

УДК 621.574.4

## ДИФРАКЦИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВОЛН НА ПЛОСКОСЛОИСТОЙ СТРУКТУРЕ С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

*Д. О. Батраков, Д. В. Головин*

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, г. Харьков, Украина

В настоящей статье рассмотрена задача об излучении нити электрического тока, расположенной вблизи поверхности многослойной плоской диэлектрической структуры с цилиндрическим включением. Предполагается, что пронизываемое включение целиком лежит внутри одного из слоёв, а его образующие параллельны нити тока. Решение получено с помощью модифицированного метода нулевого поля. Представлены результаты численного моделирования и их физический анализ.

### ВВЕДЕНИЕ

Проблема дифракции электромагнитных волн на включениях в неоднородных, в частности плоскослоистых, средах исследовалась многими авторами, см., например, [1–7]. В основном полученные результаты применялись к рассеянию плоских линейно поляризованных электромагнитных волн однородным диэлектрическим либо металлическим бесконечным цилиндрическим включением кругового [2, 3] или произвольного [1, 4–6] сечения. Объёмлющей средой являлось в простейшем случае полупространство либо плоский диэлектрический слой, разделяющий два полупространства [1–6]. В некоторых случаях этот слой мог располагаться на металлической подложке [2]. Для решения задачи авторы [1–4] использовали представления полей в виде разложений по азимутальным гармоникам с последующим определением неизвестных коэффициентов этих разложений. В других случаях основу метода составлял переход к интегральным уравнениям. Это были интегральные уравнения относительно диаграммы рассеяния [1], а в других случаях — объёмные [6] или поверхностные [8] интегральные уравнения. При решении этих задач использовался метод нулевого поля [9], позднее развитый для дифракции электромагнитных волн на сложных составных рассеивателях, расположенных в свободном пространстве [10, 11]. Кроме того, идеи метода нулевого поля составили фундамент подхода [12] к решению задач о рассеянии волн включениями в неоднородных средах.

Однако для экономии машинных ресурсов при численном моделировании большинство подходов в первую очередь были ориентированы на изучение дифракции плоской линейно поляризованной электромагнитной волны на таких включениях, а конкретные результаты приводились лишь для однослойных структур. В то же время ряд практических задач, связанных с проблемами неразрушающего контроля и биомедицины, требуют детального исследования рассеяния цилиндрических волн, т. е. полей нитевидных источников, расположенных вблизи наружной границы объёмлющей многослойной среды. Несмотря на внешнюю схожесть этих двух задач (падение плоской волны и поля нитевидного источника), с вычислительной точки зрения двумерная задача об излучении нитевидного источника, расположенного вблизи границы плоскослоистой среды с включением имеет ряд особенностей. Поэтому цель данной работы — создание эффективного вычислительного алгоритма для решения двумерной задачи дифракции поля нитевидного источника, который расположен вблизи внешней границы плоскослоистой среды с цилиндрическим включением произвольного сечения, целиком находящимся в одном из слоёв. Предлагаемый подход основан на преимуществах метода нулевого поля и позволяет рассматривать включения, размеры которых сравнимы и больше длины волны излучения.

*Д. О. Батраков, Д. В. Головин*

337

### 1. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

#### 1.1. Постановка задачи

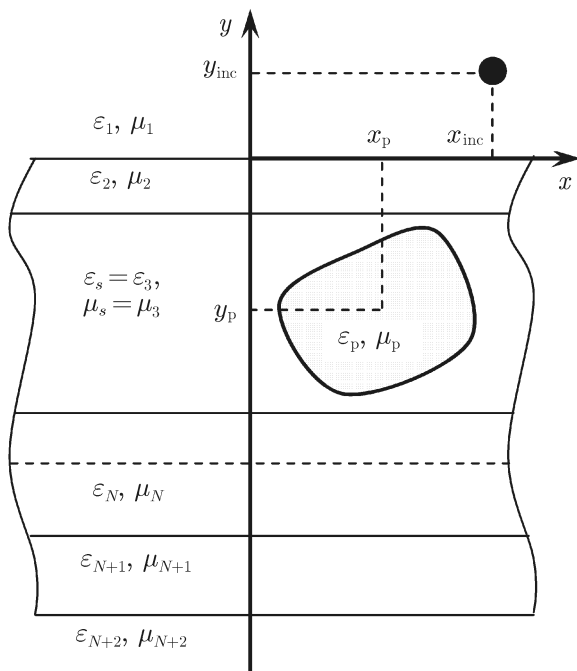


Рис. 1. Постановка задачи

Пусть многослойная плоскостойкая среда состоит из  $N$  однородных плоских слоёв и разделяет два однородных полупространства. Введём в рассмотрение систему декартовых координат, как это показано на рис. 1. В слое с индексом  $s$  (для конфигурации, изображённой на рисунке  $s = 3$ ) расположено пронизаемое (в общем случае неоднородное) цилиндрическое включение. Геометрический центр включения расположен в точке с координатами  $(x_p, y_p)$ . Форма поперечного сечения включения достаточно гладкая, так что в области включения выполняется теорема Грина. В точке с координатами  $(x_{inc}, y_{inc})$  параллельно образующей включения расположена нить синфазного тока, т.е. нитевидный источник падающего поля.

