

УДК 537.876+537.871.62

## ОСОБЕННОСТИ РЕФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ОКРЕСТНОСТИ ПОВЕРХНОСТИ ЭЛЕКТРОННОГО ЦИКЛОТРОННОГО РЕЗОНАНСА В ПРЯМОЙ МАГНИТНОЙ ЛОВУШКЕ

*Е. Д. Господчиков<sup>1,2\*</sup>, О. Б. Смолякова<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup> Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород;

<sup>2</sup> Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера СО РАН, г. Новосибирск, Россия

В данной статье аналитически и численно исследованы особенности распространения электромагнитных волн в окрестности области электронного циклотронного резонанса в аксиально-симметричных магнитных ловушках. Рассмотрено совместное влияние неоднородностей концентрации плазмы, величины и направления магнитного поля на картину лучевых траекторий. Найдены критерии, разграничивающие случаи конструктивной рефракции (лучевые траектории стягиваются к оси ловушки, где происходит эффективное поглощение) и деструктивной рефракции (лучевые траектории расходятся от оси ловушки, и эффективный нагрев центральной части плазменного шнура невозможен). Показано, что неоднородности направления магнитного поля и концентрации плазмы, характерные для аксиально-симметричных магнитных ловушек, а также эффекты пространственной дисперсии существенным образом влияют на распространение электромагнитных волн в окрестности поверхности электронного циклотронного резонанса.

### ВВЕДЕНИЕ

Распространение и линейное резонансное поглощение электромагнитных волн электронного циклотронного диапазона частот исследуется в течение длительного времени, и основные результаты этих исследований вошли в монографии и учебники (см., например, [1, 2]). Интерес к этой проблеме обусловлен как важными прикладными задачами, связанными с высокочастотным нагревом и диагностикой плазмы в магнитных ловушках различной конфигурации, так и возможностью интерпретации широкого круга явлений в лабораторной и космической плазме. Вследствие малой длины волны распространение волн электронного циклотронного диапазона в лабораторных магнитных ловушках, как правило, с хорошей точностью описывается приближением геометрической оптики. Исследование лучевых траекторий в приближении геометрической оптики позволяет дать качественную, а зачастую и количественную оценку возможности нагрева, его эффективности и размеров области энерговыклада.

Лучевые траектории для волн электронного циклотронного диапазона в различных ловушках достаточно подробно изучались и изучаются численно (см., например, [3–6]). Очень часто качественное представление о лучевых траекториях может быть составлено на основе рассмотрения их поведения вблизи особых точек — различных резонансов среды. Применительно к верхнегибридному резонансу такое рассмотрение было, например, проведено аналитически в работе [7]. В ней было показано, что в зависимости от кривизны резонансной поверхности особые точки могут принадлежать как к устойчивым типам (узел и фокус), так и к неустойчивым (седло).

В зависимости от типа особой точки в случае верхнегибридного резонанса меняется характер трансформации электромагнитных волн в электростатические, которая обуславливает поглощение вблизи верхнегибридной частоты. Применительно к случаю циклотронного резонанса подобный анализ был впервые проведён в работе [8], где также было показано следующее: в зависимости от кривизны поверхности  $\omega = \omega_B(\mathbf{r})$  ( $\omega$  — частота волны,  $\omega_B = eB/(mc)$  — электронная

\* egos@appl.sci-nnov.ru

циклотронная частота) и соотношения между частотой излучения и плазменной частотой  $\omega_p^2 = 4\pi e^2 n_e / m$  могут реализовываться особые точки типа устойчивый узел или седло. Для прямых магнитных ловушек это означает, что лучевые траектории в первом случае притягиваются к оси ловушки, во втором — отталкиваются от оси ловушки. Так, для конфигураций магнитного поля с минимумом на оси ловушки для плазмы с концентрацией ниже критической ( $n_e < n_c = \omega^2 m / (4\pi e^2)$ ) реализовывалось состояние равновесия типа седло, а для плазмы с концентрацией выше критической — типа устойчивый узел.

Эти аналитические результаты были получены в приближении однородных направления магнитного поля и концентрации плазмы. Однако в магнитных ловушках, где градиент величины магнитного поля составляет малый угол с самим магнитным полем, такое приближение становится неприменимым. Кроме того, предсказания аналитической теории, основанной на приближении однородного по направлению магнитного поля, находились в противоречии с результатами как численного моделирования [4], так и экспериментов с нагревом плазмы в аксиально-симметричных магнитных ловушках [9]. В расчётах и экспериментах была продемонстрирована высокая эффективность электронного циклотронного нагрева плазмы с концентрацией ниже критической и резкое уменьшение эффективности нагрева плазмы с концентрацией, превышающей критическую, обусловленное сильной рефракцией.

В работе [10] анализировались особые точки гамильтоновых уравнений для геометро-оптических лучей в параксиальном магнитном поле с учётом неоднородности как величины, так и направления магнитного поля. В результате был получен критерий, разделяющий области параметров, при которых геометро-оптические лучи притягиваются к точке электронного циклотронного резонанса на оси ловушки или, наоборот, отталкиваются. Было показано, что учёт неоднородности направления магнитного поля может существенно влиять на картину геометро-оптических лучей в реальных магнитных ловушках. Позднее этот критерий был подтверждён более строгим анализом решений уравнений для геометро-оптических лучей в холодной магнитоактивной плазме с однородной электронной концентрацией и самосогласованно неоднородными величиной и направлением магнитного поля [11].

Указанные результаты были получены в приближении однородной концентрации плазмы. С другой стороны, хорошо известно, что вне области электронного циклотронного резонанса распространение лучей в большинстве прямых магнитных ловушек в основном определяется именно неоднородностью концентрации плазмы поперёк оси ловушки (см., например, [4, 12]). Это связано с тем, что характерный масштаб поперечной неоднородности концентрации плазмы обычно заметно короче характерного масштаба поперечной неоднородности магнитного поля. Таким образом, достаточно интересен учёт влияния неоднородности концентрации плазмы на лучевые траектории и в области электронного циклотронного резонанса. Кроме того, в самой окрестности резонанса приближение холодной плазмы может оказаться неприменимым из-за необходимости учитывать влияние пространственной дисперсии на распространение электромагнитных волн [13]. В данной работе аналитически рассматриваются вопросы о совместном влиянии неоднородности магнитного поля и концентрации плазмы, а также о влиянии эффектов пространственной дисперсии на лучевые траектории в приближении геометрической оптики в окрестности электронного циклотронного резонанса.

