

УДК 538.566.2+621.372.8

## РЕЗОНАНСНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПОЛЯ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА В МУЛЬТИПОЛЬНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ КОЛЬЦЕВОГО СЛОЯ ЗАКРИТИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЫ

А. П. Анютин<sup>1</sup>, И. П. Коршунов<sup>2</sup>, А. Д. Шатров<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Российский новый университет, г. Москва;

<sup>2</sup> Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, г. Фрязино Московской обл., Россия

Численно исследована двумерная задача о возбуждении нитевидным источником полого кругового цилиндра из немагнитного материала с  $\mu = 1$  и с отрицательной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon < 0$ . Установлено, что при значениях относительной диэлектрической проницаемости, близких к  $-1$ , в полых цилиндрах электрически малого диаметра существуют высокодобротные резонансы. Показано, что если источник цилиндрической волны расположен внутри полости, то на резонансной частоте происходит преобразование ненаправленного излучения в мультипольное излучение с большим числом одинаковых лепестков в диаграмме направленности. Рассчитаны картины ближних и дальних полей. Исследовано влияние потерь на характеристики резонанса.

### ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] была исследована двумерная задача дифракции цилиндрической волны на полом цилиндре из метаматериала с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon < 0$  и с магнитной проницаемостью  $\mu < 0$ . Были обнаружены и изучены высокодобротные резонансы, которые возникают в цилиндрах электрически малого диаметра при значениях диэлектрической проницаемости, близких к  $-1$  (для случая ТМ-поляризации). Показано, что такую структуру можно рассматривать как высокодобротный кольцевой резонатор на сильно замедленной поверхностной волне цилиндрического слоя.

### 1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

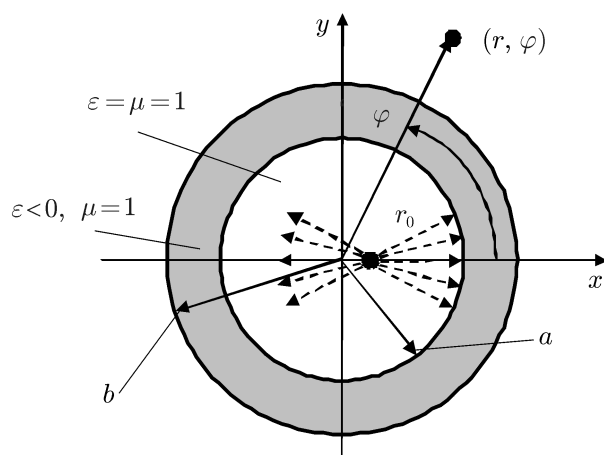


Рис. 1. Геометрия задачи

В настоящей работе рассматривается задача о возбуждении нитевидным источником кольцевого слоя закритической плазмы или метаматериала с  $\epsilon < 0$  и  $\mu = 1$ . Рассматривается случай ТМ-поляризации и предполагается, что источник расположен внутри кольцевого слоя (см. рис. 1).

Сформулированная задача сводится к нахождению скалярной функции  $U(r, \varphi) = H_z(r, \varphi)$ , которая должна удовлетворять неоднородному уравнению Гельмгольца

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + k^2 \epsilon(r) \right] U(r, \varphi) = -\frac{4i}{r} \delta(r - r_0) \delta(\varphi), \quad (1)$$

где  $\delta(x)$  — дельта-функция,  $k$  — волновое число в свободном пространстве, а функция  $\varepsilon(r)$  определена формулой

$$\varepsilon(r) = \begin{cases} 1, & 0 < r < a; \\ \varepsilon, & a < r < b; \\ 1, & r > b. \end{cases} \quad (2)$$

На границах слоя при  $r = a$  и  $r = b$  должны выполняться условия

$$\begin{aligned} U(a-0, \varphi) &= U(a+0, \varphi), & U(b-0, \varphi) &= U(b+0, \varphi), \\ \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{a-0, \varphi} &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{a+0, \varphi}, & \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{b-0, \varphi} &= \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{b+0, \varphi}. \end{aligned} \quad (3)$$

Поле  $U(r, \varphi)$  должно также удовлетворять условиям излучения, т. е. иметь при  $kr \rightarrow \infty$  вид

$$U(r, \varphi) = \Phi(\varphi) \sqrt{2/(\pi kr)} \exp(-ikr + i\pi/4), \quad (4)$$

где  $\Phi(\varphi)$  — диаграмма направленности.