Будем далее считать, что объёмлющая среда представляет собой слоисто-неоднородное пространство, состоящее из  $N + 2$  однородных подобластей (нумерация начинается с верхнего полупространства на рис. 1, т.е. полупространства, в

котором расположен источник). Координаты нижней границы подобласти с индексом  $i$  обозначим через  $y = y_i, i = 1, 2, \dots, N + 1$  (кроме подобласти с индексом  $N + 2$ , которая не ограничена снизу). Аналогичным образом определим диэлектрическую и магнитную проницаемости для каждой из подобластей, обозначив их через  $\epsilon_i$  и  $\mu_i$  соответственно, где  $i = 1, 2, \dots, N + 2$ , и включения, обозначив их через  $\epsilon_p$  и  $\mu_p$  соответственно.

Можно показать, что для полного поля вне области включения  $U_e(\mathbf{r})$  и внутреннего поля включения  $U_p(\mathbf{r})$  могут быть записаны волновые уравнения в виде

$$\eta_e(\mathbf{r}) \nabla_{\perp} \left[ \frac{\nabla_{\perp} U_e(\mathbf{r})}{\eta_e(\mathbf{r})} \right] + k_e^2(\mathbf{r}) U_e(\mathbf{r}) = \eta_e(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S_e; \tag{1}$$

$$\eta_p(\mathbf{r}) \nabla_{\perp} \left[ \frac{\nabla_{\perp} U_p(\mathbf{r})}{\eta_p(\mathbf{r})} \right] + k_p^2(\mathbf{r}) U_p(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in S_p. \tag{2}$$

Здесь и далее мы будем использовать следующие обозначения: индексы  $e$  и  $p$  обозначают величины, относящиеся к внешней и внутренней областям включения;  $\nabla_{\perp} = \{\partial/\partial x, \partial/\partial y, 0\}$  — поперечный оператор градиента,  $k = 2\pi \sqrt{\epsilon\mu} / \lambda$ ,  $\lambda$  — длина волны падающего поля,  $U(\mathbf{r})$  —  $z$ -компонента напряжённости магнитного поля  $\mathbf{H}$  для случая вертикальной поляризации первичного поля на рис. 1, когда  $\mathbf{H} = \{0, 0, H_z\}$  и  $\mathbf{E} = \{E_x, E_y, 0\}$  или  $z$ -компонента напряжённости электрического поля  $\mathbf{E}$  для горизонтальной поляризации, когда  $\mathbf{H} = \{H_x, H_y, 0\}$  и  $\mathbf{E} = \{0, 0, E_z\}$ ;  $\eta(\mathbf{r})$  — материальный параметр среды, который для случая вертикально поляризованного падающего поля имеет смысл диэлектрической проницаемости, а для горизонтально поляризованного поля — магнитной;  $f(\mathbf{r})$  — функция сторонних источников,  $S_e$  и  $S_p$  — внешняя и внутренняя (относительно включения) области пространства.

Кроме того, поля  $U_e$  и  $U_p$  должны удовлетворять следующим граничным условиям:

$$U_e = U_p, \quad \frac{1}{\eta_e} \frac{\partial U_e}{\partial N} = \frac{1}{\eta_p} \frac{\partial U_p}{\partial N}, \quad \mathbf{r} \in L, \quad (3)$$

где  $\mathbf{N}$  — вектор внешней нормали к направляющей включения  $L$ .

Для дальнейшего решения задачи дифракции электромагнитных волн в рамках метода нулевого поля следует получить набор интегро-дифференциальных соотношений, необходимых для отыскания рассеянного поля. Подобный подход применялся при решении аналогичных задач в работах [1, 5, 7, 8]. Однако в нашем случае в качестве источника первичного поля будет рассмотрена нить с током. Кроме того, заметим, что предлагаемый подход предполагает рассмотрение рассеяния на включении в слоистой среде с произвольным количеством слоёв.

Проведя преобразования, описанные подробно в предыдущих работах [5, 6], можно получить прямую квадратурную формулу для отыскания поля  $U_{sc}$ , рассеянного включением:

$$U_{sc}(\mathbf{r}) = \int_L \frac{1}{\eta_p} \left[ G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'_L) \frac{\partial U_e(\mathbf{r}'_L)}{\partial N'} - U_e(\mathbf{r}'_L) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'_L)}{\partial N'} \right] d\mathbf{r}'_L, \quad \mathbf{r} \in S_e, \quad (4)$$

$U_{sc}(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{r} \in S_e$  — поле, рассеянное включением,  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ ,  $\{\mathbf{r}, \mathbf{r}'\} \in S_e \cup S_p$  — функция Грина объемлющей среды.

Далее, определим неизвестные функции, входящие в приведенное выражение, т. е. функцию Грина плоскослоистой среды  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'_L)$ , распределение амплитуд полного поля  $U_e(\mathbf{r})$  на контуре включения и нормальную производную полного поля  $\partial U_e / \partial N$  по внешней нормали к направляющей включения.

## 1.2. Функция Грина плоскослоистой среды

Для отыскания из соотношения (4) поля, рассеянного включением в плоскослоистой среде, нам требуется решить промежуточную задачу отыскания функции Грина объемлющей среды  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'_L)$ .

