

УДК 535.36

## СЛАБАЯ ЛОКАЛИЗАЦИЯ ВОЛН В СРЕДАХ С ГРАДИЕНТОМ ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ: ДИФФУЗИОННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Я. А. Илюшин \*

Московский госуниверситет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия

Рассмотрен эффект слабой локализации волн в слоистой рассеивающей среде с регулярным градиентом коэффициента преломления. Рассмотрение проведено в диффузионном приближении теории переноса излучения. Показано удовлетворительное качественное согласие найденного решения с результатами численного моделирования.

### ВВЕДЕНИЕ

Когерентное усиление обратного рассеяния, или слабая локализация, интенсивно исследуется начиная с 70-х годов прошлого века [1]. Спустя некоторое время было обращено внимание на проявления этого эффекта в радиолокации диффузных целей [2, 3]. Во всех работах до последнего времени исследовались среды с однородным средним коэффициентом преломления. В ряде ситуаций, однако, требуется учёт регулярных градиентов коэффициента преломления в слоисто-стратифицированной среде, например в ионосферной и солнечной плазме [4, 5] и ледяных и снежных покровах Земли и небесных тел [6].

Недавно были опубликованы первые аналитические и численные результаты по слабой локализации в неоднородных средах [7, 8]. Для сильно вытянутых индикатрис рассеяния получены асимптотические решения скалярного уравнения переноса излучения в малоугловом приближении для основных фундаментальных типов источников (плоский мононаправленный, точечный мононаправленный, точечный изотропный) [7]. На основе полученных результатов известные асимптотические выражения для периферийных областей конуса когерентного обратного рассеяния [9] были обобщены на случай неоднородных сред. Также было найдено решение задачи о когерентном обратном рассеянии в диффузионном приближении [8], аналогичное известному результату [10] для сред с однородным коэффициентом преломления.

Полученное в работе [8] решение, вследствие принятых в ней приближений и допущений, не вполне удовлетворительно согласуется с результатами численного моделирования конечно-разностным методом и методом Монте-Карло. В частности, в отличие от результатов расчёта численными методами, это решение полностью инвариантно относительно знака градиента коэффициента преломления среды. Мотивацией настоящего исследования является уточнение решения этой задачи в диффузионном приближении с целью достижения лучшего согласия с численным моделированием.

### 1. КОГЕРЕНТНОЕ УСИЛЕНИЕ ВОЛН В РАССЕЙВАЮЩИХ СРЕДАХ

Принцип возникновения эффекта когерентного усиления обратного рассеяния в полубесконечной среде с плоской границей схематически показан на рис. 1. Хорошо известно [1, 9, 10], что этот эффект обусловлен вкладом циклических (т. е. максимально скрещённых) диаграмм. Если не учитывать поляризацию излучения, то одна из встречных траекторий циклической диаграммы