Поле расходящейся цилиндрической волны является решением уравнения (1) при  $\varepsilon = 1$  и определено формулой

$$U^0(r, \varphi) = H_0^{(2)}\left(\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \varphi}\right), \quad (5)$$

где  $H_0^{(2)}(x)$  — функция Ганкеля. Диаграмма направленности поля  $U^0(r, \varphi)$  имеет вид

$$\Phi^0(\varphi) = \exp(ikr_0 \cos \varphi). \quad (6)$$

## 2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Уравнение (1) допускает аналитическое решение методом разделения переменных (ряд Рэлея [2]). Приведём выражение для поля вне цилиндра, т. е. при  $r > b$ :

$$U(r, \varphi) = \frac{2i}{\pi \varepsilon k^2 ab} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\delta_m J_m(kr_0) H_m^{(2)}(kr) \cos(m\varphi)}{A_m(ka) D_m(kb) - B_m(ka) C_m(kb)}, \quad (7)$$

где

$$\delta_m = \begin{cases} 1, & m = 0; \\ 2, & m \geq 1, \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} A_m(ka) &= J'_m(ka) I_m(kna) - \frac{n}{\varepsilon} J_m(ka) I'_m(kna), \\ B_m(ka) &= J'_m(ka) K_m(kna) - \frac{n}{\varepsilon} J_m(ka) K'_m(kna), \\ C_m(kb) &= H_m^{(2)'}(kb) J_m(knb) - \frac{n}{\varepsilon} H_m^{(2)}(kb) I'_m(knb), \\ D_m(kb) &= H_m^{(2)'}(kb) K_m(knb) - \frac{n}{\varepsilon} H_m^{(2)}(kb) K'_m(knb), \end{aligned} \quad (9)$$

$$n = \sqrt{|\varepsilon|}, \quad (10)$$

$J_m(x)$  — функции Бесселя,  $I_m(x)$  — модифицированные функции Бесселя,  $K_m(x)$  — функции Макдональда, штрих обозначает дифференцирование по аргументу.

Диаграмма направленности выражается формулой

$$\Phi(\varphi) = \frac{2i}{\pi \varepsilon k^2 ab} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\delta_m J_m(kr_0) i^m \cos(m\varphi)}{A_m(ka)D_m(kb) - B_m(ka)C_m(kb)}. \quad (11)$$

Отметим, что ряды (7) и (11) содержат резонансный знаменатель

$$A_m(ka)D_m(kb) - B_m(ka)C_m(kb). \quad (12)$$

Введём коэффициент  $\alpha$  согласно формуле

$$a = \alpha b, \quad \alpha < 1. \quad (13)$$

Знаменатель (12) является комплексной функцией параметра  $kb$ . При  $kb \ll 1$  и  $nkb \ll 1$  мнимая часть выражения (12) значительно превосходит его вещественную часть. Мнимая часть резонансного знаменателя (12) обращается в нуль в точках  $kb_m$ , которые и являются безразмерными пространственными резонансными частотами. Соответствующее уравнение для резонансных частот является частным случаем (отвечающим  $\mu = 1$ ) более общего уравнения (29) работы [1] и может быть записано в виде

$$\left[ \frac{(kb_m)^2}{m^2 - 1} + \varepsilon + 1 \right] \left[ \alpha^2 \frac{(kb_m)^2}{m^2 - 1} + \varepsilon + 1 \right] - 4\alpha^{2m} = 0, \quad m \geq 2. \quad (14)$$

Решение квадратного уравнения (14) имеет вид

$$(kb_m)^2 = \frac{m^2 - 1}{2\alpha^2} \left[ -(1 + \alpha^2)(\varepsilon + 1) \pm \sqrt{(1 - \alpha^2)^2(\varepsilon + 1)^2 + 16\alpha^{2m+2}} \right]. \quad (15)$$

Условием применимости этого выражения является малость величин  $\varepsilon + 1$  и  $\alpha^m$ .

В качестве примера рассмотрим цилиндр с

$$\varepsilon = -1,01, \quad \alpha = 0,3. \quad (16)$$

Очевидно, что для получения наименьшего значения безразмерной частоты  $kb_m$  в формуле (15) необходимо выбрать знак «минус». В результате получим

$$kb_5 = 0,423. \quad (17)$$

Индекс  $m = 5$  является наименьшим возможным, т. к. при  $m = 4$  правая часть выражения (15) становится отрицательной. С увеличением азимутального индекса  $m$  резонансные частоты  $kb_m$  возрастают.