Запишем волновое уравнение для функции Грина плоскослоистой среды в виде

$$\eta_e(\mathbf{r}) \nabla_{\perp} \left[ \frac{\nabla_{\perp} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\eta_e(\mathbf{r})} \right] + k_e^2(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \eta_e(\mathbf{r}) \delta(r - r'), \quad \{\mathbf{r}, \mathbf{r}'\} \in S_e \cup S_p. \quad (5)$$

Будем искать функцию Грина  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  в виде

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(y, x, y', x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\kappa, y, y') \exp[i\kappa(x - x')] d\kappa, \quad (6)$$

где  $\kappa$  — комплексный спектральный параметр,  $G(\kappa, y, y')$  — спектральная амплитуда функции Грина. Подставив представление (6) в волновое уравнение (5), мы получим волновое уравнение для спектральной амплитуды функции Грина:

$$(\partial^2 + \gamma_j^2) G(\kappa, y, y') = \eta_j \delta(y - y'), \quad -\infty < y < +\infty, \quad -\infty < y' < +\infty,$$

где  $\partial^2 = \partial^2 / \partial y^2$ ,  $\gamma_j^2 = k_j^2 - \kappa^2$ ,  $j$  — номер слоя,  $k_j = 2\pi \sqrt{\epsilon_j \mu_j} / \lambda$  — волновое число в  $j$ -м слое.

В общем случае в рамках рассматриваемой задачи [7, 8] функция Грина может быть представлена в виде суммы:

$$G_j(\kappa, y, y') = G_j^0(\kappa, y, y') + G_j^r(\kappa, y, y'), \quad y_j < y < y_{j-1}, \quad j = 1, \dots, N, \quad (7)$$

индекс  $j$  обозначает номер слоя,  $G_j$  — полная функция Грина плоскострой среды,  $G_j^0$  — функция Грина однородного пространства с параметрами  $j$ -го слоя. Функция  $G_j^0$  удовлетворяет уравнению

$$(\partial^2 + \gamma_j^2) G_j^0(\kappa, y, y') = \eta_j \delta(y - y'), \quad -\infty < y < +\infty, \quad -\infty < y' < +\infty,$$

где  $G_j^r$  — решение однородного волнового уравнения в  $j$ -м слое:

$$(\partial^2 + \gamma_j^2) G_j^r(\kappa, y, y') = 0, \quad y_j < y < y_{j-1}.$$

Представление (7) выбрано из следующих соображений.

1) Функция  $G_j^0$  представлена известной формулой

$$G_j^0(\kappa, y, y') = \eta_j \frac{\exp(iy_j |y - y'|)}{2iy_j}, \quad 0 \leq \arg y_j \leq \pi.$$

2) Для рассматриваемого случая плоскострой среды отражённую компоненту функции Грина  $G^r$ , учитывающую вклад границ слоёв, удобно искать в виде

$$G_j^r(\kappa, y, y') = T_j \exp(-i\gamma_j |y - y'|) + R_j \exp(i\gamma_j |y - y'|).$$

В таком случае отыскание функций  $G_j^r(\kappa, y, y')$  сводится к определению неизвестных коэффициентов  $T_j$  и  $R_j$  из условий непрерывности функции Грина и её производной на границах слоёв.

Таким образом, задача об отыскании полной функции Грина плоскострой среды  $G_j(\kappa, y, y')$  может быть сведена к задаче отыскания неизвестных коэффициентов  $T_j$  и  $R_j$ , определяющих отражённую составляющую функции Грина  $G_j^r(\kappa, y, y')$ . Представим  $G_j^r(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  в виде разложения в интеграл Фурье:

$$G_j^r(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i\kappa(x - x')] \{T_j \exp[-i\gamma_j(y - y')] + R_j \exp[-i\gamma_j(y - y')]\} d\kappa,$$

где  $\mathbf{r} = (x, y, 0)$  и  $\mathbf{r}' = (x', y', 0)$  — координаты точки наблюдения и точки источника соответственно,  $k_j = k_0 \sqrt{\epsilon_j \mu_j}$  — волновое число в  $j$ -м слое,  $k_{jx} = \kappa$ ,  $\gamma_j = \sqrt{k_j^2 - \kappa^2} = k_{jy}$ .

Для дальнейшего решения задачи дифракции нам понадобится функция Грина для двух различных случаев.

1) Источник расположен вне слоистой среды, а точка наблюдения — внутри слоя с включением. Эта разновидность функции Грина нам потребуется для определения распределения полей на контуре включения, т.е. амплитуд вторичных источников, расположенных на контуре включения. Она будет подставлена в моментные уравнения метода нулевого поля.

2) Источник расположен внутри слоя с включением, а точка наблюдения — вне этого слоя (и, возможно, вне слоистой структуры в целом). Эта функция Грина потребуется для определения рассеянного поля.

Для обоих случаев функция Грина может быть представлена в виде интеграла Фурье (6). Отличия будут только в расположении точки источника  $(x', y')$  и, следовательно, в значениях коэффициентов  $T_j$  и  $R_j$ . Следует подчеркнуть, что коэффициенты  $T_j$  и  $R_j$  зависят от координат точки источника и спектрального параметра  $\kappa$  и не зависят от координат точки наблюдения:

$$T_j = T_j[\mathbf{r}', \kappa, \gamma_j(\kappa)] = T_j(\mathbf{r}', \kappa), \quad R_j = R_j[\mathbf{r}', \kappa, \gamma_j(\kappa)] = R_j(\mathbf{r}', \kappa).$$

Кроме того следует отметить, что выражения для коэффициентов  $T_j$  и  $R_j$  привнесут в подынтегральное выражение особые точки (полосы и точки ветвления). Расположение этих точек на комплексной плоскости в общем случае может отличаться для двух разновидностей функции Грина.