# 1. МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ И КОНЦЕНТРАЦИИ ПЛАЗМЫ В ОКРЕСТНОСТИ ЭЛЕКТРОННОГО ЦИКЛОТРОННОГО РЕЗОНАНСА В ПРЯМОЙ МАГНИТНОЙ ЛОВУШКЕ

В пренебрежении влиянием квазистатических токов, возбуждаемых в плазме, магнитное поле в ловушке вне источников поля описывается уравнениями

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = 0. \quad (1)$$

Если считать, что распределение магнитного поля симметрично относительно некоторой оси  $z$  и представлено в цилиндрической системе координат, связанной с этой осью, только компонентами  $B_z$  и  $B_r$ , то уравнения (1) примут вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rB_r)}{\partial r} = - \frac{\partial B_z}{\partial z}, \quad \frac{\partial B_r}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial r}. \quad (2)$$

Если известно магнитное поле на оси  $z$ ,  $B_z(0, z) = F(z)$ , то магнитное поле в остальном свободном от токов пространстве может быть найдено в виде разложения в ряд по координате  $r$ . В компактной записи это разложение имеет вид

$$B_z = J_0 \left( r \frac{\partial}{\partial z} \right) F(z), \quad B_r = -J_1 \left( r \frac{\partial}{\partial z} \right) F(z), \quad (3)$$

где  $J_0(x)$  и  $J_1(x)$  — нулевая и первая функции Бесселя соответственно<sup>1</sup>. В случае, если функция  $F(z)$  сама записана в виде степенного ряда, то ряды в формуле (3) становятся конечными.

Легко заметить, что неоднородность величины магнитного поля в параксиальном приближении тесно связана с неоднородностью направления магнитного поля, т.к. компонента  $B_r$  пропорциональна производным от величины магнитного поля на оси системы. При этом можно заметить, что старшие производные функции  $F(z)$  соответствуют высоким порядкам разложения компонент магнитного поля по поперечной координате.

Если магнитное поле на оси задать в виде разложения в ряд Тейлора в окрестности точки циклотронного резонанса  $z = 0$  как  $F(z) = B_0 (1 - z/L_{\parallel} + \dots)$ , где  $1/L_{\parallel}$  — коэффициент разложения (мы рассматриваем распространение электромагнитного излучения вдоль оси ловушки  $z$  со стороны магнитной пробки, поэтому выбран знак минус перед слагаемым  $z/L_{\parallel}$ ), то магнитное поле вблизи оси примет вид  $B_z(r, z) = B_0 (1 - z/L_{\parallel} + \dots)$ ,  $B_r(r, z) = B_0 r / (2L_{\parallel}) + \dots$ . Заметим, что при этом добавка к величине магнитного поля  $B = \sqrt{B_z^2 + B_r^2}$ , связанная с отличием расстояния  $r$  от нуля, возникает только во втором порядке разложения по поперечной координате. В том же порядке будет давать вклад в  $B_z$  член, связанный с второй производной от  $F(z)$ , который, таким образом, тоже необходимо учесть.

Таким образом, если мы хотим рассмотреть зависимость величины магнитного поля от поперечной координаты, то нам необходимо учитывать в выражении для поля на оси два члена разложения в окрестности точки резонанса. В результате мы приходим к следующей модели магнитного поля в параксиальном приближении:

$$F(z) = B_0 \left( 1 - \frac{z}{L_{\parallel}} + \frac{z^2}{2a} \right), \quad B_z = B_0 \left( 1 - \frac{z}{L_{\parallel}} + \frac{z^2}{2a} - \frac{r^2}{4a} \right), \quad B_r = B_0 \left( \frac{z}{2L_{\parallel}} - \frac{rz}{2a} \right). \quad (4)$$

<sup>1</sup> Под функцией от оператора дифференцирования понимается дифференциальный оператор, получающийся как соответствующий функции Бесселя степенной ряд. Формула (3) может быть проверена прямой подстановкой в уравнения (2).

Считая  $|z| \ll a/L_{\parallel}$  ( $a$  — соответствующий коэффициент разложения), мы можем пренебречь некоторыми членами и тогда получим, что модуль магнитного поля имеет вид

$$B \approx B_0 \left( 1 - \frac{z}{L_{\parallel}} - \frac{\xi r^2}{2L_{\parallel}^2} \right). \quad (5)$$

Поверхность постоянной величины поля  $B = B_0$  представляет собой параболу  $z = -\xi r^2/(2L_{\parallel})$ , кривизна которой определяется параметром  $\xi = L_{\parallel}^2/(2a) - 1/4$ . Угол между направлением магнитного поля и осью  $z$  описывается выражением

$$\operatorname{tg} \alpha \approx r/(2L_{\parallel}). \quad (6)$$

Таким образом, неоднородность магнитного поля по направлению определяется в параксиальном приближении первой производной величины магнитного поля на оси, а кривизна (или правильнее сказать, параболичность) поверхности постоянной величины магнитного поля — соотношением первой и второй производных вдоль оси.

Концентрацию плазмы можно считать постоянной вдоль магнитного поля, однако поперёк магнитного поля она может меняться довольно резко. Если пренебречь зависимостью концентрации плазмы от продольной координаты  $z$ , то естественно предположить параболическую зависимость от поперечной координаты

$$n_e = n_0 \left( 1 \mp \frac{r^2}{2r_0^2} \right). \quad (7)$$

Разные знаки в выражении (7) и далее соответствуют профилям с локальным максимумом (верхний знак) и локальным минимумом (нижний знак).

## 2. ЛУЧЕВЫЕ ТРАЕКТОРИИ ВБЛИЗИ ПОВЕРХНОСТИ ЦИКЛОТРОННОГО РЕЗОНАНСА

Рассмотрим лучевые траектории в плазме с магнитным полем и концентрацией, заданными соотношениями (4)–(7), при условии  $\omega = eB_0/(mc)$ . Будем считать, что излучение вводится со стороны сильного магнитного поля, что соответствует случаю квазипродольного ввода электромагнитного излучения в магнитную ловушку через область магнитной пробки. Также будем считать, что продольная по отношению к магнитному полю компонента волнового вектора  $\mathbf{k}$  много больше поперечной ( $k_{\parallel} \gg k_{\perp}$ ). Тогда дисперсионное уравнение для электромагнитных волн без азимутальной фазовой модуляции ( $k_{\varphi} = 0$ ) в приближении холодной плазмы примет вид [8]

$$H(r, z, N_r, N_z) = N_{\perp}^2 + 2(\varepsilon_{\parallel}/\varepsilon_{-}) N_{\parallel}^2 - 2\varepsilon_{\parallel} = 0, \quad (8)$$

где  $\varepsilon_{\parallel} = 1 - \omega_p^2/\omega^2$ ,  $\varepsilon_{-} = 1 - \omega_p^2/[\omega(\omega - \omega_B)]$ ,  $N_{\perp} = N_r \cos \alpha - N_z \sin \alpha$ ,  $N_{\parallel} = N_r \sin \alpha + N_z \cos \alpha$ ,  $N_r = k_r c/\omega$ ,  $N_z = k_z c/\omega$ .

