала и посвящена настоящая работа.

* turchin@hydro.appl.sci-nnov.ru

¹ Здесь не рассматривается случай, когда координаты источника оцениваются за счёт убывания средней интенсивности с расстоянием. При этом источник должен находиться вблизи траектории движения приёмника. Такого рода измерения выполняются, в частности, в подводной акустике [5]. В данной работе предполагаются значительное удаление источника от приёмника и постоянство средней интенсивности принимаемого сигнала при движении последнего.

1. МОДЕЛЬ ПРИНИМАЕМОГО СИГНАЛА

Будем считать, что источник излучает случайный узкополосный сигнал с временной формой $A(t) \exp(2\pi i f_0 t)$, где $A(t)$ — случайный стационарный гауссов процесс с нулевым средним и функцией корреляции $K_A(t' - t'') = M[A(t')A^*(t'')]$; здесь и далее $M[\dots]$ означает математическое ожидание, $*$ — комплексное сопряжение. Приёмник и источник движутся относительно друг друга, и это движение характеризуется временной зависимостью текущего расстояния между ними $r(t)$. Сигнал на входе приёмника может быть представлен в виде

$$x(t) = A[t - r(t)/c] \exp\{2\pi i f_0 [t - r(t)/c]\} + \xi(t), \quad (1)$$

где c — скорость распространения волн в среде, $\xi(t)$ — фоновая помеха, которая также представляет собой случайный гауссов процесс с нулевым средним. Предполагается, что сигнал и помеха являются независимыми процессами. В этом случае функция корреляции сигнала (1) записывается в виде

$$M[x(t')x^*(t'')] = K_A(\tau) \exp(2\pi i f_0 \tau) + K_\xi(t' - t''), \quad (2)$$

где $\tau = t' - t'' - r(t')/c + r(t'')/c$, K_ξ — функция корреляции фоновой помехи. Для случайного стационарного процесса $A(t)$ функция $K_A(t)$ имеет характерный масштаб спада τ_c — время корреляции случайного стационарного процесса $A(t)$. Разностью времён запаздываний, входящих в аргумент K_A , можно пренебречь, если

$$|r(t) - r(t - \tau_c)|/c \ll \tau_c. \quad (3)$$

Если характерный временной масштаб изменения расстояния $r(t)$ существенно больше τ_c , то неравенство (3) эквивалентно условию $|dr/dt|/c \ll 1$ или $\beta = V/c \ll 1$, где $V = dr/dt$ — радиальная проекция линейной скорости относительного движения приёмника и источника. Полагая условие (3) выполненным, для аргумента функции K_A в формуле (2) можно использовать приближение $\tau \approx t' - t''$.

Далее мы будем рассматривать совокупность отсчётов сигнала в моменты времени t_j , $j = 1, \dots, J$, в виде случайного вектора $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_J)^T$, где его элементы $x_j = x(t_j)$, индекс T означает транспонирование. Отсчёты помехи будем считать статистически независимыми с одинаковыми дисперсиями $\sigma_0^2 = M[|\xi(t_j)|^2]$. С учётом (3) матрица корреляции сигнала \mathbf{x} представляется в виде

$$\mathbf{K}_x = M[\mathbf{x}\mathbf{x}^H] = \mathbf{S}^H \mathbf{K}_A \mathbf{S} + \sigma_0^2 \mathbf{I}, \quad (4)$$

где индекс H означает эрмитово сопряжение, \mathbf{I} — единичная матрица, $\mathbf{K}_A = \|K_A(t_{j'} - t_{j''})\|$, t_j — моменты отсчётов, $\mathbf{S} = \text{diag}\{\exp[i\phi_j(\boldsymbol{\theta})]\}$ — диагональная матрица, составленная из комплексных экспонент, $\phi_j = \phi(t_j, \boldsymbol{\theta}) = 2\pi f_0 [t_j - r(t_j)/c]$, $\boldsymbol{\theta}$ — вектор неизвестных параметров, определяющих траекторию относительного движения источника и приёмника и центральную частоту f_0 . Отметим, что модель (4), построенная с учётом неравенства (3), характеризует также произвольный фазомодулированный сигнал, наблюдаемый при наличии аддитивной и мультипликативной гауссовых помех.

2. МАКСИМАЛЬНО ПРАВДОПОДОБНАЯ ПРОЦЕДУРА ОЦЕНКИ. ОБЩИЙ ВИД ГРАНИЦЫ КРАМЕРА—РАО

Используя очевидное соотношение $\mathbf{S}\mathbf{S}^H = \mathbf{S}^H\mathbf{S} = \mathbf{I}$, представим матрицу (4) в виде $\mathbf{K}_x = \mathbf{S}^H \mathbf{K} \mathbf{S}$, где $\mathbf{K} = \mathbf{K}_A + \sigma_0^2 \mathbf{I}$. Отсюда следует, что в известном выражении [6] для логарифма функции правдоподобия

$$\ln w = -(\ln \det \mathbf{K}_x + \mathbf{x}^H \mathbf{K}_x^{-1} \mathbf{x}) + C \quad (5)$$

(где C — несущественная константа) детерминант $\det \mathbf{K}_x$ равен $\det \mathbf{K}$ и не зависит от вектора параметров $\boldsymbol{\theta}$, входящих в \mathbf{S} . Соответственно, максимально правдоподобная оценка $\boldsymbol{\theta}$ находится как аргумент, при котором функция $F(\boldsymbol{\theta})$ (являющаяся квадратичной формой сигнального вектора $\mathbf{y} = \mathbf{S}^H \mathbf{x}$) достигает глобального минимума:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} F(\boldsymbol{\theta}); \quad F(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{y}^H \mathbf{K}^{-1} \mathbf{y}. \quad (6)$$

В частном случае полной временной когерентности, когда $\tau_c \gg T$ (где T — время наблюдения) все элементы матрицы \mathbf{K}_A становятся одинаковыми. Тогда нетрудно показать, что функция F пропорциональна $-\|\mathbf{s}^H \mathbf{x}\|^2$, где $\mathbf{s} = [\exp(i\phi_1), \dots, \exp(i\phi_J)]^T$, так что процедура оценки сводится к обычной согласованной обработке. В противоположном случае полного отсутствия временной корреляции, когда $\mathbf{K} \propto \mathbf{I}$, функция $F(\boldsymbol{\theta})$ в формуле (6) вообще не зависит от параметров $\boldsymbol{\theta}$, что соответствует известному утверждению о невозможности пеленгации движущимся приёмником источника белого шума.