### 1.3. Решение системы интегро-дифференциальных уравнений

Кроме функции Грина плоскостной среды для вычисления рассеянного поля  $U_{sc}(\mathbf{r})$  из соотношения (4) нам потребуется определить распределение амплитуд полного поля  $U_e(\mathbf{r})$  и его нормальную производную  $\partial U_e/\partial N$  на направляющей включения. Найти эти функции можно из следующей системы интегро-дифференциальных уравнений:

$$\oint_L \frac{1}{\eta_S} \left[ U_e(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial N'} - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial U_e(\mathbf{r}')}{\partial N'} \right] dL' = -U_{in}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S_p,$$

$$\oint_L \left[ \chi(\mathbf{r}) \frac{1}{\eta_S} \frac{\partial U_e(\mathbf{r})}{\partial N} - U_e(\mathbf{r}) \frac{1}{\eta_p} \frac{\partial \chi(\mathbf{r})}{\partial N} \right] dL = 0, \quad (8)$$

где  $\chi(\mathbf{r})$  — решение однородного волнового уравнения в области включения:

$$\eta_p(\mathbf{r}) \nabla_{\perp} \left[ \frac{\nabla_{\perp} \chi(\mathbf{r})}{\eta_p(\mathbf{r})} \right] + k_p^2(\mathbf{r}) \chi(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in S_p. \quad (9)$$

Система (8) получена в результате преобразований набора волновых уравнений (1), (2) и (5) и граничных условий (3).

Для построения эффективной процедуры решения данной системы потребуется представить входящие в неё функции (в том числе и неизвестные) в виде разложения в некотором едином базисе. Это позволит нам свести систему интегро-дифференциальных уравнений к бесконечной системе алгебраических уравнений. В качестве такого базиса в рассматриваемом случае удобно выбрать цилиндрические гармоники.

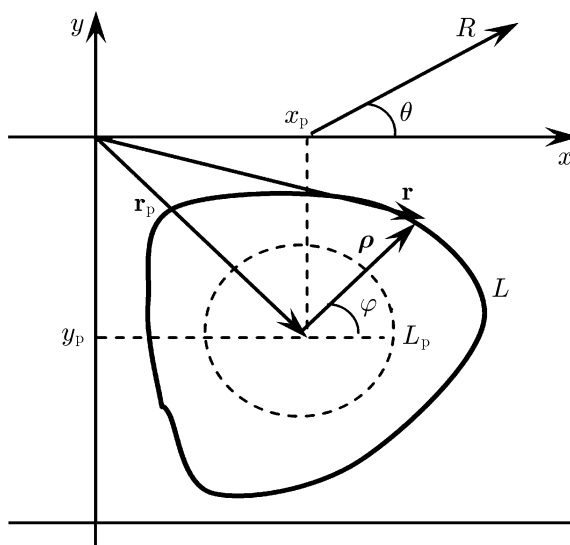


Рис. 2. Переход к полярной системе координат

### 1.4. Разложения по цилиндрическим волнам

Нам потребуется представление двух функций в виде разложения по цилиндрическим волнам: функции Грина плоскостной среды и первичного поля.

Введём систему цилиндрических координат  $\varphi, \rho$ , начало которой расположено в геометрическом центре включения (см. рис. 2). Далее, получим выражения для функции Грина  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_L)$ , первичного поля  $U_{in}(\mathbf{r})$  и амплитуд полного поля на направляющей включения  $U_e(\mathbf{r}_L)$  и его нормальных производных  $\partial U_e(\mathbf{r})/\partial N$ .

### 1.5. Функция Грина плоскостной среды

В соответствии с введённым ранее представлением (7) запишем следующее выражение для полной функции Грина в слое с индексом  $s$  (слой, содержащий включение):

$$G_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_s^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + G_s^r(\mathbf{r}, \mathbf{r}').$$

Разложения по цилиндрическим волнам для функций  $G_s^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  и  $G_s^r(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  имеют вид

$$G_s^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\eta_S}{2\pi i} \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_m H_m^{(1)}(k_s \rho_{>}) J_m(k_s \rho_{<}) \cos(m\varphi) \cos(m\varphi') + \sum_{m=1}^{\infty} H_m^{(1)}(k_s \rho_{>}) J_m(k_s \rho_{<}) \sin(m\varphi) \sin(m\varphi') \right],$$

$$G_s^r(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_m i^m J_m(\rho k_s) \cos(m\varphi) g_r^{\cos}(m, y', z') + \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_m i^m J_m(\rho k_s) \sin(m\varphi) g_r^{\sin}(m, y', z').$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$g_r^{\cos}(m, s, x', y') = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{\infty} \left\{ T_S \exp(i\gamma_S \rho' \sin \varphi') [\exp(-i\kappa \rho' \cos \varphi') + (-1)^m \exp(i\kappa \rho' \cos \varphi')] + R_S \exp(-i\gamma_S \rho' \sin \varphi') [\exp(-i\kappa \rho' \cos \varphi') + (-1)^m \exp(i\kappa \rho' \cos \varphi')] \right\} \cos(m\varphi_0) d\kappa,$$

$$g_r^{\sin}(m, s, x', y') = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{\infty} \left\{ T_S \exp(i\gamma_S \rho' \sin \varphi') [(-1)^m \exp(i\kappa \rho' \cos \varphi') - \exp(-i\kappa \rho' \cos \varphi')] - R_S \exp(-i\gamma_S \rho' \sin \varphi') [(-1)^m \exp(i\kappa \rho' \cos \varphi') + \exp(-i\kappa \rho' \cos \varphi')] \right\} \sin(m\varphi_0) d\kappa,$$

$$\rho_{<} = \min(\rho, \rho'), \quad \rho_{>} = \max(\rho, \rho'),$$

$$\sigma_m = \begin{cases} 1/2, & m = 0; \\ 1, & m \neq 0. \end{cases}$$

Угол  $\varphi_0$  может быть найден из соотношения  $\exp(i\varphi_0) = (\gamma_S - i\kappa)/k_S$ .