Поскольку мы пренебрегли азимутальной компонентой  $k_{\varphi}$ , в дальнейшем рассматриваются плоские двумерные лучевые траектории, а значит, можно считать радиус  $r$  декартовой координатой. Чтобы избежать лишнего усложнения формул, будем полагать, что координата  $r$  изменяется в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Это упрощение никак не скажется на формулах (4)–(6), которые верны и в том случае, если величины  $B_r$  и  $B_z$  являются декартовыми компонентами магнитного поля в плоскости  $r, z$ .

Отметим несколько важных физических аспектов. Во-первых, вблизи поверхности электронного циклотронного резонанса (ЭЦР) антиэрмитова часть тензора диэлектрической проницаемости, обусловленная тепловым движением частиц, становится сравнима с эрмитовой. При этом

приближение холодной плазмы для описания распространения волн, вообще говоря, становится неприменимо. В соответствующем разделе работы мы подробнее рассмотрим, к чему могут приводить тепловые поправки, а здесь ограничимся «холодным» приближением.

Во-вторых, в рамках «холодного» приближения в окрестности циклотронного резонанса приближение геометрической оптики может нарушаться по причине того, что зависимость волнового числа от координат будет иметь особенность. Однако такая особенность формально возникает только при переходе к строго продольному распространению, во всех остальных случаях показатель преломления в окрестности циклотронной поверхности  $\omega = \omega_B$  остаётся конечным. Действительно, дисперсионное соотношение может быть приведено к виду

$$(2\varepsilon_{\parallel} + \varepsilon_{-}\theta) N^2 = 2\varepsilon_{\parallel}\varepsilon_{-}, \quad (9)$$

где  $\mathbf{N} = (N_z, N_r)$ . При формальном стремлении параметра  $\varepsilon_{-}$  к бесконечности из (9) следует дисперсионное соотношение  $N^2 \approx 2\varepsilon_{\parallel}/\theta^2$ . С другой стороны, в аксиально-симметричной магнитной ловушке единственный луч распространяется строго параллельно магнитному полю — на оси магнитной ловушки [8]. Всё это вместе позволяет пользоваться приближением геометрической оптики и вблизи поверхности циклотронного резонанса. Ниже будет показано, что, если не учитывать поглощение излучения и ограниченность плазменного шнура, то в процессе «распространения» рано или поздно геометро-оптический луч подойдёт к поверхности электронного циклотронного резонанса строго продольно  $N_{\perp}/N_{\parallel} \rightarrow 0$ . Также будет оценён размер области нарушения применимости геометрической оптики.

Воспользовавшись сделанными предположениями, будем считать, что выполняются следующие соотношения:  $N_{\perp} = N_r - \alpha N_z$ ,  $N_{\parallel} = N_z$ ,  $\alpha = r/(2L_{\parallel})$ ,  $2\varepsilon_{\parallel}/\varepsilon_{-} = -2\varepsilon_{\parallel}^0 [z/L_{\parallel} + \xi r^2/(2L_{\parallel}^2)]/v_0$ ,  $\varepsilon_{\parallel} = \varepsilon_{\parallel}^0 \pm r^2/(2L_{\perp}^2)$ ,  $v_0 = \omega_{p0}^2/\omega^2$ ,  $\varepsilon_{\parallel}^0 = 1 - v_0$ ,  $\omega_{p0}^2 = 4\pi n_0 e^2/m_e$ .

Лучевые траектории подчиняются уравнениям геометрической оптики, имеющим форму уравнений Гамильтона, в которых в роли гамильтониана выступает левая часть дисперсионного соотношения  $H(r, z, N_r, N_z) = 0$ , а в роли канонических импульсов — компоненты нормированного волнового вектора  $N_r$  и  $N_z$ . Для гамильтониана (8) с учётом сделанных предположений уравнения Гамильтона примут вид

$$\begin{aligned} \frac{dN_z}{dl} &= 2 \frac{\varepsilon_{\parallel}^0}{v_0} \frac{N_z^2}{L_{\parallel}}, & \frac{dN_r}{dl} &= 2 \frac{\varepsilon_{\parallel}^0}{v_0} \frac{\xi r}{L_{\parallel}^2} N_z^2 \pm 2 \frac{r}{L_{\perp}^2} + (N_r - \alpha N_z) \frac{N_z}{L_{\parallel}}, \\ \frac{dr}{dl} &= 2(N_r - \alpha N_z), & \frac{dz}{dl} &= \frac{4\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{-}} N_z - 2(N_r - \alpha N_z)\alpha. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь  $l$  — координата вдоль луча. Необходимо отметить, что в общем случае величина  $l$  не является истинной длиной лучевой траектории  $s$ , а связана с ней соотношением  $dl = |\partial H/\partial \mathbf{N}|^{-1} ds$ .

Четвёртое уравнение системы (10) можно заменить условием сохранения гамильтониана вдоль луча, из которого можно выразить координату  $z$ , не вошедшую в первые три уравнения системы. Введём безразмерные координаты  $\tau = l/L_{\parallel}$ ,  $\rho = r/L_{\parallel}$ . Из первого уравнения можно получить соотношение  $N_z = -v_0/(2\varepsilon_{\parallel}^0 \tau)$ . Подставив это равенство во второе и третье уравнения, получаем следующее:

$$\frac{dN_r}{d\tau} = \frac{v_0}{2\varepsilon_{\parallel}^0} \frac{\xi \rho}{\tau^2} \pm 2 \frac{\rho L_{\parallel}^2}{L_{\perp}^2} - \left( N_r + \frac{v_0}{4\varepsilon_{\parallel}^0} \frac{\rho}{\tau} \right) \frac{v_0}{2\varepsilon_{\parallel}^0} \frac{1}{\tau}, \quad \frac{d\rho}{d\tau} = 2 \left( N_r + \frac{v_0}{4\varepsilon_{\parallel}^0} \frac{\rho}{\tau} \right). \quad (11)$$