\* ilyushin@physics.msu.ru

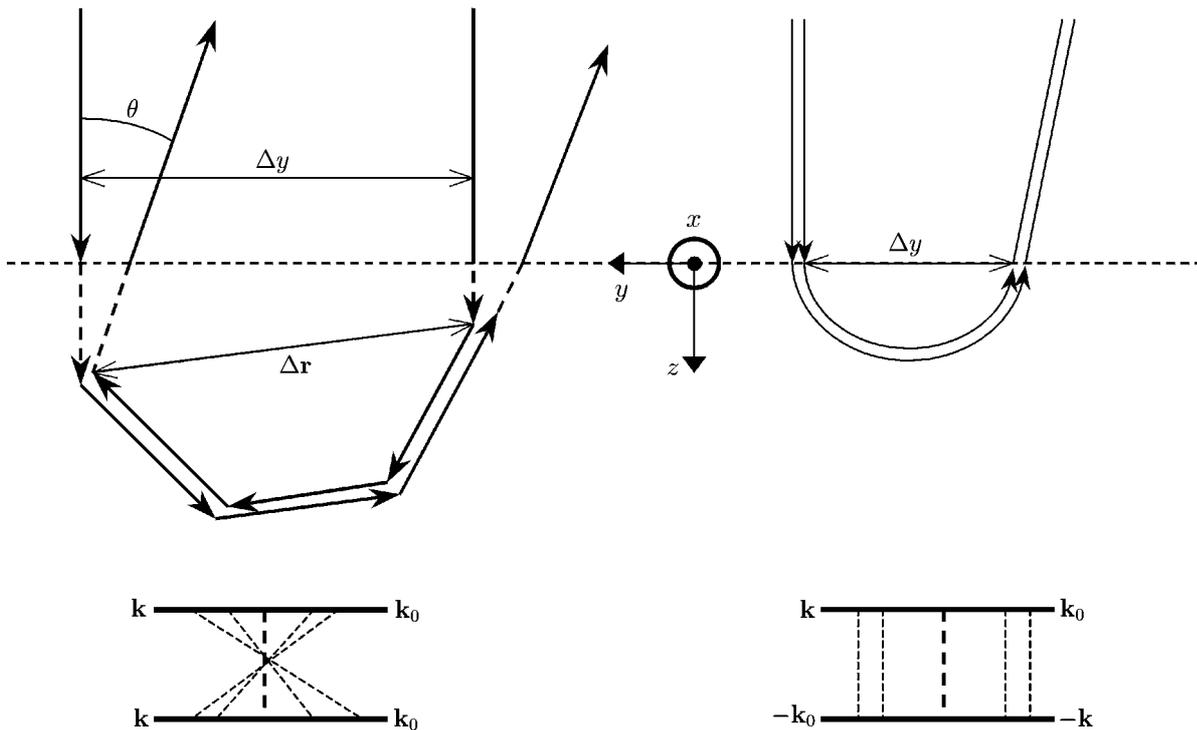


Рис. 1. Эквивалентность лестничных и циклических диаграмм рассеяния

может быть обращена в силу принципа взаимности. Следовательно, циклические и лестничные диаграммы в рамках скалярной волновой теории эквивалентны, т. е. их вклады равны друг другу с точностью до фазового интерференционного множителя  $\exp(ik \Delta y \theta)$  (а в направлении строго назад эти вклады равны точно).

Поскольку фазовый угол  $\theta$  мал, можно пренебречь зависимостью амплитуды рассеяния от этого угла в первом и последнем актах рассеяния в каждой диаграмме. Такое приближение разумно, поскольку индикатриса рассеяния отдельного рассеивателя имеет характерную ширину  $\lambda/d$  радиан, где  $d$  — типичный характерный размер отдельного рассеивателя. С другой стороны, угловой масштаб пика когерентного обратного рассеяния составляет величину порядка  $\lambda/\Delta r \ll \ll \lambda/d$ , поскольку  $d \ll \Delta r$ . Таким образом, малые изменения угла рассеяния в пределах угловой ширины обратного пика существенно не влияют на амплитуду рассеяния в отдельном акте рассеяния.

Аналогично, вследствие малости фазового угла  $\theta$ , мы пренебрегаем различием между участками диаграмм до первого и после последнего рассеяния в среде (показано слева на рис. 1 пунктирными линиями). Таким образом, далее мы рассматриваем приближённо эквивалентную диаграмму (рис. 1, справа).

Тем самым вклад любой максимально скрещённой диаграммы в обратно рассеянное излучение равен

$$I_X = I_L \exp(ik \Delta y \theta), \tag{1}$$

где  $I_L$  — интенсивность на выходе соответствующей лестничной диаграммы,  $k$  — волновое число. Поскольку экспоненциальный множитель в (1) является общим для всех диаграмм с общими началом и концом, сумма вкладов всех максимально скрещённых диаграмм, соединяющих две

заданные точки с координатами  $x, y$  и  $x', y'$  на поверхности среды, выражается формулой

$$\Sigma I_X = \Sigma I_L \exp(ik \Delta y \theta), \quad (2)$$

где  $\Sigma I_L$  — суммарная интенсивность обратного рассеяния по всем лестничным диаграммам рассеяния излучения, входящего в среду в заданной точке нормально к поверхности её границы. Эта интенсивность представляет собой решение уравнения переноса излучения с точечным мононаправленным источником.