### 1.6. Первичное поле

Как было сказано выше, при рассмотрении в качестве источника падающего поля нити с током первичное поле  $U_{\text{in}}(\mathbf{r})$ , входящее в правую часть первого интегрального уравнения системы (8), будет совпадать с функцией Грина объемлющей среды, если источник расположен вне слоя, а точка наблюдения — в слое. Следовательно, процедура разложения первичного поля по цилиндрическим волнам будет аналогична описанной ранее процедуре для отражённой компоненты функции Грина.

Выпишем полученное ранее спектральное представление поля внутри слоя в обозначениях для первичного поля  $U_{\text{in}}(\mathbf{r})$ :

$$U_{\text{in}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_m i^m J_m(\rho k_S) \cos(m\varphi) u_S^{\cos}(m, x', y') + \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_m i^m J_m(\rho k_S) \sin(m\varphi) u_S^{\sin}(m, x', y'), \quad (10)$$

$$\sigma_m = \begin{cases} 1/2, & m = 0; \\ 1, & m \neq 0. \end{cases}$$

Функции  $u_S^{\cos}(m, x', y')$  и  $u_S^{\sin}(m, x', y')$  имеют тот же смысл, что и  $g_r^{\cos}$  и  $g_r^{\sin}$  в выражении для отражённой компоненты функции Грина, приведённом выше. Отличие заключается только в наборах коэффициентов  $T_i$  и  $R_i$ .

### 1.7. Полное поле на контуре включения

Представим полное поле на направляющей включения  $U_e(\mathbf{r}_L)$  и его нормальную производную  $\partial U_e(\mathbf{r}_L)/\partial N$  в виде следующих разложений:

$$U_e(\mathbf{r}_L) = \sum_n \alpha_n^{\cos} \xi_n^{\cos}(\mathbf{r}_L) + \sum_n \alpha_n^{\sin} \xi_n^{\sin}(\mathbf{r}_L),$$

$$\frac{\partial U_e(\mathbf{r}_L)}{\partial N} = \frac{\eta_S}{\eta_p(\mathbf{r}_L)} \left[ \sum_n \alpha_n^{\cos} \frac{\partial \xi_n^{\cos}(\mathbf{r}_L)}{\partial N} + \sum_n \alpha_n^{\sin} \frac{\partial \xi_n^{\sin}(\mathbf{r}_L)}{\partial N} \right]. \quad (11)$$

Для случая однородного включения (когда  $\eta_p(\mathbf{r}_L) \equiv \eta_p = \text{const}$ ) воспользуемся следующими базисными функциями

$$\xi_n^{\cos}(\mathbf{r}) = J_n(\rho k_p) \cos(n\varphi), \quad \xi_n^{\sin}(\mathbf{r}) = J_n(\rho k_p) \sin(n\varphi). \quad (12)$$

Заметим, что равенство коэффициентов разложения полного поля и коэффициентов для его производной было установлено из второго уравнения системы (8).

Таким образом, для представления неизвестных величин (амплитуды полного поля на контуре и его производной) требуется определить набор коэффициентов  $\alpha_n^{\cos}$ ,  $\alpha_n^{\sin}$ .

### 1.8. Система линейных алгебраических уравнений

Подставим в систему интегральных уравнений (8) полученные разложения по цилиндрическим волнам:

$$\sum_{n=0}^1 \alpha_n^{\cos, \sin} \int_L \left\{ \frac{dL'}{\eta_S} \left[ \frac{\eta_S}{\eta_p} \frac{\partial \xi_n^{\cos, \sin}(\mathbf{r}'_L)}{\partial N'} - \xi_n^{\cos, \sin}(\mathbf{r}'_L) \frac{\partial}{\partial N'} \right] G_m^{\cos, \sin} \right\} = -a_m^{\cos, \sin}, \quad (13)$$

$G_m^{\cos, \sin}$  — коэффициенты разложения функции Грина по цилиндрическим волнам,  $a_m^{\cos}$  и  $a_m^{\sin}$  — коэффициенты разложения первичного поля,  $\alpha_n^{\cos}$  и  $\alpha_n^{\sin}$  — неизвестные коэффициенты разложения полного поля на контуре включения. Таким образом, нам удалось свести систему интегродифференциальных уравнений (8) к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений (13). Перепишем полученную систему в матричном виде:

$$Q_{mn}^{\cos} \alpha_n^{\cos} = a_m^{\cos}, \quad Q_{mn}^{\sin} \alpha_n^{\sin} = a_m^{\sin}, \quad (14)$$

где

$$Q_{mn}^{\cos, \sin} = \int_L \left\{ \frac{dL'}{\eta_S} \left[ \frac{\eta_S}{\eta_p} \frac{\partial \xi_n^{\cos, \sin}(\mathbf{r}'_L)}{\partial N} - \xi_n^{\cos, \sin}(\mathbf{r}'_L) \frac{\partial}{\partial N} \right] G_m^{\cos, \sin} \right\},$$

$$a_m^{\cos, \sin} = i^m u_S^{\cos, \sin}(m, y', z'), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Теперь для однозначного определения неизвестных функций  $U_e(\mathbf{r})$  и  $\partial U_e/\partial N$  в системе (8) требуется определить набор коэффициентов разложения этих функций по цилиндрическим волнам  $\alpha_n^{\cos}$  и  $\alpha_n^{\sin}$ . Бесконечная система линейных алгебраических уравнений (14) может быть решена методом редукции. Обоснование его применения для решения аналогичной системы уравнений (но для случая рассеяния поля плоской волны) приведено в работе [13].