Продифференцировав по  $\tau$  второе уравнение системы (11), окончательно получаем

$$\frac{d^2 \rho}{d\tau^2} = \pm \frac{4\rho L_{\parallel}^2}{L_{\perp}^2} + \frac{v_0}{\varepsilon_{\parallel}^0} \frac{\rho}{\tau^2} \left( \xi - \frac{1}{2} \right). \quad (12)$$

Решения уравнения (12) могут быть выражены через функции Бесселя. Действительно, с помощью подстановки  $\rho = \sqrt{\tau} f(rL_{\parallel}/L_{\perp})$  уравнение (12) приводится к стандартной форме

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{df}{dx} - \left[ \pm 1 + \frac{1}{4} + \frac{v_0}{\varepsilon_{\parallel}^0} \left( \xi - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{x^2} \right] f = 0. \quad (13)$$

Таким образом, зависимость поперечной координаты  $\rho$  от координаты вдоль луча имеет вид (здесь мы выбрали верхний знак, что соответствует максимуму концентрации плазмы на оси ловушки)

$$\rho = C_1 \sqrt{\tau} J_p(2i\tau L_{\parallel}/L_{\perp}) + C_2 \sqrt{\tau} J_{-p}(2i\tau L_{\parallel}/L_{\perp}). \quad (14)$$

Здесь  $p = \sqrt{1 + 4v_0(\xi - 1/2)/\varepsilon_{\parallel}^0}/2$ ,  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные константы. Заменяя в выражении (14) отношение  $i/L_{\perp}$  на  $1/L_{\perp}$ , получим решение для нижнего знака, т. е. для минимума концентрации плазмы на оси ловушки. В зависимости от того, действительными или мнимыми являются аргументы и индексы функций Бесселя в выражении (14), более удобной может оказаться запись решений через модифицированные функции Бесселя. Однако в данной статье мы ограничимся формой (14). Когда индекс функций Бесселя целый, слагаемые в приведённом решении линейно зависимы, тогда одна из функций Бесселя должна быть заменена функцией Неймана.

Из решения (14) могут быть найдены лучевые траектории  $r(z)$  для произвольных «начальных» условий. Однако для анализа поведения лучей вблизи поверхности электронного циклотронного резонанса восстанавливать полностью лучевые траектории необязательно, достаточно проанализировать выражение (14).

Сделаем несколько общих замечаний. Приближение лучей к области электронного циклотронного резонанса соответствует пределам  $\tau \rightarrow +0$  или  $\tau \rightarrow -0$  (при этом формальный критерий корректности приближения геометрической оптики имеет вид  $|\tau| > (k_0 L_{\parallel})^{-1}$ ), где знак перед нулём в пределе определяется знаком параметра  $\varepsilon_{\parallel}^0$ : знак минус соответствует докритической плазме ( $\varepsilon_{\parallel}^0 > 0$ ), а знак плюс — закритической ( $\varepsilon_{\parallel}^0 < 0$ ). Однако уравнение (12) симметрично относительно смены знака  $\tau$ , поэтому, не ограничивая общности, можем считать  $\tau > 0$ . В области  $\tau \sim 1$ , поскольку  $N_{\parallel}^2 \approx \varepsilon_{-}$ , можно приближённо считать  $z \approx -\tau^2 L_{\parallel} (2\varepsilon_{\parallel}^0)^2/v_0$ . Таким образом, зависимость  $r(z)$  на луче в данном случае с точностью до тривиального масштабирования повторяет зависимость  $r(\tau)$ .

При  $\tau \rightarrow 0$  функции Бесселя могут быть заменены степенными,  $J_{\nu}(\tau) \rightarrow \tau^{\nu}$ . В этом случае одно частное решение стремится к нулю,  $\sqrt{\tau} J_p(2i\tau L_{\parallel}/L_{\perp}) \rightarrow 0$ . Второе частное решение  $\sqrt{\tau} J_{-p}(2i\tau L_{\parallel}/L_{\perp})$  стремится к бесконечности при  $4v_0(\xi - 1/2)/\varepsilon_{\parallel}^0 > 0$  и к нулю при  $4v_0(\xi - 1/2)/\varepsilon_{\parallel}^0 < 0$ . В первом случае лучи-решения, сходящиеся в точку электронного циклотронного резонанса на оси, становятся неустойчивыми, и реализуется положение равновесия типа седло. Во втором случае в зависимости от того, действительный индекс  $\nu$  функций Бесселя в решении (13) или мнимый, в точке электронного циклотронного резонанса на оси реализуются положения равновесия типа устойчивый узел или фокус. Таким образом, критерий, разделяющий области устойчивости и неустойчивости резонансной точки на оси ловушки, при учёте неоднородности концентрации плазмы такой же, как и без учёта такой неоднородности [10].

В случае, если параметр кривизны поверхности электронного циклотронного резонанса принимает «пограничное» значение  $\xi = 1/2$ , точности разложения гамильтониана по координате  $r$ , использованного для получения уравнений (10), недостаточно для моделирования лучевых траекторий. Более подробный анализ показывает, что бифуркация со сменой характера устойчивости происходит через появление дополнительных особых точек на резонансной поверхности вне оси ловушки [10].

Рассмотрим на качественном уровне, каким образом на поведение лучевых траекторий влияет неоднородность концентрации плазмы. Если выполнено условие

$$\frac{L_{\parallel}}{L_{\perp}} \leq \frac{1}{2} \left| \frac{\varepsilon_{\parallel}^0}{v_0} \sqrt{1 + 4 \frac{v_0}{\varepsilon_{\parallel}^0} (\xi - 1/2)} \right| \quad (15)$$

во всей окрестности области электронного циклотронного резонанса (там, где  $N_{\parallel} \gg 1$ ), функция Бесселя может быть заменена степенной функцией. В этом случае картина лучевых траекторий полностью определяется неоднородностью магнитного поля. Когда выполнено противоположное (15) неравенство, неоднородность концентрации плазмы влияет на поведение лучей даже в окрестности электронного циклотронного резонанса. Отметим, что решение (13) предсказывает иную зависимость картины лучевых траекторий от характеристик распределения концентрации плазмы по сравнению со случаем [12] квазипродольного распространения электромагнитных волн в областях прямой ловушки, далёких от поверхности электронного циклотронного резонанса.