Наибольший интерес с точки зрения практического применения рассматриваемого метода представляет, естественно, анализ осуществимости оценок различных параметров, характеризующих текущее положение источника относительно траектории приёмника, в зависимости от длины и вида этой траектории, скоростей движения, масштаба временной корреляции излучаемого сигнала и т. д. Однако в известных работах крайне редко встречаются строгие количественные оценки возможностей апертурного синтеза. В качестве меры эффективности оценок, получаемых с помощью формулы (6), можно взять их дисперсию $\boldsymbol{\theta}$. Как известно, минимальная достижимая дисперсия оценки некоторого вектора параметров $\boldsymbol{\Theta} = (\Theta_1, \dots, \Theta_M)^T$ определяется границей Крамера—Рао: $\text{var } \hat{\boldsymbol{\Theta}} \geq \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{\Theta}}^{-1}$, где $\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{\Theta}}$ — матрица Фишера с размерностью $M \times M$ (см., например, [6]). Для максимально правдоподобных оценок эта граница обычно достигается при достаточно большой длине выборки, поэтому в дальнейшем будем полагать $\text{var } \hat{\boldsymbol{\Theta}} \approx \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{\Theta}}^{-1}$.

В случае нормально распределённого вектора наблюдений с нулевым средним и матрицей корреляции \mathbf{K} матрица Фишера согласно [6] имеет вид

$$\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{\Theta}} = \left\| \text{tr} \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \Theta_l} \mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \Theta_m} \mathbf{K}^{-1} \right) \right\|, \quad (7)$$

где $\text{tr } \mathbf{A}$ обозначает след матрицы \mathbf{A} . В качестве элементов $\boldsymbol{\Theta}$, помимо вектора $\boldsymbol{\theta}$, характеризующего взаимное движение источника и приёмника и неизвестную центральную частоту, могут браться также другие величины: неизвестная средняя мощность сигнала источника $P_0 = K_A(0)$, уровень аддитивной помехи σ_0^2 , параметры, характеризующие форму корреляционной функции $K_A(t)$ и т. д. Мы ограничимся анализом простейшей ситуации, когда форма корреляционной функции и уровень аддитивной помехи известны² и вектор $\boldsymbol{\Theta} = (P_0, \boldsymbol{\theta}^T)^T$. Можно показать, что матрица Фишера в этом случае включает в себя два независимых блока: число Φ_0 , характеризующее дисперсию оценки мощности сигнала, и матрицу $\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{\Theta}}$ с размерностью $L \times L$, характеризующую дисперсии оценок вектора $\boldsymbol{\theta}$ с длиной L . Матрица $\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{\Theta}}$ после несложных вычислений находится в виде

$$\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{\Theta}} = \left\| \text{tr} (\boldsymbol{\Psi}_m \mathbf{K} \boldsymbol{\Psi}_l \mathbf{K}^{-1} + \boldsymbol{\Psi}_l \mathbf{K} \boldsymbol{\Psi}_m \mathbf{K}^{-1} - 2\boldsymbol{\Psi}_l \boldsymbol{\Psi}_m) \right\|. \quad (8)$$

Здесь

$$\boldsymbol{\Psi}_l = \text{diag } \psi_j^{(l)}, \quad \psi_j^{(l)} = \partial \phi_j / \partial \theta_l. \quad (9)$$

² Как будет следовать из дальнейшего, при малом времени корреляции τ_c форма корреляционной функции не играет большой роли, а уровень аддитивной помехи может быть оценён по выборке, не содержащей сигнала от источника.

Дисперсии оценок θ определяются соответственно как

$$\text{var } \hat{\theta} \approx \Phi_{\theta}^{-1}. \quad (10)$$

Аналитическое и численное исследование матрицы (8) достаточно трудоёмко, причём для числа отсчётов $J > 10^3 \div 10^4$ уже возникают проблемы с численным обращением матрицы \mathbf{K} . Характерные свойства матрицы (8), однако, легко устанавливаются для следующего частного случая. Будем считать, что дисперсия $\sigma_0^2 \rightarrow 0$, т. е. аддитивная помеха отсутствует, а функция корреляции имеет экспоненциальный вид: $K_A(t) = P_0 \exp(-|t|/\tau_c)$, где τ_c — временной масштаб корреляции флуктуаций. Соответственно матрица $\mathbf{K} = \mathbf{K}_A = P_0 \|\rho^{|j-k|}\|$, где $\rho = \exp[-1/(F_s \tau_c)]$, F_s — частота дискретизации. В этом случае вид обратной матрицы \mathbf{K}^{-1} известен [7]:

$$(\mathbf{K}^{-1})_{jk} = \frac{P_0^{-1}}{1 - \rho^2} \{[(1 + \rho^2) - \rho^2 (\delta_{j,1} + \delta_{j,J})] \delta_{j,k} - \rho (\delta_{j,k+1} + \delta_{j+1,k})\}, \quad (11)$$

где $\delta_{j,k}$ — символ Кронекера. Подстановка явных выражений для прямой и обратной матриц корреляции флуктуаций в формулу (8) приводит к компактному выражению, монотонно возрастающему с увеличением частоты дискретизации и стремящемуся при $F_s \tau_c \gg 1$ к пределу

$$\Phi_{\theta} = \frac{2\rho^2}{1 - \rho^2} \left\| \sum_{j=1}^{J-1} (\psi_{j+1}^{(l)} - \psi_j^{(l)}) (\psi_{j+1}^{(m)} - \psi_j^{(m)}) \right\| \rightarrow \left\| \tau_c \int_{-T/2}^{T/2} \frac{\partial \omega}{\partial \theta_l} \frac{\partial \omega}{\partial \theta_m} dt \right\|, \quad (12)$$

где $\omega(t, \theta) = \partial \phi(t, \theta) / \partial t$ — мгновенная круговая частота, интервал наблюдения берётся от $-T/2$ до $T/2$. В частности, диагональные элементы матрицы Φ_{θ} пропорциональны евклидовой норме производной мгновенной частоты сигнала по соответствующему параметру³.