Рассмотрим другой случай, когда

$$\varepsilon = -0,999, \quad \alpha = 0,3. \quad (18)$$

Теперь для того, чтобы правая часть выражения (15) была положительной, в ней необходимо выбрать знак «плюс» перед радикалом. В частности, получим

$$kb_6 = 0,183. \quad (19)$$

Уменьшение индекса  $m$  в этом случае приводит к возрастанию резонансной частоты  $kb_m$ .

Таким образом, с увеличением индекса  $m$  резонансная частота может как увеличиваться, так и уменьшаться. Характер этой зависимости определяется знаком величины  $\varepsilon + 1$ .

### 3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Исследуем амплитудно-частотную характеристику цилиндра, под которой будем понимать зависимость модуля поля в точке  $r = b, \varphi = \pi$  от безразмерного параметра  $kb$ , пропорционального частоте. Во всех расчётах координата источника полагалась равной  $r_0 = 0,5a$ .

На рис. 2 изображена амплитудно-частотная характеристика цилиндра для двух наборов параметров задачи, определяемых формулами (16) и (18). Расчёты проводились по формуле (7). В приведённом диапазоне безразмерных частот  $0,1 \div 0,9$  амплитудно-частотные характеристики имеют несколько резонансных пиков. Нумерация резонансных частот такова, что на резонансной частоте  $kb_m$  диаграмма направленности и поля на поверхностях  $r = a$  и  $r = b$  с большой точностью описываются одной азимутальной гармоникой  $\cos(m\varphi)$ . Отметим, что найденные путём строгих численных расчётов безразмерные значения резонансных частот  $kb_5 = 0,42136689988$  и  $kb_6 = 0,1825302075244$  хорошо согласуются с величинами (17) и (19), полученными по приближённой формуле (15). Рис. 2 подтверждает также отмеченные выше особенности функциональной зависимости безразмерных резонансных частот  $kb_m$  от номера  $m$ . Поскольку в настоящей работе рассматривается идеализированная постановка задачи без учёта тепловых потерь в среде, то добротности исследуемых резонансов определяются лишь радиационными потерями, которые оказываются весьма малыми, что и требует вычисления резонансных частот с приведённой высокой точностью. Влияние тепловых потерь на характеристики резонансов будет исследовано в конце данного раздела.

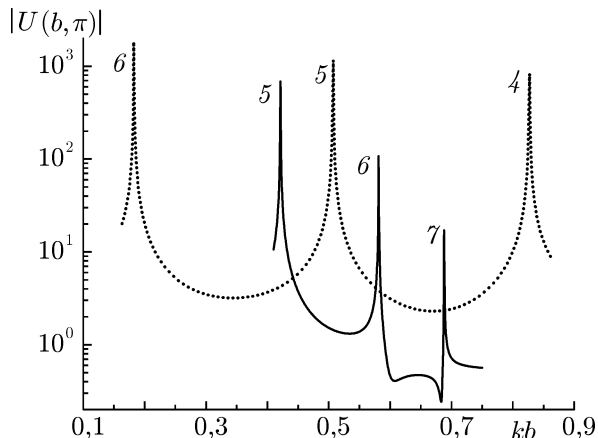


Рис. 2. Амплитудно-частотные характеристики полых цилиндров: сплошная кривая соответствует  $\varepsilon = -1,01, \alpha = 0,3$  и  $r_0 = 0,5a$ ; пунктирная кривая отвечает  $\varepsilon = -0,999, \alpha = 0,3$  и  $r_0 = 0,5a$ ; цифры у резонансных пиков соответствуют азимутальному индексу  $m$