Так, из решений уравнений (10) следует, что картина лучевых траекторий зависит только от того, локальный максимум или минимум имеет профиль концентрации на оси ловушки. Решение для первого случая приведено в формуле (14), для второго оно получается заменой множителя  $i/L_{\perp}$  на  $1/L_{\perp}$  в аргументах функций Бесселя. Таким образом, в одном случае функции Бесселя имеют чисто мнимый аргумент, а в другом — чисто действительный. Нетрудно понять, что для лучевых траекторий, соответствующих решению системы (10), профиль с минимумом концентрации на оси является «стабилизирующим», а профиль с максимумом на оси — «дестабилизирующим». При этом не важно, больше или меньше критической величины концентрация плазмы на оси ловушки, в отличие от случая, рассмотренного в работе [12], где при одном и том же характере профиля концентрации картина лучевых траекторий была противоположна для докритической и закритической плазмы.

Однако необходимо отметить, что область применимости самих уравнений (10) для описания лучевых траекторий в случае, когда масштаб неоднородности концентрации плазмы много меньше масштаба неоднородности магнитного поля, ограничивается небольшой окрестностью поверхности электронного циклотронного резонанса. Действительно, при разложении величины  $2\varepsilon_{\parallel}/\varepsilon_{-}$  в ряд члены, пропорциональные произведению  $zr^2$ , могут быть корректно отброшены по сравнению с учтёнными нами членами, пропорциональными  $r^2$ , только если выполняется неравенство

$$z/L_{\parallel} \ll \xi |1 - v_0| v_0 (L_{\perp}/L_{\parallel})^2. \quad (16)$$

Неравенство (15) в случае  $L_{\perp}/L_{\parallel} \ll 1$ , является гораздо более сильным, чем неравенство  $z/L_{\parallel} \ll 1$ , которое и определяет «окрестность» поверхности электронного циклотронного резонанса в общем случае. В той области, где выполнено неравенство (15), поведение лучевых траекторий определяется уже исключительно неоднородностью величины и направления магнитного поля, что легко можно увидеть из решения (13). Чтобы корректно перейти к областям, где заметно скажется неоднородность концентрации плазмы (обычно обладающая заметно меньшим характерным масштабом), необходимо учесть в гамильтониане члены, пропорциональные произведению  $zr^2$  и связанные с неоднородностью концентрации в множителе  $2\varepsilon_{\parallel}/\varepsilon_{-}$ . Это можно сделать, например, с помощью следующей серии рассуждений.

Уравнение Гамильтона  $dN_z/d\tau = -\partial H/\partial z$  не содержит производных по поперечной координате, поэтому может быть найдено его приближённое решение

$$N_z(\tau) = -\frac{v_0}{2\varepsilon_{\parallel}^0 \tau}. \quad (17)$$

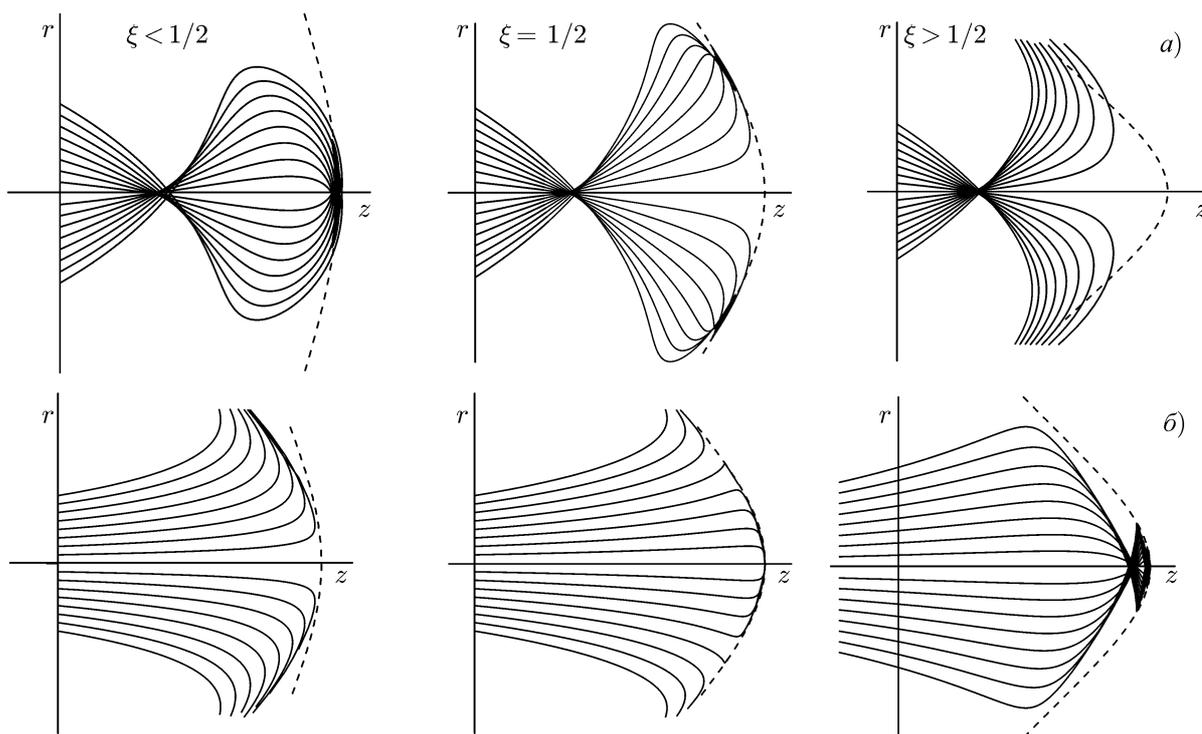


Рис. 1. Картина лучевых траекторий в плазме с концентрацией меньше (а) и больше (б) критической при различных значениях параметра  $\xi$ . Штриховой линией обозначена поверхность циклотронного резонанса

Далее мы воспользуемся уже упоминавшимся выше соображением, что там, где неоднородность концентрации становится важна, можно приближённо считать  $N_{\parallel}^2 \approx \varepsilon_-$ . Это позволяет найти явную зависимость  $z(\tau) \approx -\tau^2 L_{\parallel} (2\varepsilon_{\parallel}^0)^2 / v_0$ . Если теперь учесть в уравнениях Гамильтона для величин  $N_r$  и  $\rho$  члены вида  $(\rho L_{\parallel} / L_{\perp}) (z N_z^2 / L_{\parallel})$ , подставив в них явные зависимости  $z(\tau)$  и  $N_z(\tau)$ , то в итоге мы получим уравнение для поперечной координаты  $\rho$  луча в следующем виде:

$$\frac{d^2 \rho}{d\tau^2} = \pm \left( 1 - \frac{1}{v_0} \right) \frac{4\rho L_{\parallel}^2}{L_{\perp}^2} + \frac{v_0}{\varepsilon_{\parallel}^0} \frac{\rho}{\tau^2} \left( \xi - \frac{1}{2} \right). \tag{18}$$

Уравнение (18) отличается от уравнения (11) множителем  $1 - 1/v_0$  перед членом, описывающим влияние неоднородности концентрации плазмы. Видно, что учтённые таким образом члены оказываются такого же порядка, как и часть тех, которые мы учитывали ранее. Рассуждения, которые привели нас к уравнению (17), не являются математически строгими, однако они позволяют заметно расширить область применимости найденных нами решений.