Для вычисления суммарной наблюдаемой интенсивности когерентного обратного рассеяния выражение (2) необходимо проинтегрировать по всей площади освещённой поверхности и по всей наблюдаемой области границы среды:

$$I_c(\theta) = \iint \Sigma I_L(x, x + \Delta x, y, y + \Delta y) \exp(ik \Delta y \theta) dx dy dx' dy' \propto \int \Sigma I_L(x, x + \Delta x, y, y + \Delta y) \exp(ik \Delta y \theta) d\Delta x d\Delta y, \quad (3)$$

где  $\Delta x = x - x'$ ,  $\Delta y = y - y'$ . Знак пропорциональности в (3) имеет место в случае однородной среды и равномерного освещения, если размеры освещённой и наблюдаемой областей границы среды велики по сравнению с характерной дальностью распространения излучения в среде, т. е. транспортной длиной [11]. При этом  $\Sigma I_L(\Delta x, \Delta y)$  зависит только от разностей координат. Следовательно, выражение (3) есть фурье-трансформанта решения уравнения переноса излучения с точечным мононаправленным источником. Аналогично, интенсивность некогерентного рассеяния равна фурье-компоненте для  $\theta = 0$  решения уравнения переноса излучения  $I_c(0)$ . Применённое здесь приближённое сведение задачи о когерентном обратном рассеянии к решению уравнения переноса излучения широко используется в практических расчётах, а его справедливость многократно обсуждалась в литературе [9, 10].

В настоящей работе, следуя [7, 8], ограничимся рассмотрением коэффициента преломления вида

$$n(z) = n(z_1) \exp[\gamma(z - z_1)] \quad (4)$$

в ограниченном плоском слое среды  $z_1 \leq z \leq z_2$ , где логарифмическая производная коэффициента преломления среды  $\gamma = \partial \ln n(z) / \partial z = \text{const}$ . Предположим, что коэффициент преломления  $n(z)$  однороден за пределами слоя и непрерывен на границах среды, т. е.  $n(z) = n(z_1)$  при  $z < z_1$  и  $n(z) = n(z_1) \exp[\gamma(z_2 - z_1)]$  при  $z > z_2$ . Также ограничимся исследованием случая нормального падения излучения на границу среды.

В работе [10] рассматриваемая задача решалась с помощью приближённой диаграммы рассеяния (рис. 2а). При этом перенос излучения из точки 1 в точку 2 описывался функцией Грина

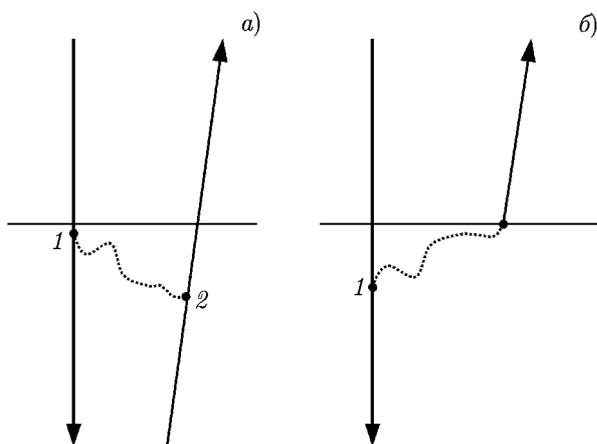


Рис. 2. К выводу решения в диффузионном приближении (21): а — диаграмма рассеяния, использованная в работах [10] и [8], б — упрощённая диаграмма, рассматриваемая в настоящей работе. Пунктирная линия — диффузное распространение излучения

уравнения переноса излучения в диффузионном приближении (пунктирная линия на диаграмме), а полное решение затем вычислялось интегрированием по координатам точек 1 и 2 (первое и последнее рассеяния в среде). В работе [8] это решение было непосредственно обобщено на случай среды с градиентом коэффициента преломления. При этом на участке лучевой траектории в среде после точки 2 (последнее рассеяние) эффекты рефракции не учитывались, что вносило в решение значительную систематическую погрешность. В частности, решение оказывается полностью инвариантным относительно знака градиента коэффициента преломления, что плохо согласуется с результатами численного моделирования.