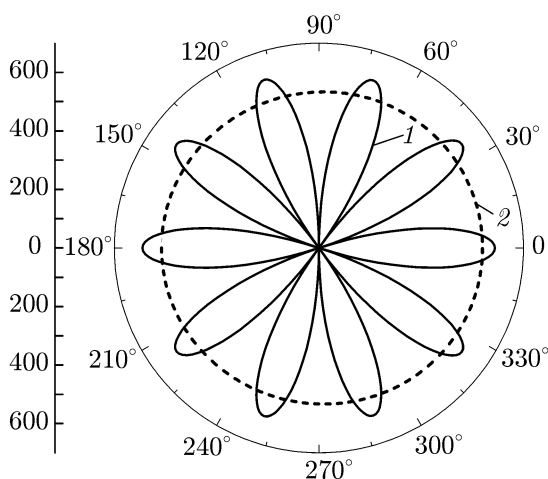


Рис. 3. Диаграмма направленности по полю полого цилиндра с  $\varepsilon = -1,01, \alpha = 0,3$  и  $r_0 = 0,5a$  на безразмерной резонансной частоте  $kb_5 = 0,42136 \dots$  (кривая 1) и на безразмерной нерезонансной частоте  $kb = 0,52$  (кривая 2, масштаб увеличен в 500 раз)

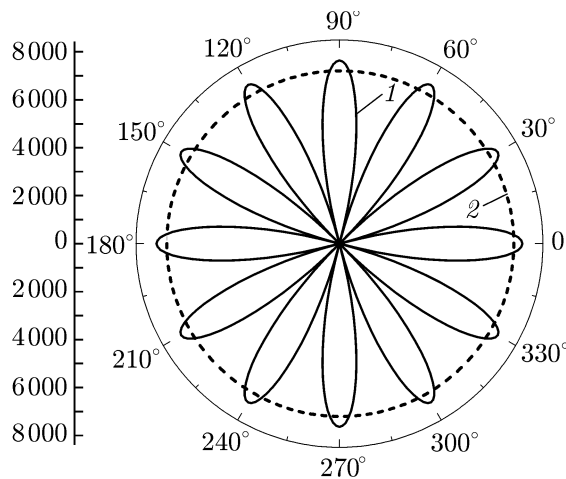


Рис. 4. Диаграмма направленности по полю полого цилиндра с  $\varepsilon = -0,999, \alpha = 0,3$  и  $r_0 = 0,5a$  на безразмерной резонансной частоте  $kb_6 = 0,18253 \dots$  (кривая 1) и на безразмерной нерезонансной частоте  $kb = 0,35$  (кривая 2, масштаб увеличен в 7000 раз)

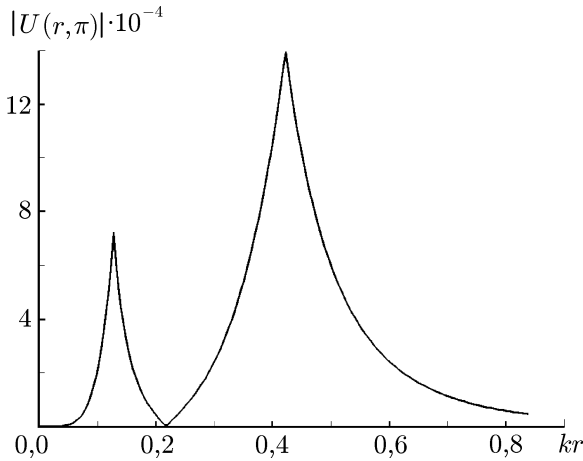


Рис. 5. Распределение модуля поля по радиусу полого цилиндра с  $\epsilon = -1,01$ ,  $\nu = 10^{-5}$ ,  $\alpha = 0,3$  и  $r_0 = 0,5a$  на безразмерной резонансной частоте  $kb_5 = 0,42136\dots$

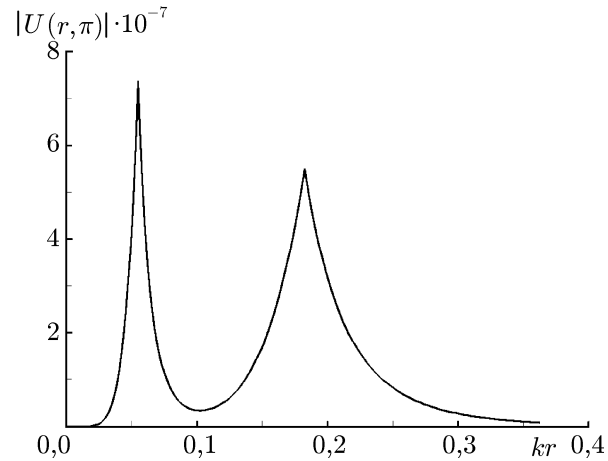


Рис. 6. Распределение модуля поля по радиусу полого цилиндра с  $\epsilon = -0,999$ ,  $\nu = 10^{-8}$ ,  $\alpha = 0,3$  и  $r_0 = 0,5a$  на безразмерной резонансной частоте  $kb_6 = 0,18253\dots$