Из рассмотренного частного случая следует, что вся информация о параметрах, характеризующих относительное положение источника, содержится в мгновенной частоте сигнала, точнее — в мгновенном доплеровском сдвиге этой частоты. Соответственно, точность оценки параметров траектории будет определяться чувствительностью текущих доплеровских сдвигов частоты к изменениям параметров θ_l .

При $T \gg \tau_c$ и достаточно быстром спадании функции корреляции сигнала вне интервала τ_c , данные наблюдений разбиваются на статистически независимые блоки с длительностью порядка τ_c . Если текущая частота сигнала $\omega(t, \theta)$ меняется медленно и практически постоянна на временном интервале с длительностью τ_c , единственными параметрами, определяющими сигнал на k -м интервале, являются его частота $\omega(t_k, \theta)$ и мощность. Тем самым задача приближённо сводится к построению серии оценок текущей частоты и последующему нахождению параметров источника по совокупности этих оценок. Соответственно, задачу нахождения дисперсий оценок вектора θ можно упростить следующим образом. Будем считать, что полное время наблюдения T разбивается на $J_0 = T/T_0$ временных интервалов с длительностью T_0 , на которых выполняются оценки \hat{f}_j текущей частоты $f_j = (2\pi)^{-1} d\phi(t, \theta) / dt|_{t=t_j}$ ⁴. Последние можно представить в виде

$$\hat{f}_j = f(t_j, \theta) + \zeta_j, \quad (13)$$

³ В этом заключается принципиальное отличие рассматриваемого случая от оценок параметров траектории источника строго монохроматического сигнала, когда точности оценок определяются нормами производных по соответствующим параметрам не частоты, а фазы принимаемого сигнала [8].

⁴ Заметим, что точная формулировка процедуры оценки (6) включает в себя обратный корреляционный оператор, форма которого предполагается известной. Максимально правдоподобная оценка текущей частоты также предполагает знание спектральной плотности мощности сигнала (см. [6] и Приложение). В настоящей работе, однако, не анализируется влияние точности знания спектральной плотности сигнала на точность оценок.

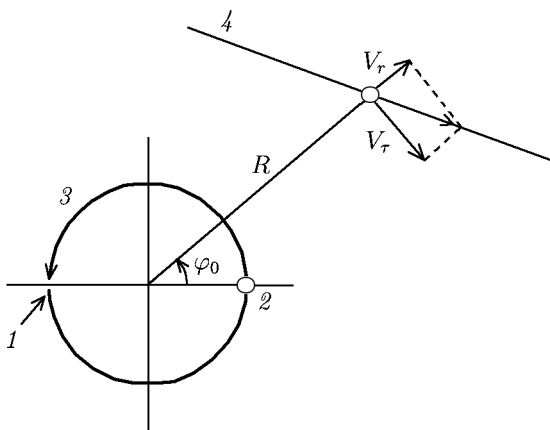


Рис. 1. Геометрия движения приёмника и источника. Положения источника и приёмника показаны в момент $t = 0$, соответствующий середине интервала наблюдений: 1 — начало движения, 2 — приёмник, 3 — траектория приёмника, 4 — траектория источника

способом во многих работах (см., например, [9, 10]). Её обратная величина $\tilde{\Phi}_{f_0}$ пропорциональна $T_0 = T/J_0$. Поэтому граница (14) не зависит от способа разбиения общего времени наблюдения T на блоки и определяется только величиной T . В Приложении приведены явные выражения для $\tilde{\Phi}_{f_0}$ в случае произвольной спектральной плотности мощности флуктуаций сигнала, принимаемого на фоне помехи с постоянной спектральной плотностью мощности.

3. ТОЧНОСТЬ ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ ТРАЕКТОРИИ ПРИ КРУГОВОМ ДВИЖЕНИИ ПРИЁМНИКА

Будем считать, что приёмник движется по окружности с радиусом a с постоянной линейной скоростью V , а источник — равномерно и прямолинейно с радиальной и тангенциальной компонентами скорости V_r и V_τ соответственно ⁵. Траектории приёмника и источника лежат в одной плоскости. Геометрия задачи показана на рис. 1. Наблюдения проводятся на временном интервале $-T/2 \leq t \leq T/2$, где $T = 2\pi a/V$. Зависимость фазы принимаемого полезного сигнала от времени в приближении Френеля в этом случае представляется в виде

$$\phi(t, \theta) = 2\pi f_0 \left[(1 - V_r/c)t + \frac{a}{c} \cos \chi - \frac{1}{2Rc} (a \sin \chi - V_\tau t)^2 + o(R^{-2}) \right], \tag{15}$$

где $\chi = 2\pi t/T - \varphi_0$; φ_0 и R — пеленг (азимут) источника и расстояние до него от центра окружности на момент времени $t = 0$ (см. рис. 1). В рассматриваемом случае вектор параметров включает 5 величин ($L = 5$):

$$\theta = (f_0, \varphi_0, R, V_r, V_\tau)^T, \tag{16}$$

⁵ Как показано, в частности, в [5], движение одиночного приёмника по прямолинейной траектории приводит к неопределённости при одновременной оценке частоты и пеленга. Эта неопределённость снимается при его движении по криволинейной траектории, простейшим видом которой является окружность.

где $j = 1, \dots, J_0$, ζ_j — случайные величины, которые являются независимыми при $T_0 \gg \tau_c$. В соответствии с известными асимптотическими свойствами максимально правдоподобных оценок [6], величины ζ_j можно считать распределёнными по нормальному закону с нулевым средним и дисперсией $\tilde{\Phi}_{f_0}^{-1}$. Будем также предполагать, что на временных интервалах с длительностью T_0 мгновенную частоту можно считать постоянной. Для такого упрощённого сценария граница Крамера—Рао строится известным образом:

$$\tilde{\Phi}_\theta = \tilde{\Phi}_{f_0} J_0 \mathbf{F}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} / J_0, \tag{14}$$

где элементы $Y_{j,l} = \partial f(t_j, \theta) / \partial \theta_l$, $l = 1, \dots, L$, L — число оцениваемых параметров.