Учёт рефракции на последнем участке диаграммы значительно усложняет получение приближённого решения задачи для неоднородной среды в замкнутой аналитической форме. С другой стороны, выделение последнего рассеяния в диаграмме, проведённое в работе [10], было обусловлено не физическими соображениями, а скорее применёнными в этой работе вычислительными приёмами. В настоящей работе последний акт рассеяния вместе с дальнейшим распространением излучения в среде включается в диффузионную часть диаграммы (рис. 2). Это позволяет естественно учесть рефракцию на этом участке лучевой траектории, и, таким образом, одновременно уточнить и упростить решение.

## 2. ДИФФУЗИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ В СРЕДЕ С РЕФРАКЦИЕЙ

Рассмотрим задачу о падении излучения от точечного мононаправленного источника на границу плоскостной среды, эквивалентную задаче о слабой локализации. В принятом в работе [10] транспортном приближении интенсивность нерассеянной компоненты излучения в среде выражается в виде

$$I_0 = \delta(x) \delta(y) \delta(\Omega) \exp(-z/l), \quad (5)$$

где  $l$  — транспортная длина [11]. Поле рассеянного излучения в диффузионном приближении выражается интегралом

$$I = \frac{1}{4\pi} \int \phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') E(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}, \quad (6)$$

где

$$E(\mathbf{r}) = \int_{4\pi} e d\Omega \quad (7)$$

— усреднённая по всей сфере местная интенсивность источников излучения в среде  $e(\Omega, \mathbf{r})$  [12],

$$\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int_{4\pi} I d\Omega \quad (8)$$

— функция Грина [12] краевой задачи для уравнения диффузии излучения в неоднородной среде, удовлетворяющая уравнению

$$-\nabla_{\mathbf{r}} \left[ D n^2 \nabla_{\mathbf{r}} \frac{\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{n^2} \right] + \mu_a \phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (9)$$

с соответствующими граничными условиями. В уравнении (9)  $n(\mathbf{r})$  — коэффициент преломления среды,

$$D = \frac{1}{3[\mu_a + (1-g)\mu_s]} \quad (10)$$

— коэффициент диффузии, где  $g$  — параметр асимметрии рассеяния (т. е. средний косинус угла рассеяния) [11],  $\mu_a$  и  $\mu_s$  — локальные коэффициенты поглощения и рассеяния соответственно. Функция источников  $E$  для внешнего падающего излучения (5) в транспортном приближении выражается в виде

$$E = \frac{\Lambda}{l} \int_{4\pi} I_0 x(\Omega) d\Omega = \frac{\Lambda}{l} \delta(x) \delta(y) \exp(-z/l), \quad (11)$$

где  $\Lambda = \mu_s/(\mu_a + \mu_s)$  — вероятность выживания кванта (т. е. альbedo однократного рассеяния) в среде.

Решение уравнения диффузии излучения в среде (9) с соответствующими граничными условиями будем искать с помощью преобразования Ганкеля

$$\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int_0^\infty G(z, z', q) J_0(q\rho) q dq, \quad (12)$$

где  $\rho$  — проекция разности радиус-векторов  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$  на поверхность границы среды.