Решения уравнения (17) имеют вид

$$\rho = C_1 \sqrt{\tau} J_p \left( 2i\tau \sqrt{1 - 1/v_0} L_{\parallel} / L_{\perp} \right) + C_2 \sqrt{\tau} J_{-p} \left( 2i\tau \sqrt{1 - 1/v_0} L_{\parallel} / L_{\perp} \right), \tag{19}$$

где порядок  $p$  функций Бесселя такой же, как в выражении (14),  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные константы. Таким образом, если говорить о лучевых траекториях, соответствующих полному лучевому гамильтониану (8), а не приближённому, порождающему уравнения (9), то можно ожидать следующее. Профиль концентрации с максимумом на оси будет «стабилизирующим» для докритиче-

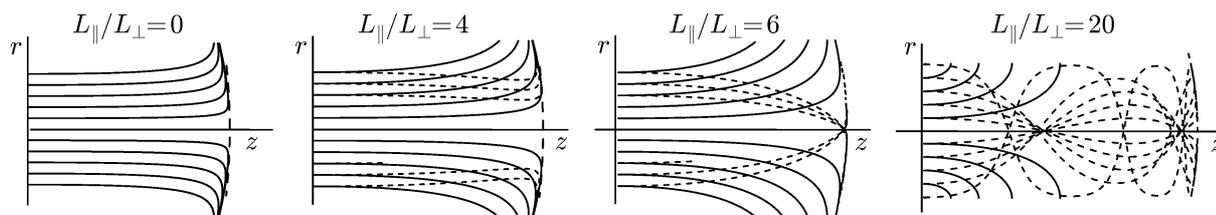


Рис. 2. Картина лучевых траекторий в плазме с концентрацией ниже критической при  $\xi = 1$  и различных отношениях  $L_{\parallel}/L_{\perp}$ . Сплошными линиями показаны лучевые траектории при минимуме концентрации плазмы на оси ловушки, штриховыми — при максимуме

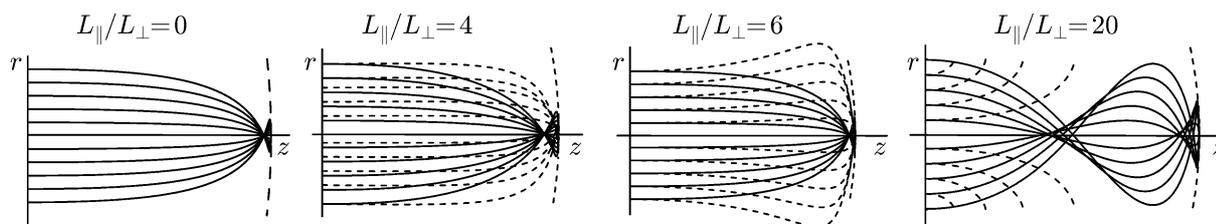


Рис. 3. То же, что и на рис. 2, для плазмы с концентрацией выше критической при  $\xi = 1$

ской плазмы, а для закритической таковым будет профиль с минимумом на оси, как и в работе [12], где рассматривались области, далёкие от электронного циклотронного резонанса.

В качестве иллюстрации и проверки полученных аналитических выводов приведём результаты численного моделирования лучевых траекторий, которые соответствуют электромагнитным волнам, распространяющимся в аксиально-симметричной ловушке со стороны сильного поля в окрестности поверхности электронного циклотронного резонанса. Хотя детальный вид лучевых траекторий зависит от «начальных» параметров (точки в пространстве и угла выхода по отношению к магнитному полю), основные свойства лучевых траекторий (например «притяжение» или «отталкивание» от оси ловушки) не зависят от «начальных» параметров. Поэтому в данной работе мы, не ставя себе целью провести моделирование всех возможных траекторий, зададим пучок лучей следующим образом: при постоянной координате  $z$  будем для различных расстояний  $r_{\perp}$  задавать «начальный» волновой вектор параллельным магнитному полю, а волновое число будем находить из дисперсионного уравнения. На рис. 1 приведены лучевые траектории в плазме с однородной концентрацией, выше (рис. 1а) и ниже (рис. 1б) критической для трёх значений параметра  $\xi$ . Хорошо виден переход между случаями устойчивой и неустойчивой особой точки на оси ловушки через бифуркацию с образованием дополнительных особых точек  $[\sin(\alpha) \partial/\partial z - \cos(\alpha) \partial/\partial r] \omega_B = 0$  (мультистабильный режим [10]). Более подробно численный анализ лучевых траекторий в приближении однородной концентрации плазмы проводился в [10, 11].

На рис. 2–5 приведены результаты численного решения уравнений Гамильтона для лучевых траекторий при различной кривизне поверхности электронного циклотронного резонанса и для различных профилей концентрации плазмы (с минимумом и максимумом на оси). Хорошо видно, что результаты численного моделирования подтверждают результаты теоретического анализа. Также заметно, что уже при условии  $L_{\parallel}/L_{\perp} \geq 6$  картина лучевых траекторий в основном определяется неоднородностью концентрации плазмы, а не изменением магнитного поля.