Дисперсия оценки центральной частоты случайного узкополосного сигнала, наблюдаемого на фоне шума с постоянной спектральной плотностью мощности, анализировалась тем или иным

число которых может быть уменьшено в различных частных случаях. Как было показано выше, основная информация о параметрах содержится в оценках мгновенной частоты $f(t, \boldsymbol{\theta}) = (2\pi)^{-1} d\phi(t, \boldsymbol{\theta})/dt$, которая для рассматриваемой геометрии движения определяется как

$$f = f_0 \left[1 - \beta_r - \beta \sin \chi - \frac{1}{2} \alpha \beta \sin(2\chi) + \alpha \beta_r (\sin \chi + 2\pi x \cos \chi - 2\pi \beta_r x / \beta) \right], \quad (17)$$

где $\beta = V/c$, $\beta_r = V_r/c$, $\beta_\tau = V_\tau/c$, $\alpha = a/R$, $\chi = t/T$.

Дисперсии оценок параметров (16) находятся с помощью формул (10) и (14). Для анализа границы (14) удобно представить матрицу производных \mathbf{Y} в виде $\mathbf{Y} = \mathbf{Z}\mathbf{D}^{1/2}$, где $\mathbf{D} = \text{diag}(D_1, \dots, D_5)$ — диагональная матрица с размерными элементами

$$D_1 = 1, \quad D_2 = f_0\beta, \quad D_3 = f_0\alpha\beta/(2R^2), \quad D_4 = f_0a/(Rc), \quad D_5 = f_0/c, \quad (18)$$

нумерация элементов матрицы \mathbf{D} соответствует последовательности параметров в векторе (16), а \mathbf{Z} — числовая матрица, зависящая от пеленга φ_0 и безразмерных параметров α , β , β_r , V_r/V . Учитывая, что $(\mathbf{Y}^T\mathbf{Y})^{-1} = \mathbf{D}^{-1/2}(\mathbf{Z}^T\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{D}^{-1/2}$, а также используя явное выражение (П3) для дисперсии оценки центральной частоты, можно найти среднеквадратичные отклонения оценок элементов вектора $\boldsymbol{\theta}$, которые равны корням из диагональных элементов $\tilde{\Phi}_{\boldsymbol{\theta}}^{-1}$:

$$\sqrt{\text{var } \hat{\theta}_l} \approx \frac{1 + \varepsilon}{B_\varepsilon} \left(\frac{\Delta f}{2T} \right)^{1/2} \frac{C_l^{(L)}}{D_l}, \quad (19)$$

где $l = 1, \dots, L$; $C_l^{(L)} = \sqrt{[(J_0^{-1}\mathbf{Z}^T\mathbf{Z})^{-1}]_{ll}}$. Чтобы получить представление о количественных зависимостях дисперсий оценок, рассмотрим вначале два частных случая.

1) **Большое удаление источника ($R \rightarrow \infty$).** При неподвижном источнике ($V_r = 0$) остаются два неизвестных параметра: $\boldsymbol{\theta} = (f_0, \varphi_0)^T$ и $(J_0^{-1}\mathbf{Z}^T\mathbf{Z})^{-1} = \text{diag}(1, 2)$. При этом среднеквадратичные отклонения оценок частоты и пеленга представляются в виде

$$\sqrt{\text{var } \hat{f}_0} = \frac{1 + \varepsilon}{B_\varepsilon} \left(\frac{\Delta f}{2T} \right)^{1/2} C_1^{(2)}, \quad (20)$$

$$\sqrt{\text{var } \hat{\varphi}_0} = \frac{1 + \varepsilon}{2\sqrt{\pi} B_\varepsilon} \left(\frac{\delta_f}{\beta} \right)^{1/2} \left(\frac{\lambda}{a} \right)^{1/2} C_2^{(2)}, \quad (21)$$

где $\delta_f = \Delta f/f_0$ — относительная ширина полосы излучаемого сигнала, $\lambda = c/f_0$ — длина волны, $C_1^{(2)} = 1$, $C_2^{(2)} = \sqrt{2}$. При неизвестной радиальной скорости формально существует возможность одновременно оценить параметры f_0 и V_r , т. к. зависимость (17) частоты от времени представляет собой сумму постоянной составляющей $f_0(1 - \beta_r)$ и синусоиды с амплитудой $f_0\beta$. И постоянная составляющая, и амплитуда синусоиды могут быть легко найдены из получаемых данных. Однако, в силу малой величины $\beta \ll 1$, при переходе от оценок постоянной составляющей и амплитуды к оценкам параметров f_0 и V_r точность оценки частоты ухудшается в $\sqrt{2}/\beta$ раз по сравнению с выражением (20), что делает одновременную оценку этих параметров весьма проблематичной. Среднеквадратичное отклонение оценки радиальной компоненты скорости при этом есть

$$\sqrt{\text{var } \hat{V}_r} = c \frac{1 + \varepsilon}{\sqrt{2\pi} B_\varepsilon} \left(\frac{\delta_f}{\beta} \frac{\lambda}{a} \right)^{1/2}. \quad (22)$$

Поскольку характерным параметром, определяющим среднеквадратичное отклонение (22), является скорость распространения c , при $\beta_r \ll 1$ точность оценки радиальной компоненты также может оказаться недостаточной для практических целей.

Среднеквадратичное отклонение оценки углового положения источника не зависит от априорного знания частоты и скорости. Как следует из формулы (21), оно пропорционально $\sqrt{\lambda/a}$, в отличие от случая, когда ищется пеленг источника тонального сигнала и среднеквадратичное отклонение пропорционально λ/a [7].

2) Неподвижный источник ($V_r = V_\tau = 0$). Для неизвестных параметров $\theta = (f_0, \varphi_0, R)^T$, $L = 3$, при $\{\alpha, \beta\} \ll 1$ имеем $(J_0^{-1} \mathbf{Z}^T \mathbf{Z})^{-1} = \text{diag}(1, 2, 2)$. Поскольку $C_1^{(2)} = C_1^{(3)}$ и $C_2^{(2)} = C_2^{(3)}$, среднеквадратичные отклонения оценок частоты и пеленга определяются теми же выражениями (20) и (21), а относительное среднеквадратичное отклонение оценки расстояния находится как

$$\sqrt{\text{var } \hat{R}}/R = \frac{1 + \varepsilon}{\sqrt{\pi} B_\varepsilon} \left(\frac{\delta_f}{\beta} \right)^{1/2} \left(\frac{R^2 \lambda}{a^3} \right)^{1/2} C_3^{(3)}, \quad (23)$$