Тогда, с учётом (12), когерентная компонента интенсивности рассеянного излучения (3) выражается в виде

$$I_c(\theta) = \frac{1}{8\pi l} \int_{z_1}^{z_2} \exp\left(-\frac{z'}{\mu l}\right) G(z, z', q) dz', \quad (13)$$

где  $q = k\theta$ . Вследствие формул (9) и (12) функция Грина  $G(z, z', q)$  в среде является решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$(q^2 D + \mu_a)G(z, z', q) + 2\gamma D \frac{\partial}{\partial z} G(z, z', q) - D \frac{\partial^2}{\partial z^2} G(z, z', q) = \delta(z - z'), \quad (14)$$

удовлетворяющим соответствующим граничным условиям. В слое с конечной толщиной, например, часто используются так называемые экстраполированные граничные условия [10, 13]

$$G(z_1 - z_0, z', q) = 0, \quad (15)$$

$$G(z_2 + z_0, z', q) = 0, \quad (16)$$

где  $z_0$  — некоторое расстояние от действительной границы среды, на котором экстраполированное искомое решение полагается равным нулю. В [13] можно найти различные выражения для  $z_0$  в случае разрыва коэффициента преломления на границе среды. Поскольку коэффициент преломления (4) непрерывен на границах плоского слоя, в расчётах принято, что  $z_0 \approx 0,7l$  [10]. Общее решение однородного уравнения (14) записывается в виде

$$G(z, z', q) = C_1 \exp(\gamma z - z \sqrt{q^2 + \gamma^2 + \mu_a/D}) + C_2 \exp(\gamma z + z \sqrt{q^2 + \gamma^2 + \mu_a/D}). \quad (17)$$

Будем искать функцию Грина краевой задачи для уравнения (14) с граничными условиями (15) и (16) в виде [14]

$$G(z, z', q) = \begin{cases} C_1(z') \exp(\gamma z - z \sqrt{q^2 + \gamma^2 + \mu_a/D}) + \\ + C_2(z') \exp(\gamma z + z \sqrt{q^2 + \gamma^2 + \mu_a/D}), & z_1 < z < z' < z_2; \\ C_3(z') \exp(\gamma z - z \sqrt{q^2 + \gamma^2 + \mu_a/D}) + \\ + C_4(z') \exp(\gamma z + z \sqrt{q^2 + \gamma^2 + \mu_a/D}), & z_1 < z' < z < z_2. \end{cases} \quad (18)$$

Функция Грина (18) удовлетворяет краевым условиям задачи (15) и (16) и условиям сшивки при  $z = z'$  [14]

$$G(z, z', q) = G(z', z, q), \tag{19}$$

$$\partial G(z, z', q) / \partial z|_{z \rightarrow z'+0} - \partial G(z, z', q) / \partial z|_{z \rightarrow z'-0} = -\frac{1}{D}. \tag{20}$$

Решая записанную здесь систему уравнений для неизвестных коэффициентов и затем интегрируя по  $z'$ , получаем окончательное решение для когерентной компоненты интенсивности рассеянного излучения. В частности, для полубесконечной непоглощающей ( $\mu_a = 0$ , т. е.  $\Lambda = 1$ ) однородной среды получается

$$I_c = \frac{1 - \exp(-2qz_0)}{8\pi Dq(ql + 1)}. \tag{21}$$

### 3. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

На рис. 3 показана угловая зависимость нормированной интенсивности когерентного обратного рассеяния (21) вместе с соответствующим образом нормированными приближёнными решениями, полученными для однородной среды в [10],

$$\alpha_c(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_f) = \frac{3a}{4\pi l} \frac{1 - \exp[-2q(l + z_0)]}{2q(l + z_0)}, \tag{22}$$

и в [8],

$$\alpha_c(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_f) = \frac{1}{8\pi qD} \frac{(1 + ql) - \exp(-2qz_0)}{(1 + ql)^2}. \tag{23}$$

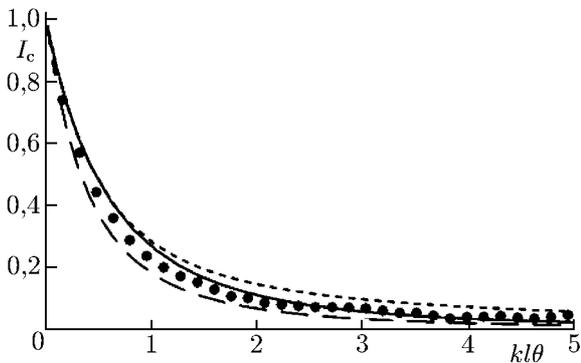


Рис. 3. Нормированная интенсивность когерентного обратного рассеянного излучения для полубесконечной однородной непоглощающей среды. Сплошная кривая — решение (21), пунктирная кривая — решение (22), штриховая кривая — решение (23). Точками на графике показаны результаты численного моделирования методом Монте-Карло [8]