Таким образом, можно сделать следующий вывод. Для компактных прямых магнитных ловушек (они используются, например, в источниках плазмы и ионов на основе ЭЦР-разряда [14]), в которых отношение  $L_{\parallel}/L_{\perp} \leq 4$ , картина лучевых траекторий и эффективность нагрева в значительной мере определяются распределением модуля и направления магнитного поля [12]. На-

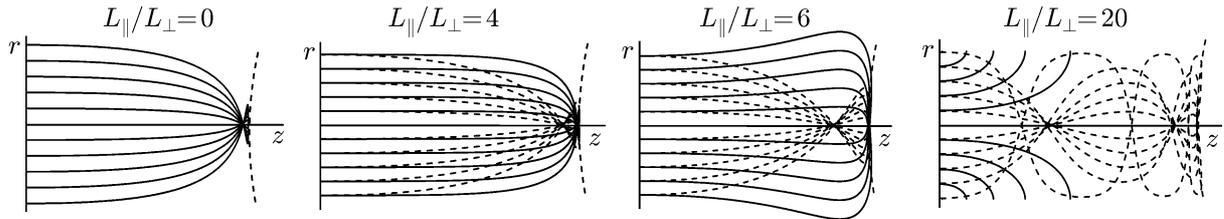


Рис. 4. То же, что и на рис. 2, для плазмы с концентрацией ниже критической при  $\xi = -1$

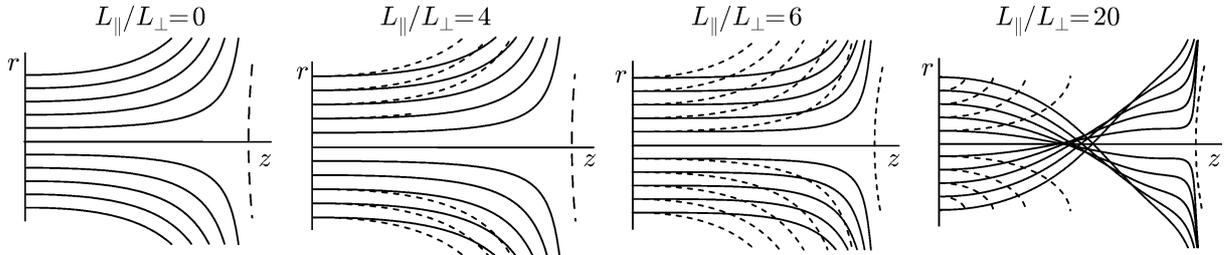


Рис. 5. То же, что и на рис. 2, для плазмы с концентрацией выше критической при  $\xi = -1$

против, в крупномасштабных прямых магнитных ловушках (они используются в интересах реализации управляемого термоядерного синтеза [15]), в которых  $L_{\parallel}/L_{\perp} \geq 10$ , картина лучевых траекторий в холодной плазме даже в окрестности поверхности электронного циклотронного резонанса в основном определяется профилем концентрации плазмы.

### 3. ВЛИЯНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСПЕРСИИ

В близкой окрестности циклотронного резонанса может нарушаться приближение холодной плазмы, и в этом случае необходимо учитывать эффекты пространственной дисперсии, связанной с тепловым движением частиц.

В работе [16] было продемонстрировано, что для квазипродольного распространения учёт тепловых эффектов сводится к замене в дисперсионном соотношении величины  $\epsilon_{-}$  на

$$\epsilon_{-}^w(N_{\parallel}) = 1 + \frac{i\omega_L^2}{\omega^2\beta_T N_{\parallel}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} W(Z),$$

где  $\beta_T = [T_e/(mc)]^{1/2}$  — отношение тепловой скорости электронов к скорости света,  $W(Z) = \exp(-Z^2) [1 + (2i/\sqrt{\pi}) \int_0^Z \exp(\xi^2) d\xi]$  — функция Крампа от аргумента  $Z = (\omega - \omega_B)/(\sqrt{2} N_{\parallel} \omega \beta_T)$ . В случае  $\beta_T \ll 1$  мы можем разложить функцию Крампа в ряд по величине  $1/Z$ . В первом порядке получится компонента  $\epsilon_{-}$ , соответствующая «холодному» приближению. В разложении до следующего порядка,

$$\epsilon_{-}^w = \epsilon_{-} - \frac{\omega_p^2 \beta_T^2 \omega N_{\parallel}^2}{(\omega - \omega_B)^3}, \tag{20}$$

исследуем поведение геометро-оптических лучей с соответствующим образом «модифицированным» гамильтонианом

$$H = N_{\perp}^2 + \frac{2\epsilon_{\parallel} N_{\parallel}^2}{\epsilon_{-} - \omega_p^2 \beta_T^2 \omega N_{\parallel}^2 (\omega - \omega_B)^{-3}} - 2\epsilon_{\parallel} = 0. \tag{21}$$

Отметим, что ряд, в который раскладывается функция Крампа, быстро расходится при  $|Z| \leq 1$ , и «модифицированный» гамильтониан перестаёт адекватно соответствовать точному дисперсионному соотношению, однако для иллюстрации влияния тепловых поправок такой подход оправдан.

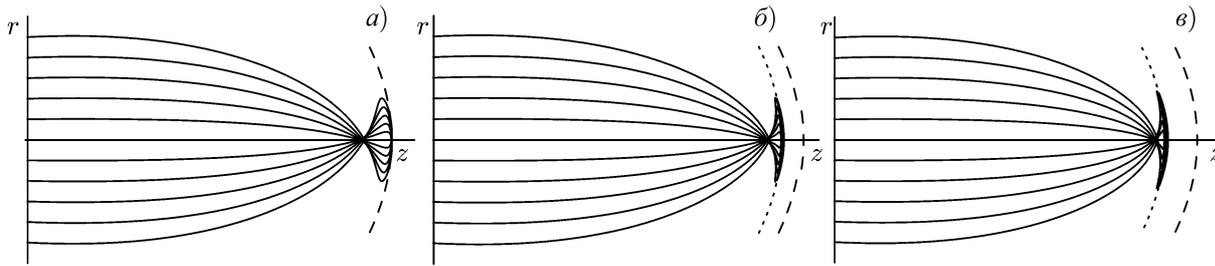


Рис. 6. Картина лучевых траекторий при температуре  $T_e = 0$  (панель *a*),  $T_e = 5$  эВ (*б*) и  $T_e = 50$  эВ (*в*). Штриховой линией обозначена поверхность  $\omega_B = \omega$ , пунктирной — поверхность  $\omega_B = \omega + (\beta_T^2 \omega_p^2 \omega)^{1/3}$

Рассматривая получившееся дисперсионное уравнение при поперечной компоненте волнового вектора, стремящейся к нулю ( $N_{\perp}^2 \rightarrow 0$ ), получаем, что резонанс  $N_{\parallel}^2 \rightarrow \infty$  достигается в точке, где выполняется соотношение  $\omega_B - \omega = (\beta_T^2 \omega_p^2 \omega)^{1/3}$ . Таким образом, можно ожидать, что для гамильтониана (20) лучевые траектории качественно будут иметь тот же вид, что и для «холодного» лучевого гамильтониана, но роль резонансной поверхности будет играть поверхность

$$\omega_B = \omega + (\beta_T^2 \omega_p^2 \omega)^{1/3} \approx \omega [1 + (p_e/p_B)^{1/3}], \quad (22)$$

где  $p_e/p_B$  — отношение давления плазмы и магнитного давления.