Таким образом, определив набор коэффициентов  $\alpha_n^{\cos}$  и  $\alpha_n^{\sin}$ , можно найти значения амплитуд полного поля на контуре включения и его нормальной производной. В результате получим все составляющие подынтегрального выражения квадратурной формулы (4), что позволяет перейти к определению поля, рассеянного включением.

### 1.9. Определение рассеянного поля

Для определения поля точечного источника, рассеянного включением, воспользуемся приведённым ранее соотношением (4). Входящие в подынтегральное выражение амплитуды полного поля  $U_e(\mathbf{r})$  на контуре включения и их нормальные производные  $\partial U_e/\partial N$  были найдены на предыдущем этапе алгоритма. Функция Грина и её нормальная производная, входящие в интеграл, также могут быть определены. Напомним, что функция Грина была найдена ранее как интеграл по комплексной плоскости спектрального параметра (6). Таким образом, для определения рассеянного включением поля в общем случае требуется для каждой точки контура включения  $L$  вычислять интеграл (6), определяющий функцию Грина. Это приводит к существенному увеличению времени расчёта и росту погрешности вычислений. Однако, если требуется получить поле в дальней зоне, т. е. при  $|\mathbf{r}| \gg \lambda$ , то можно упростить вычисление интеграла (4). Это можно сделать, поменяв местами интегрирование по комплексной плоскости спектрального параметра и интегрирование по контуру включения. В таком случае для получившегося интеграла можно получить асимптотическую оценку методом перевала.

Проделив все указанные преобразования, можно найти следующие соотношения для рассеянного поля:

$$\begin{aligned}
 U_{sc}^+(R, \theta) &= \frac{1}{\sqrt{k^+ R}} \exp[-ik^+ R \cos(2\theta)] [-F(\kappa_S) ik^+ \cos \theta], \\
 U_{sc}^-(R, \theta) &= \frac{1}{\sqrt{k^- R}} \exp[ik^- R] F(\kappa_S) k^\pm \cos \theta, \\
 F^\pm(\kappa) &= \int_L \frac{dL'}{\eta_S} \left\{ \frac{\partial U_e(\mathbf{r}'_L)}{\partial N'} \tilde{G}^\pm \exp[-i(\kappa y' \pm \gamma^\pm x')] - U_e(\mathbf{r}'_L) \frac{\partial}{\partial N'} \{ \tilde{G}^\pm \exp[-i(\kappa y' \pm \gamma^\pm x')] \} \right\},
 \end{aligned} \tag{15}$$

где  $\kappa_S = k \sin \theta$ .

Верхние индексы «+» и «-» обозначают поля в верхнем и нижнем (относительно слоистой среды) полупространствах соответственно.

Из приведённых выражений следует, что для вычисления рассеянного включением поля в некоторой точке  $(R, \theta)$  требуется вычислить единственный интеграл по направляющей включения  $L$ . Этот интеграл не содержит особенностей и его вычисление (а следовательно, и вычисление рассеянного поля) не представляет трудностей.



## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ И ИХ АНАЛИЗ

В соответствии с численным алгоритмом решения задачи рассеяния поля нитевидного источника на диэлектрическом включении в плоскостной среде был проведён ряд вычислений.

### 2.1. Определение оптимального количества гармоник

Как было сказано выше, для определения рассеянного включением поля требуется решить вспомогательную задачу вычисления коэффициентов разложения полного поля на направляющей включения. Для решения возникающей при этом бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (14) методом редукции требуется определить некоторое оптимальное количество членов ряда разложения, ограничивающее бесконечную сумму. Соответствующий вычислительный алгоритм приведён ниже.

1) Получаем решение задачи рассеяния для некоторого начального количества гармоник  $N_0^{\max}$ . Под решением в данном случае понимается диаграмма рассеяния для исследуемой структуры.

2) Получаем решение задачи рассеяния для количества гармоник  $N_1^{\max} = N_0^{\max} + 1$ .

3) Сравниваем два решения, т. е. две диаграммы рассеяния, полученные при  $N_0^{\max}$  и  $N_1^{\max}$ , и вычисляем относительную невязку диаграмм рассеяния

$$\xi_1 = \frac{1}{N_\theta} \sum_{\theta} \frac{|D_1(\theta) - D_0(\theta)|}{|D_0(\theta)|},$$

где  $D_0$  и  $D_1$  — диаграммы рассеяния, полученные для  $N_0^{\max}$  и  $N_1^{\max}$  соответственно,  $N_\theta$  — количество точек в диаграмме рассеяния,  $\theta$  — угол наблюдения.

4) Если полученная невязка  $\xi_1$  удовлетворяет условию  $\xi_1 \leq \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — некоторая заданная константа (определяемая требуемой точностью вычислений), то  $N_1^{\max}$  считается достаточным количеством гармоник для получения сходящегося решения задачи рассеяния.

5) Если условие  $\xi_1 \leq \varepsilon$  не выполняется, то переходим к шагу 2, но для  $N_2^{\max} = N_1^{\max} + 1$ .