Здесь  $\alpha_c$  — когерентная компонента альбеда обратного рассеяния [10],  $a = 2(l + z_0)$ . На графике также показано численное решение для полубесконечной однородной непоглощающей среды [8] (индикатриса Хенъи—Гринштейна [15] для  $g = 0,9$ ,  $\Lambda = 1$ ). Все эти приближённые решения, таким образом, удовлетворительно согласуются между собой, а также с результатом численного моделирования [8] и лабораторным экспериментом [10]. Численное решение для интенсивности когерентного обратного рассеяния представляет собой фурье-трансформанту (3) соответствующего решения уравнения переноса излучения, вычисленного методом статистического моделирования, т. е. методом Монте-Карло [16].

На рис. 4 и 5 показаны решения, полученные в настоящей работе в диффузионном приближении для плоскостойкой среды при трёх значениях градиента логарифма коэффициента преломления и результаты статистического моделирования [8] соответственно. Можно видеть качественное согласие этих результатов друг с другом, в том числе асимметричное уширение пика когерентного обратного рассеяния при различных знаках градиента коэффициента преломления.

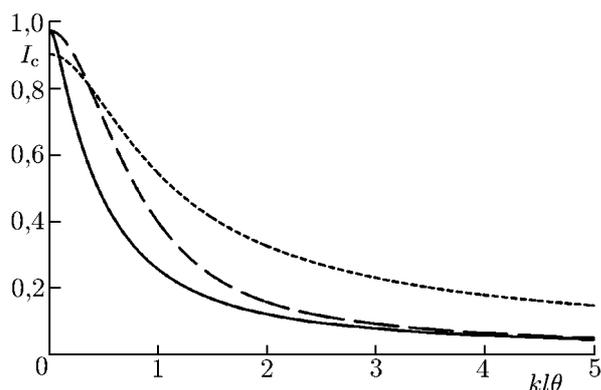


Рис. 4. Нормированная интенсивность когерентного обратного рассеянного излучения в непоглощающей плоскостростой среде с рефракцией. Численное решение методом Монте-Карло ( $10^9$  фотонов) [8] с фазовой функцией Хеньи–Гринштейна [15], полная оптическая толщина слоя  $z_2 - z_1 = 20l$ ,  $\Lambda = 1$ ,  $g = 0,5$ . Сплошная кривая соответствует однородной среде ( $\gamma = 0$ ), пунктирная и штриховая кривые — неоднородной среде с параметром  $\gamma = 0,25$  и  $\gamma = -0,25$  соответственно

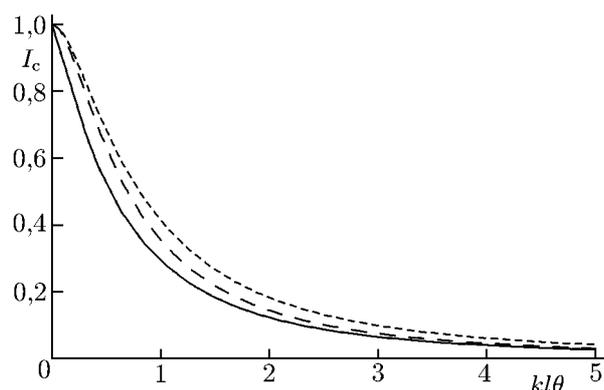


Рис. 5. Нормированная интенсивность когерентного обратного рассеянного излучения согласно диффузионному приближению (21) в непоглощающей плоскостростой среде с рефракцией. Сплошная кривая соответствует однородной среде ( $\gamma = 0$ ), пунктирная и штриховая кривые — неоднородной среде с параметром  $\gamma = 0,25$  и  $\gamma = -0,25$  соответственно. Оптическая толщина слоя среды  $z_2 - z_1 = 20l$