Резонансная поверхность сдвигается в сторону магнитной пробки. Заметим, что даже для очень холодной ( $T_e \approx 10$  эВ,  $\beta_T^2 \approx 2 \cdot 10^{-5}$ ) и весьма разреженной ( $\omega_p^2/\omega_B^2 \approx 0,4$ ) плазмы относительный сдвиг  $(\beta_T^2 \omega_p^2/\omega_B^2)^{1/3} \approx 0,08$  заметен.

На рис. 6 приведены примеры расчёта лучевых траекторий с гамильтонианом (21) для различных температур. Хорошо видно, что роль поверхности циклотронного резонанса для лучей начинает играть поверхность, на которой выполняется условие (22). Как результат, область энерговклада будет существенно сдвигаться в сторону магнитной пробки. На рис. 6 штриховой линией обозначена поверхность  $\omega = \omega_B$ , пунктирной — поверхность, где выполнено равенство (22).

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе аналитически и численно исследовано поведение лучевых траекторий вблизи поверхности циклотронного резонанса в аксиально-симметричном магнитном поле с учётом совместного влияния неоднородностей магнитного поля (как величины, так и направления) и концентрации плазмы и эффектов, связанных с тепловым движением электронов. Получены и проанализированы выражения, описывающие траектории геометро-оптических лучей. Показано, что критерий устойчивости особых точек, полученный в работе [10] в приближении однородной концентрации плазмы, остаётся неизменным при учёте неоднородности концентрации. Этот критерий разделяет области параметров, при которых возможен и не возможен эффективный нагрев плазмы в прямых магнитных ловушках с масштабами неоднородности концентрации плазмы и магнитного поля одного порядка (например, в прямой магнитной ловушке, входящей в ЭЦР-источник многозарядных ионов SMIS 37/75 [14]).

Продемонстрировано, что неоднородность концентрации плазмы и эффекты пространственной дисперсии могут существенным образом влиять на картину лучевых траекторий в прямой магнитной ловушке и не могут быть отброшены даже при качественной оценке эффективности нагрева на электронном циклотронном резонансе и положения области энерговклада. Более того, в крупномасштабных прямых магнитных ловушках, в которых  $L_{\perp} \ll L_{\parallel}$  (например, в установке

ГДЛ [15]), именно неоднородность концентрации плазмы будет в основном определять картину лучевых траекторий, в том числе и в области существенного резонансного циклотронного поглощения. В данной работе, описывая лучевые траектории в окрестности поверхности электронного циклотронного резонанса, мы намеренно не касались вопросов, связанных с самим электронным циклотронным поглощением вдоль этих траекторий. Естественно, это поглощение приведёт к тому, что при достижении определённой оптической толщины форма луча уже никак не будет влиять на эффективность нагрева плазмы в ловушке, т.к. вся энергия поглотится ранее. Это очевидное свойство подкрепляет утверждение о том, что в крупномасштабных установках эффективность нагрева будет в основном определяться профилем концентрации плазмы.

Исследование эффектов пространственной дисперсии (раздел 3) выполнено в рамках гранта Российского научного фонда (грант 14-12-01007). Е. Д. Господчиков благодарит за поддержку работы Совет по грантам при Президенте Российской Федерации для государственной поддержки молодых учёных (грант МД-1736.2014.2).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Наука, 1967.
2. Stix T. H. The theory of plasma waves. New York: McGraw-Hill, 1962.
3. Porkolab M., Friedland L., Bernstein I. B. // Nucl. Fusion. 1981. V. 21. P. 1643.
4. Господчиков Е. Д., Смолякова О. Б., Суворов Е. В. // Физика плазмы. 2007. Т. 33, № 5. С. 472.
5. Urban J., Decker J., Preinhaelter J., et al. // EPS Series. 2010. V. 34a. 37th EPS Conf. Plasma Phys. / Ed. by C. McKenna. P. 5.154.
6. Shalashov A. G., Gospodchikov E. D., Smolyakova O. B., et al. // Phys. Plasmas. 2012. V. 19. Art. no. 052503
7. Пилия А. Д., Фёдоров В. И. // ЖЭТФ. 1970. Т. 60, № 1. С. 389.
8. Звонков А. В., Тимофеев А. В. // Физика плазмы. 1988. Т. 14. С. 1270.
9. Geller R. // Rev. Sci. Instrum. 1998. V. 69, No. 3. P. 1302.
10. Господчиков Е. Д., Смолякова О. Б. // Физика плазмы. 2011. Т. 37, № 9. С. 824.
11. Bagulov D. S., Kotelnikov I. A. // Phys. Plasmas. 2012. V. 19. Art. no. 082502.
12. Голубев С. В., Господчиков Е. Д., Смолякова О. Б. и др. // Физика плазмы. 2012. Т. 38, № 6. С. 488.
13. Tokman M. D., Westerhof E., Gavrilova M. A. // Plasma Phys. Control. Fusion. 2000. V. 42. P. 91.
14. Golubev S. V., Razin S. V., Semenov V. E., et al. // Rev. Sci. Instrum. 2000. V. 71, No. 2. P. 669.
15. Bagryansky P. A., Demin S. P., Gospodchikov E. D., et al. // Fusion Sci. Technol. 2013. V. 63, No. 1T. P. 40.
16. Господчиков Е. Д., Суворов Е. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 2005. Т. 48, № 8. С. 641.

Поступила в редакцию 1 августа 2014 г.; принята в печать 27 сентября 2014 г.

### THE FEATURES OF REFRACTION OF ELECTROMAGNETIC WAVES NEAR THE ELECTRON CYCLOTRON RESONANCE SURFACE IN AN OPEN MAGNETIC TRAP

*E. D. Gospodchikov and O. B. Smolyakova*

Some features of the electromagnetic wave propagation near the electron cyclotron resonance region in axisymmetric magnetic traps are studied both analytically and numerically. The ray paths are

obtained with allowance for the plasma density inhomogeneities, magnetic field direction, and magnetic field strength. Criteria for the limiting cases of constructive refraction (the ray paths are attracted to the trap axis, where effective absorption takes place) and destructive refraction (the ray paths are expelled from the trap axis, and efficient heating of the central part of the plasma column is not possible) are found. It is shown that the inhomogeneities of the magnetic field direction and plasma density, which are typical of axisymmetric magnetic traps, as well the spatial dispersion effects, can strongly affect the electromagnetic wave propagation near the electron cyclotron resonance surface.