6) Далее процесс повторяется таким же образом до получения  $\xi_i$ , удовлетворяющего условию  $\xi_i \leq \varepsilon$ , где

$$\xi_i = \frac{1}{N_\theta} \sum_{\theta} \frac{|D_i(\theta) - D_{i-1}(\theta)|}{|D_{i-1}(\theta)|}.$$

Вычисления в соответствии с приведённой схемой были проведены для двух случаев: когда источником первичного поля является нить тока и когда первичное поле представляет собой плоскую волну. На рис. 3 и 4 отображены результаты данных вычислений. Мы рассматривали достаточно простую задачу — рассеяние на цилиндре, расположенном в однородном пространстве. Относительная погрешность  $\varepsilon$ , по достижении которой решение считалось устойчивым, равно 0,01 %.

Из рис. 3 видно, что разработанный численный алгоритм позволяет достигнуть требуемой довольно высокой точности при меньшем количестве членов ряда разложения, чем необходимо при решении традиционными методами, т. е. чем величина  $N = ka + 5$ , где  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число в материале включения,  $a$  — радиус цилиндра.

Кроме того, проводилось сравнение со случаем, когда источник первичного поля представляет собой плоскую волну. Результаты этого сравнения приведены на рис. 4.

Из представленных зависимостей видно, что для некоторых размеров включений в случае нитевидного источника требуется больше членов ряда разложения, чем для случая плоской волны. Это можно объяснить тем, что в случае нитевидного источника элементы вектора правой

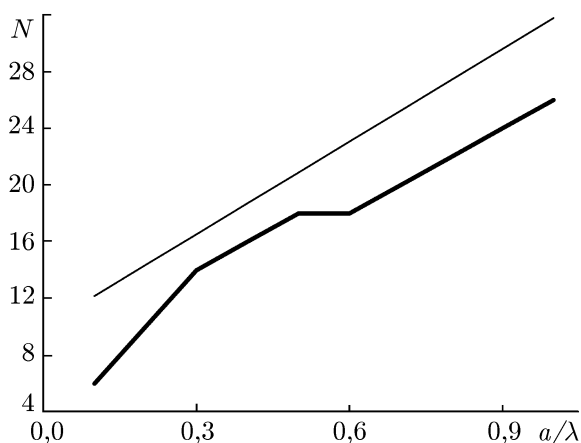


Рис. 3. Зависимость оптимального количества гармоник  $N$  от волнового размера рассеивателя для линейного источника. Кривая 1 отвечает  $N = N_{\max}$ , кривая 2 —  $N = ka + 5$

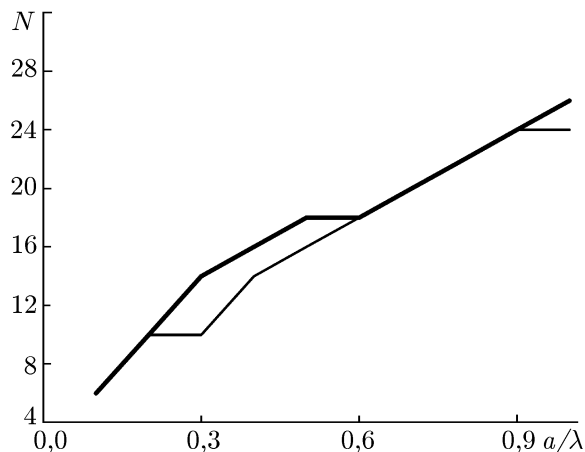


Рис. 4. Зависимость оптимального количества гармоник  $N$  от волнового размера рассеивателя. Сравнение случаев нитевидного источника и плоской волны. Кривая 1 отвечает нитевидному источнику, кривая 2 — плоской волне

части системы линейных алгебраических уравнений для отыскания коэффициентов разложения полного поля на направляющей включения представляют собой интегралы по спектральному параметру. При этом для плоской волны элементы вектора правой части вычисляются по прямым формулам.

Следовательно, несмотря на то, что матрица системы не зависит от типа падающего поля, из-за роста количества операций, затрачиваемых на формирование системы линейных алгебраических уравнений, увеличивается и суммарная погрешность вычислений. Это приводит к необходимости увеличения количества гармоник (а следовательно и размера матрицы системы) для достижения требуемой точности.

## 2.2. Диаграммы рассеяния

Основываясь на данных о порядке усечения матрицы, достаточном для получения устойчивого решения, были проведены расчёты диаграмм рассеяния для различных конфигураций рассеивающей структуры.

На рис. 5 приведены диаграммы рассеяния для диэлектрического цилиндра при  $ka \sim 10$ , где  $a$  — радиус цилиндра, расположенного в первом из двух слоёв, разделяющих два однородных полупространства (глубина погружения включения  $1,5\lambda$  и  $2,5\lambda$ ).

На рис. 6 приведён аналогичный набор диаграмм для случая рассеяния плоской волны. Из сравнения диаграмм на рисунках 5 и 6 можно заметить, что при наличии в слое большого рассеивателя диаграммы рассеяния для нитевидного источника существенно сложнее аналогичных диаграмм для плоской волны. Это можно объяснить тем, что поле, возникающее в слое при падении цилиндрической волны, имеет более сложную структуру. Если при падении плоской волны вследствие переотражений от границ в слое формируется единственная стоячая волна, то падение цилиндрической волны может быть представлено в виде суперпозиции набора плоских волн (см. выражение (10)).