где $C_3^{(3)} = \sqrt{2}$. Из формулы (23) следует, что относительное среднеквадратичное отклонение оценки расстояния растёт с увеличением R . Следовательно, для измеряемых дистанций существует ограничение сверху

$$R < R_\infty, \quad R_\infty = \frac{B_\varepsilon}{1 + \varepsilon} \left(\frac{\beta}{\delta_f} \right)^{1/2} \left(\frac{\pi a^3}{\lambda} \right)^{1/2} \frac{1}{C_3^{(3)}}, \quad (24)$$

которое находится из условия равенства относительного среднеквадратичного отклонения единице. Фактически величина (24) является аналогом границы зоны Фраунгофера для синтезируемой апертуры. По сравнению с обычными антеннами или апертурами, синтезируемыми в случае чисто тонального излучаемого сигнала, когда $R_\infty \sim a^2/\lambda$, предельное расстояние уменьшается в $\sqrt{a/\lambda}$ раз, однако для ряда практических приложений формула (24) из следующего раздела 4 даёт вполне приемлемый результат.

В общем случае пяти неизвестных параметров среднеквадратичные отклонения оценок частоты, пеленга и дистанции и граница R_∞ определяются формулами (20)–(23) с заменой чисел $C_l^{(3)}$ на $C_l^{(5)}$, $l = 1, 2, 3$, а среднеквадратичное отклонение оценки тангенциальной составляющей скорости находится как

$$\sqrt{\text{var } \hat{V}_\tau} = \frac{V}{2\sqrt{\pi}} \frac{1 + \varepsilon}{B_\varepsilon} \left(\frac{\delta_f}{\beta} \right)^{1/2} \left(\frac{R^2 \lambda}{a^3} \right)^{1/2} C_4^{(5)}. \quad (25)$$

С учётом выражения (24) среднеквадратичное отклонение (25) можно представить в виде

$$\sqrt{\text{var } \hat{V}_\tau} = V \frac{R}{R_\infty} \frac{C_4^{(5)}}{2C_3^{(5)}}, \quad (26)$$

т. е. при составляющей $V_\tau \sim V$ относительная погрешность оценки будет порядка R/R_∞ .

В отличие от неподвижного источника ($L = 3$), при $L = 5$ множители $C_l^{(5)}$ будут зависеть от φ_0 и $\alpha, \beta, \beta_r, V_\tau/V$. Численный анализ показал, что множители $C_l^{(5)}$ практически не зависят от β и β_r , но достаточно сильно варьируются при изменении азимута φ_0 и отношения V_τ/V . В частности, при $\alpha = 0,1$ и изменениях пеленга в пределах $0^\circ \div 360^\circ$, а отношения V_τ/V — в интервале от -1 до 1 коэффициенты $C_l^{(5)}$ удовлетворяют неравенствам $0,86 \leq C_2^{(5)}/C_2^{(3)} \leq 3,44$; $0,44 \leq C_3^{(5)}/C_3^{(3)} \leq 6,80$ и $0,58 \leq C_4^{(5)} \leq 29,0$; т. е. увеличение среднеквадратичных отклонений при «неудачных» значениях φ_0 и V_τ/V может оказаться значительным. Зависимости $C_l^{(5)}(\varphi_0, V_\tau/V)$ имеют достаточно острые максимумы по этим параметрам. В качестве примера на рис. 2 показаны зависимости $C_2^{(5)}/C_2^{(3)}$ и $C_3^{(5)}/C_3^{(3)}$ от φ_0 при «наихудшем» отношении $V_\tau/V = 0,46$. При

уменьшении параметра α разброс величин $C_l^{(5)}$ несколько уменьшается, однако это уменьшение практически малозначимо.

Поскольку, как отмечалось выше, одновременная оценка параметров f_0 и V_r представляется проблематичной, можно также рассматривать смещённые оценки вектора $\boldsymbol{\theta} = (f_0, \varphi_0, R, V_r)^T$, полагая в модели (17) скорость $V_r = 0$. Можно показать, что при этом среднеквадратичные отклонения оценок будут по-прежнему определяться формулой (24), но уже с матрицей \mathbf{C} с размерностью 4×4 , а вектор смещения оценок $\boldsymbol{\varepsilon} = M[\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0]$ с размерностью 4×1 (где $\boldsymbol{\theta}_0$ — точное значение вектора параметров) будет равен

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -f_0 \beta_r \mathbf{D}^{-1} \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\delta}, \quad (27)$$

где элементы вектора $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_4)^T$ определяются выражениями

$$\delta_1 = 1 + \alpha \beta_r \sin \varphi_0, \quad \delta_2 = (\beta_r / \beta) \alpha \cos \varphi_0, \quad \delta_3 = -2 (\beta_r / \beta) \sin \varphi_0, \quad \delta_4 = \sin \varphi_0.$$

Вариации коэффициентов $C_l^{(4)}$ оказываются существенно меньшими: $0,86 \leq C_2^{(4)} / C_2^{(3)} \leq 2,51$; $0,37 \leq C_3^{(4)} / C_3^{(3)} \leq 1,39$ (см. рис. 2); $0,58 \leq C_4^{(4)} \leq 1,92$. Отметим, что при движении источника вдоль касательной к окружности среднеквадратичные отклонения оценок пеленга и дистанции могут оказаться как больше, так и меньше, чем в случае неподвижного источника. Очевидно, что при одновременном движении источника и приёмника синтезируется апертура со сложной конфигурацией и двумя характерными пространственными масштабами: a и $2\pi a V_r / V$. При удачном расположении линии движения источника относительно начала движения приёмника погрешность оценки может быть снижена. Конкретные значения среднеквадратичных отклонений и смещений приводятся в разделе 4.

4. ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Одним из возможных применений рассматриваемого метода может быть определение пеленга и расстояния до корабля в подводной акустике, когда $c \approx 1,5$ км/с. Подводный шум корабля, регистрируемый приёмником, обычно содержит (наряду со сравнительно гладкой широкополосной компонентой) так называемые дискретные составляющие — узкополосные компоненты, возникающие из-за вращения деталей судовых механизмов (см., например, [11]). Относительные ширины частотных полос этих дискретных составляющих имеют порядок $\delta_f \sim 10^{-3} \div 10^{-2}$. В качестве примера рассмотрим пеленгацию источника, имеющего в спектре сигнала такую узкополосную компоненту на частоте $f_0 = 120$ Гц, для радиуса движения приёмника $a = 3$ км и скорости источника $V = 10$ м/с. Как следует из формулы (26), среднеквадратичное отклонение оценки пеленга при $\varepsilon = 1$ для неподвижного источника будет составлять $1,4^\circ \div 4,5^\circ$ для полосы $\delta_f = 10^{-3} \div 10^{-2}$. Условная граница (24), до которой можно определять дистанцию с относительным среднеквадратичным отклонением меньше 1, при этих параметрах для неподвижного источника составит $R_\infty = 60 \div 20$ км, что достаточно для практики. Среднеквадратичное отклонение оценки радиальной компоненты скорости при этом составляет $30 \div 100$ м/с, так что использование последней не

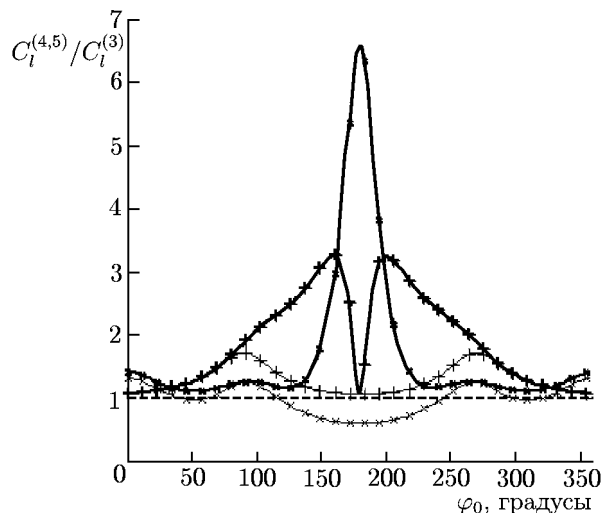


Рис. 2. Отношения коэффициентов $C_l^{(5)}/C_l^{(3)}$ (жирные кривые) и $C_l^{(4)}/C_l^{(3)}$ (тонкие кривые) в зависимости от пеленга φ_0 для $l = 2$ (символы +) и $l = 3$ (символы \times)

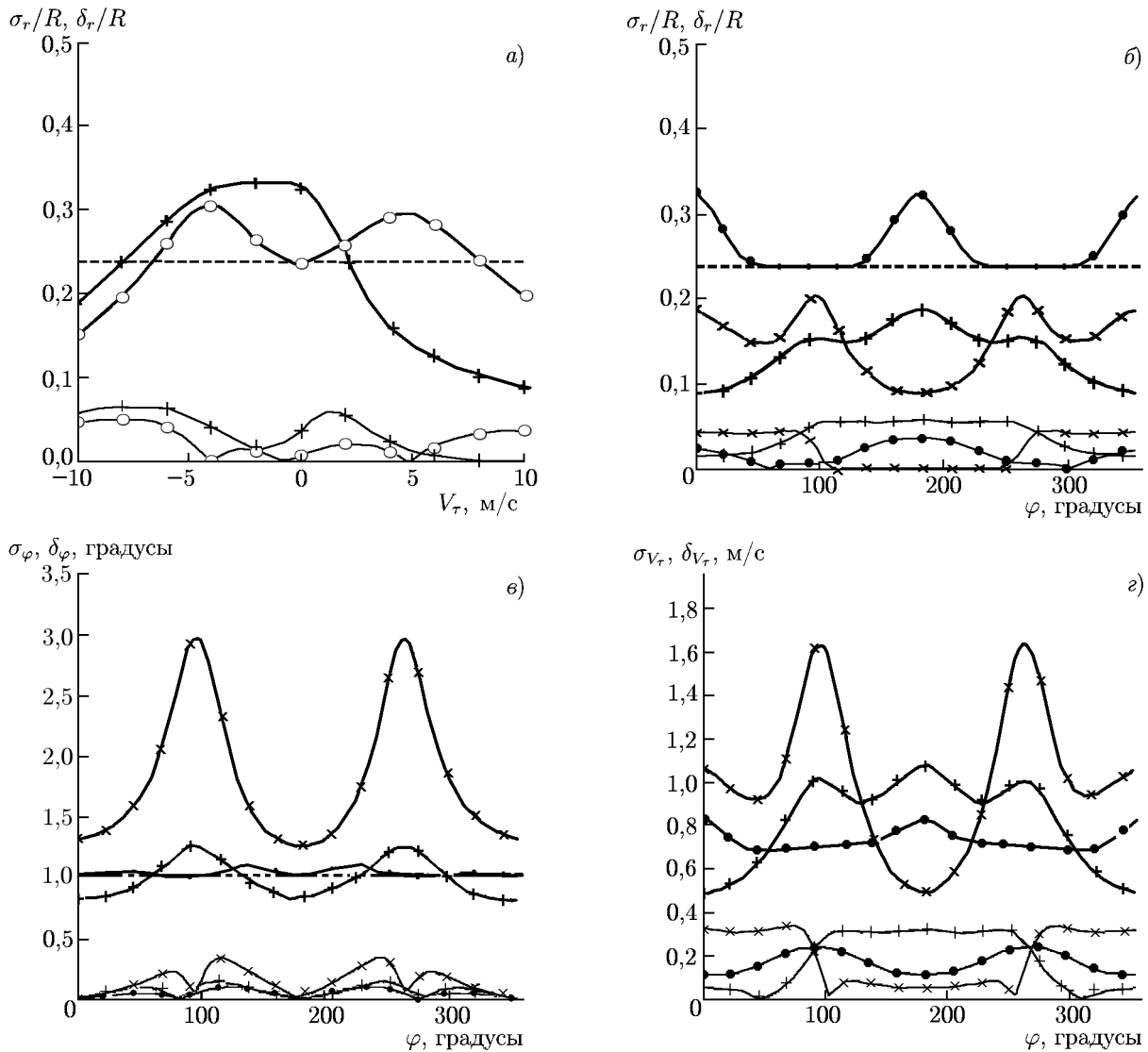


Рис. 3. Зависимости относительных среднеквадратичных отклонений σ_r/R (толстые кривые) и смещений δ_r/R оценки расстояния (тонкие кривые) от V_τ (а) для азимутов $\varphi_0 = 90^\circ$ (символы \circ) и 180° ($+$) и от азимута (б) для $V_\tau = -10$ м/с ($+$), 0 м/с (\bullet), 10 м/с (\times); зависимости среднеквадратичных отклонений и смещений $\sigma_\varphi, \delta_\varphi$ оценок азимута (в) и $\sigma_{V_\tau}, \delta_{V_\tau}$ тангенциальной компоненты скорости (г) от азимута для тех же V_τ . Штриховой линией на панелях (а)–(в) показаны среднеквадратичные отклонения для неподвижного источника