Из представленных результатов следует, что уточнённое диффузионное приближение (21), так же, как и (23), предсказывает уширение пика когерентного обратного рассеяния в среде с любым направлением роста коэффициента преломления. В отличие от (23), приближённое решение (21) правильно описывает асимметричное уширение при различных направлениях роста коэффициента преломления. Тем самым оно качественно согласуется с результатами численного моделирования методом Монте-Карло и конечно-разностным методом [8].

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОДЫ

В работе рассмотрен эффект когерентного усиления обратного рассеяния волн в среде с регулярным градиентом коэффициента преломления. Решение задачи о слабой локализации волн в преломляющей среде получено в диффузионном приближении скалярной теории переноса излучения. Проведено сравнение найденного решения с результатами численного моделирования статистическим методом. По сравнению с ранее полученным в [8] решением, новое решение качественно правильно описывает асимметричное уширение пика когерентного обратного рассеяния в среде при различных направлениях роста коэффициента преломления.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант 13-02-12065\_офи-м «Фундаментальные задачи микроволнового дистанционного зондирования Земли из космоса»).

Автор благодарит администрацию НИВЦ МГУ им. М. В. Ломоносова за предоставленный доступ к вычислительным ресурсам высокопроизводительных параллельных суперкомпьютерных комплексов СКИФ-ГРИД «Чебышев» и «Ломоносов» [17].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барабаненков Ю. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1973. Т. 16, № 1. С. 88.
2. Napke B. // Icarus. 1990. V. 88. P. 407.
3. Battaglia A., Tanelli S., Kobayashi S., et al. // J. Quant. Spectrosc. Rad. Transfer. 2010. V. 111, No. 6. P. 917.
4. Afanasiev A. // J. Atmos. Solar-Terr. Phys. 2005. V. 67. P. 1002.
5. Pyushin Y. A. // Planet. Space Sci. 2009. V. 57. P. 1458.
6. Pyushin Y. A. // Planet. Space Sci. 2004. V. 52. P. 1195.
7. Pyushin Y. A. // J. Quant. Spectrosc. Rad. Transfer. 2013. V. 117. P. 133.
8. Pyushin Y. A. // J. Opt. Soc. Am. A. 2013. V. 30. P. 1305.
9. Marinyuk V. V., Rogozkin D. B. // Laser Phys. 2009. V. 19. P. 176.
10. Akkermans E., Wolf P. E., Maynard R. // Phys. Rev. Lett. 1986. V. 56. P. 1471.
11. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. Т. 2. М.: Мир, 1981. 280 с.
12. Shendeleva M. L. // J. Opt. Soc. Am. A. 2004. V. 21. P. 2464.
13. Haskell R. C., Svaasand L. O., Tsay T.-T., et al. // J. Opt. Soc. Am. A. 1994. V. 11. P. 2727.
14. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969.
15. Henyey L. G., Greenstein J. L. // Astrophys. J. 1941. V. 93. P. 70.
16. Ермаков С. М., Михайлов Г. А. Статистическое моделирование М.: Физматлит, 1982. 296 с.
17. Воеводин Вл. В., Жуматий С. А., Соболев С. И. и др. Практика суперкомпьютера «Ломоносов». М.: Издательский дом «Открытые системы», 2012.

Поступила в редакцию 1 ноября 2013 г.; принята в печать 5 ноября 2014 г.

**WEAK LOCALIZATION IN MEDIA WITH REFRACTIVE INDEX GRADIENT:  
THE DIFFUSION APPROXIMATION**

*Ya. A. Pyushin*

We consider the effect of weak localization of waves in the scattering medium with a regular gradient of the refractive index. The solution within the diffusion approximation of the radiative transfer theory is obtained. Reasonable qualitative agreement of the approximate solution with the results of numerical simulation is shown.