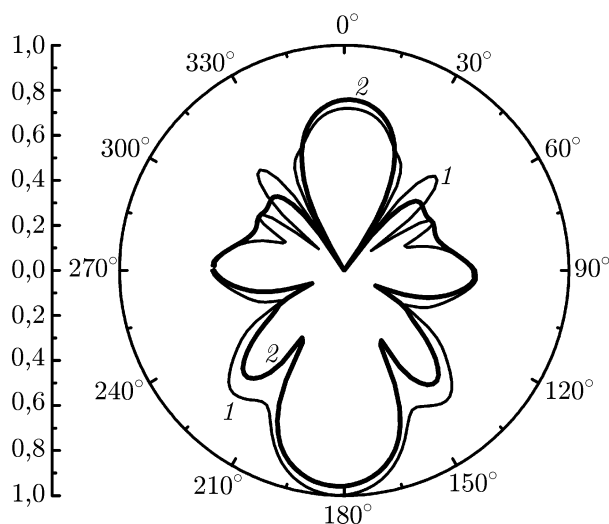


Рис. 5. Диаграммы рассеяния для кругового цилиндра ( $r/\lambda = 1,5$ ), расположенного в первом слое двухслойной структуры. Источник первичного поля — нить с током, кривая 1 отвечает глубине залегания включения  $y_p/\lambda = -1,5$ ; кривая 2 —  $y_p/\lambda = -2,5$

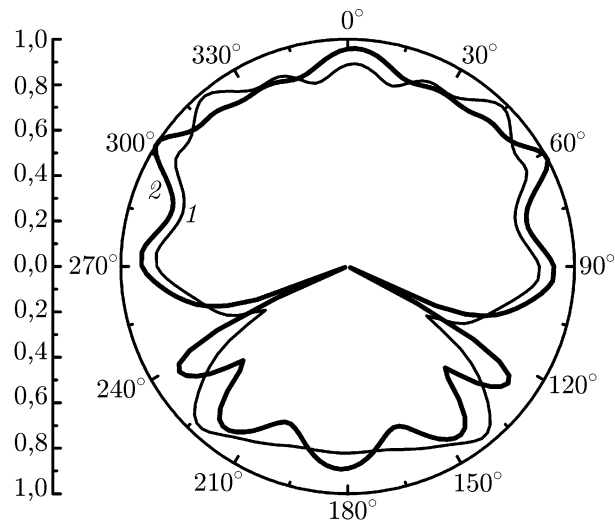


Рис. 6. Диаграмма рассеяния для кругового цилиндра с  $a/\lambda = 1,5$ , расположенного в первом слое двухслойной структуры. Случай нормального падения плоской волны, кривая 1 отвечает глубине залегания включения  $y_p/\lambda = -1,5$ ; кривая 2 —  $y_p/\lambda = -2,5$

## ВЫВОДЫ

Предложенная схема решения задачи рассеяния поля нитевидного источника на включении в многослойной плоскостройной среде является эффективным средством моделирования электродинамических процессов в неоднородных средах. Как видно из результатов численных экспериментов, несмотря на дополнительные сложности численной реализации, возникающие при рассмотрении линейного источника, описанный метод позволяет получить устойчивое решение задачи рассеяния.

Кроме того, следует заметить, что предложенный метод эффективен для анализа рассеяния на включениях значительных волновых размеров (при  $ka > 3$ ), что позволяет использовать его при рассмотрении широкого круга практических задач.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кюркчан А. Г., Маненков С. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1998. Т. 52, № 7. С. 874.
2. Uzunoglu N. K., Fikioris J. G. // J. Opt. Soc. America. 1982. V. 72, No. 5. P. 628.
3. Uzunoglu N. K., Kanellopoulos J. D. // J. Phys. A. 1982. V. 15. P. 459.
4. Жук Н. П., Шульга С. Н. // Высш. школа. Харьков, 1989. № 90. С. 93.
5. Батраков Д. О., Головин Д. В. // Вестник ХНУ. Радиофизика и электроника. 2001. № 513. С. 12.
6. Батраков Д. О., Головин Д. В. // Дефектоскопия. 2006. № 2. С. 64.
7. Жук Н. П., Яровой А. Г. // Журн. тех. физ. 1992. Т. 62, №7. С. 1.
8. Zhuck N. P., Yarovoy A. G. // IEEE Trans. Antennas. Propagat. 1994. V. 42, No. 1. P. 16.
9. Niltawach N., Chen C.-C., Johnson J. T., Baertlein B. A. // IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing. 2004. V. 42, No. 6. P. 1233.

10. Яровой А.Г. // Изв. вузов. Радиофизика. 1992. Т. 35, № 1. С. 67.
11. Kristensson G., Strom S. // Radio Sci. 1982. V. 17, No. 5. P. 903.
12. Strom S., Zheng W. // Radio Sci. 1987. V. 22, No. 7. P. 1273.
13. Батраков Д.О., Головин Д.В. // Физические основы приборостроения. Москва, 2012. Т. 1, № 1. С. 16.

Поступила в редакцию 13 мая 2013 г.; принята в печать 14 июня 2013 г.

## DIFFRACTION OF CYLINDRICAL WAVES AT A PLANE-STRATIFIED STRUCTURE WITH A CYLINDRICAL INCLUSION

*D. O. Batrakov and D. V. Golovin*

We consider the problem about radiation of an electric-current filament located near a surface of a multilayer plane dielectric structure with a cylindrical inclusion. It is assumed that the penetrable inclusion lies completely within one of the layers, and its components are parallel to the current filament. The solution is obtained by means of the modified zero-field method. The results of numerical simulation and their physical analysis are presented.