представляет практического интереса. Поэтому, в силу изложенного в разделе 3, целесообразно использовать смещённые оценки остальных параметров, входящих в формулу (20). В качестве примера на рис. 3 для $R = 20$ км, $\delta_f = 10^{-3}$ и $V_\tau = 10$ м/с показаны зависимости относительных среднеквадратичных отклонений и смещений оценки расстояния от тангенциальной компоненты скорости источника и пеленга и зависимости среднеквадратичных отклонений и смещений оценок пеленга и тангенциальной компоненты скорости от пеленга. Как видно из этих графиков, смещение во всех случаях оказывается заметно меньше среднеквадратичного отклонения.

Гипотетически рассматриваемый апертурный синтез применим в радиоастрономии для определения расстояния до источников сигналов с узкими спектральными линиями с использованием орбитального движения Земли, $a = 1$ а. е. = $1,5 \cdot 10^{11}$ м. Характерные относительные ширины

молекулярных линий составляют в миллиметровом диапазоне длин волн величины порядка $\delta_f = 10^{-7}$ (см, например, [12, 13]), что формально приводит к достаточно большим расстояниям (24). Необходимо, однако, учитывать следующее обстоятельство. Фактически оценка расстояния проводится за счёт выделения во временной зависимости доплеровского сдвига частоты второй фурье-гармоники с периодом $T/2$, амплитуда которой меньше в $a/(2R)$ раз амплитуды первой фурье-гармоники с периодом T (см. (21)). Для рассмотренного выше приложения к подводной акустике отношение $a/R \sim 10^{-1} \div 10^{-2}$, так что выделение второй гармоники представляется достаточно реальным. Для радиоастрономических приложений, например для расстояния $R = 10^2$ световых лет, $a/R \approx 1,5 \cdot 10^{-7}$. Поэтому выделение такой слабой гармоники с орбиты Земли вряд ли возможно, учитывая реальные систематические погрешности спектральных измерений.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена возможность апертурного синтеза для пассивной локации источников узкополосных случайных сигналов на основе использования движения одиночного приёмного элемента. Показано, что оценка параметров, характеризующих положение источника относительно траектории приёмника, может выполняться за счёт текущих оценок доплеровского сдвига частоты. Получены простые выражения для границы Крамера—Рао, позволяющие найти точности оценок дистанции, пеленга и т. п. в зависимости от параметров задачи. Даны численные оценки, показывающие перспективность предложенного способа в подводной акустике.

Следует отметить, что предложенный подход может быть обобщён для случая, когда спектральная плотность мощности источников имеет какие-либо другие выраженные особенности, например убывает с достаточно высокой скоростью в определённом диапазоне частот. Такое обобщение может явиться предметом дальнейших исследований.

Авторы выражают искреннюю признательность И. И. Зинченко и А. В. Лапинову за полезные обсуждения возможностей использования метода в радиоастрономии.

Работа поддержана РФФИ (грант 12-02-31657).

ПРИЛОЖЕНИЕ

ГРАНИЦА КРАМЕРА—РАО ОЦЕНОК ЦЕНТРАЛЬНОЙ ЧАСТОТЫ УЗКОПОЛОСНОГО ПРОЦЕССА

Будем полагать, что принимаемый сигнал характеризуется спектральной плотностью мощности $P(f)$, которая может быть представлена в виде

$$P(f) = P_{\max} W\left(\frac{f - f_0}{\Delta f/2}\right) + P_n, \quad (\text{П1})$$

где f_0 — центральная частота, Δf — полоса излучаемого сигнала, P_{\max} — спектральная плотность мощности сигнала от источника в максимуме (т. е. при $f = f_0$), а функция $W(u)$ определяет форму спектра излучаемого сигнала. Будем считать, что $W(u)$ представляет собой симметричную колоколообразную функцию с максимумом в точке $u = 0$, равным 1. Кроме того, будем полагать, что принимаемый сигнал проходит через полосовой фильтр с шириной F_s , а частота

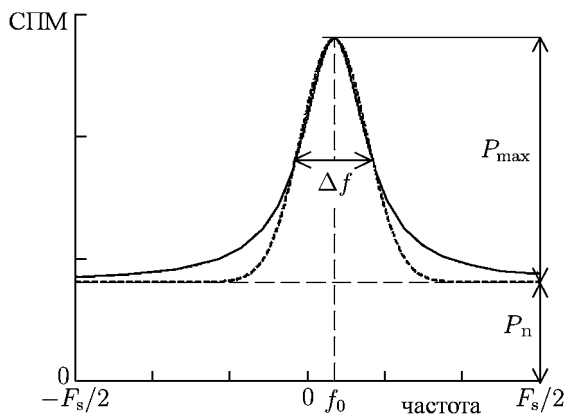


Рис. П1. Спектральная плотность мощности (СПМ) узкополосного сигнала с профилем Лоренца (сплошная кривая) и Гаусса (штриховая кривая) в смеси с фоновым шумом

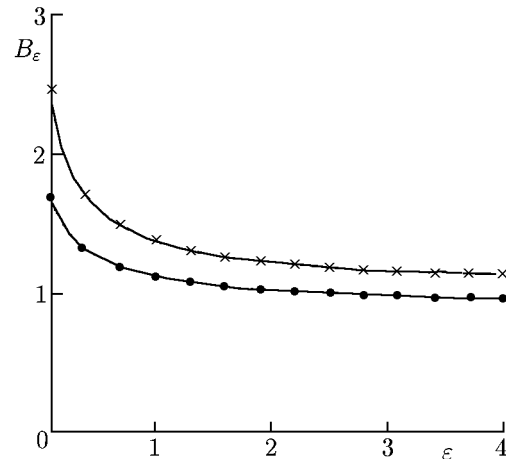


Рис. П2. Зависимости коэффициента B_ϵ от $\epsilon = P_n/P_{max}$ для профилей Лоренца (●) и Гаусса (×)

дискретизации совпадает с шириной полосы фильтра. Фоновый шум в полосе фильтра имеет постоянную спектральную плотность мощности P_n . На рис. П1 показан вид спектральной плотности мощности сигнала и её характерные параметры.

В отличие от публикаций [9, 10] и аналогичных работ, получим выражение для дисперсии оценки центральной частоты, используя границу Крамера–Рао. Её выражение для параметров, характеризующих спектральную плотность мощности $P(f, \theta)$, согласно, например, [6] имеет вид

$$\tilde{\Phi}_\theta = \left\| \frac{J}{F_s} \int_{-F_s/2}^{F_s/2} \frac{\partial P}{\partial \theta_l} \frac{\partial P}{\partial \theta_m} \frac{df}{P^2} \right\|. \tag{П2}$$

Для одного параметра — центральной частоты f_0 — имеем $\text{var } \hat{f}_0 \geq 1/\Phi_{f_0}$. После дифференцирования и замены переменных получаем

$$\tilde{\Phi}_{f_0} = \frac{2T_0}{\Delta f} \frac{B^2(\nu, \epsilon)}{(1 + \epsilon)^2}, \quad B^2(\nu, \epsilon) = \int_{-\nu}^{\nu} \left[\frac{W'(u)(1 + \epsilon)}{W(u) + \epsilon} \right]^2 du, \tag{П3}$$

где $\nu = F_s/\Delta f$, $\epsilon = P_n/P_{max}$ — величина, обратная входному отношению «сигнал/помеха», $T_0 = J/F_s$ — длительность регистрации сигнала. В интеграле (П3) мы пренебрегли возможным смещением максимума спектральной плотности мощности относительно центральной частоты полосового фильтра; это смещение несущественно при $\nu = F_s/\Delta f \gg 1$.

Конкретные численные оценки могут быть сделаны, например, для профилей Лоренца, когда $W = W^{(L)}(u) = 1/(1 + u^2)$, и Гаусса, когда $W = W^{(G)}(u) = \exp[-\ln(2)u^2]$. Для обоих профилей численные коэффициенты B монотонно возрастают с увеличением ν . Однако при $\epsilon > 0,1$ и $\nu > 3 \div 4$ рост коэффициента B с увеличением ν практически прекращается. Поскольку для практики интересен случай $\nu \gg 1$, достаточно знать коэффициенты B для $\nu \rightarrow \infty$, т. е. величину $B_\epsilon = B(\infty, \epsilon)$. Для профиля Лоренца она определяется простой формулой

$$B_\epsilon^{(L)} = \frac{\sqrt{2\pi}}{[1 + \sqrt{\epsilon/(1 + \epsilon)}]^{3/2}}, \tag{П4}$$

а для профиля Гаусса она находится численно. Зависимости коэффициентов $B_\varepsilon^{(L)}$ и $B_\varepsilon^{(G)}$ от отношения $\varepsilon = P_n/P_{\max}$ для $\varepsilon \geq 0,1$ показаны на рис. П2. Эти функции мало отличаются друг от друга и убывают с ростом ε , стремясь к пределам $\sqrt{\pi/4} = 0,89$ для $B_\varepsilon^{(L)}$ и $[(\pi/2) \ln 2]^{1/4} = 1,02$ для $B_\varepsilon^{(G)}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Томпсон А. Р., Моран Д. М., Свенсон Д. У. Интерферометрия и синтез в радиоастрономии. М.: Физматлит, 2003. 624 с.
2. Stergiopoulos S., Sullivan E. J. // J. Acoust. Soc. Am. 1989. V. 86, No. 1. P. 158.
3. Nutall A. H. // IEEE J. Ocean. Eng. 1992. V. 17, No. 1. P. 26.
4. Kim S., Youn D. H., Lee C. // IEEE J. Ocean. Eng. 2002. V. 27, No. 2. P. 322.
5. Теверовский В. И. // Томографические методы в физико-технических измерениях: Сб. научн. тр. М.: НПО ВНИИФТРИ, 1990. С. 103.
6. Kay S. Fundamentals of statistical signal processing. V. 1. Estimation theory. New Jersey: Prentice Hall, 1993. 595 p.
7. Далматов А. Д., Елисеев А. А., Лукошкин А. П. и др. Обработка сигналов в радиотехнических системах. Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1987. 400 с.
8. Иваненков А. С., Коротин П. И., Орлов Д. А. и др. // Гидроакустика. 2011. Вып. 14 (2). С. 117.
9. Landman D. A., Roussel-Dupre R., Tanigawa G. // Astrophys. J. 1982. V. 261. P. 732.
10. Соболев В. С., Журавель Ф. А. // Автометрия. 2010. Т. 46, № 6. С. 71.
11. Корякин Ю. А., Смирнов С. А., Яковлев Г. В. Корабельная гидроакустическая техника. Состояние и актуальные проблемы. СПб.: Наука, 2005. 410 с.
12. Лацинов А. В., Голубятников Г. Ю., Марков В. Н., Гварнери А. // Письма в Астрон. журн. 2007. Т. 33, № 2. С. 143.
13. Cazzoli G., Puzzarini C., Lapinov A. V. // Astrophys. J. 2003. V. 592, No. 2. P. L95.

Поступила в редакцию 22 июля 2013 г.; принята в печать 23 сентября 2013 г.

SYNTHESIS OF THE APERTURE DUE TO THE MOTION OF A SINGLE RECEIVER DURING LOCATION OF THE NARROWBAND NOISE SOURCES

A. S. Ivanenkov, P. I. Korotin, D. A. Orlov, A. A. Rodionov, and V. I. Turchin

Possibilities of the aperture synthesis using a single moving receiver during location of the sources emitting a random stationary narrowband signal are discussed. It is shown that the coordinates and projections of the source velocities can in this case be determined from the current estimates of the Doppler frequency shift. Using the Cramer–Rao boundary, we analyze accuracy of determining the parameters, which characterize the rectilinear trajectory of the source during the circumferential receiver motion depending on the synthesized-antenna size, emitted-signal bandwidth, signal-to-noise ratio, etc. Possible applications of the proposed variety of the aperture synthesis in underwater acoustics and radio astronomy are considered.