Диаграммы направленности на низших безразмерных резонансных частотах  $kb_5$  и  $kb_6$  представлены на рис. 3 и 4. Диаграммы состоят из 10 и, соответственно, 12 одинаковых лепестков. На рис. 3 и 4 изображены также диаграммы направленности на нерезонансных частотах. Они с большой точностью описываются функцией  $|\Phi(\varphi)| = 1$ , которая совпадает с диаграммой направленности первичного поля  $U^0(r, \varphi)$  (см. (6)). Таким образом, кольцевой слой всюду, кроме узких резонансных полос, является прозрачным. Следовательно, рис. 3 и 4 наглядно демонстрируют эффект преобразования ненаправленного излучения (кривые 2) в мультипольное излучение (кривые 1) с большим числом азимутальных гармоник. Отметим, что амплитуды диаграмм направленности на безразмерных резонансных частотах  $kb_5$  и  $kb_6$  оцениваются величинами  $6,3 \cdot 10^2$  и  $7,5 \cdot 10^3$  соответственно. При этом распределение поля на внешней поверхности цилиндра при  $r = b$  с графической точностью описывается единственной гармоникой  $A_m \cos(m\varphi)$ , где  $A_5$  порядка  $10^7$  и  $A_6$  порядка  $10^{11}$ .

Для расчёта пространственной структуры волновых полей и для исследования влияния тепловых потерь на добротность резонансов был использован модифицированный метод дискретных источников [3, 4]. Для характеристики поглощающих свойств среды использовался параметр  $\nu = -\text{Im} \epsilon$ .

На рис. 5 и 6 изображены зависимости полей резонансных колебаний с  $kb_5 = 0,42136\dots$  и  $kb_6 = 0,18253\dots$  от радиальной координаты  $r$ . Эти зависимости соответствуют различным значениям диэлектрической проницаемости  $\epsilon = -1,01$  и  $\epsilon = -0,999$  и отличаются друг от друга поведением поля внутри слоя; они соответствуют противофазному и синфазному распределениям полей на границах при  $r = a$  и  $r = b$  [1].

Представление о пространственном распределении поля на безразмерной резонансной частоте  $kb_5 = 0,42136\dots$  даёт рис. 7, на котором изображены линии постоянного уровня функции  $|U(r, \varphi)|$ . Структура поля представляет собой стоячие по азимутальной координате поверхностные волны, локализованные вблизи цилиндрических границ. Такие волны наблюдались и при дифракции электромагнитного поля на больших телах из метаматериала [5, 6].

Влияние тепловых потерь на свойства резонанса  $kb_5$  иллюстрирует рис. 8. Увеличение тепловых потерь приводит к уменьшению добротности резонанса. Видно, что уже при  $\nu = 10^{-5}$  тепловые потери существенно превосходят радиационные потери. При  $\nu = 10^{-4}$  добротность резонанса  $Q$  имеет порядок  $10^4$ .

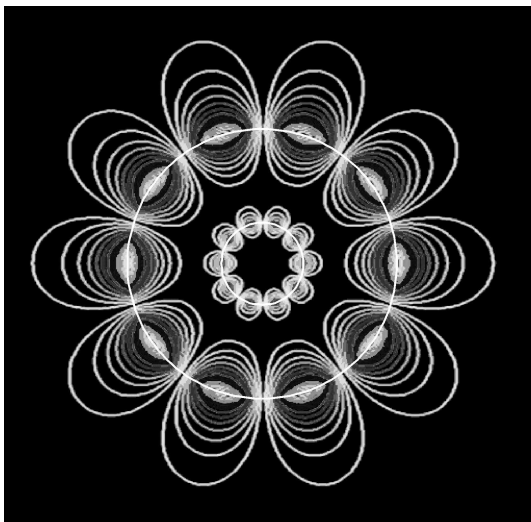


Рис. 7. Линии постоянного уровня модуля поля  $|U(r, \varphi)|$  в полых цилиндре с  $\varepsilon = -1,01$ ,  $\nu = 10^{-8}$ ,  $\alpha = 0,3$  и  $r_0 = 0,5a$  на безразмерной резонансной частоте  $kb_5 = 0,42136\dots$ . Круговыми линиями показаны контуры поверхностей  $r = a$  и  $r = b$

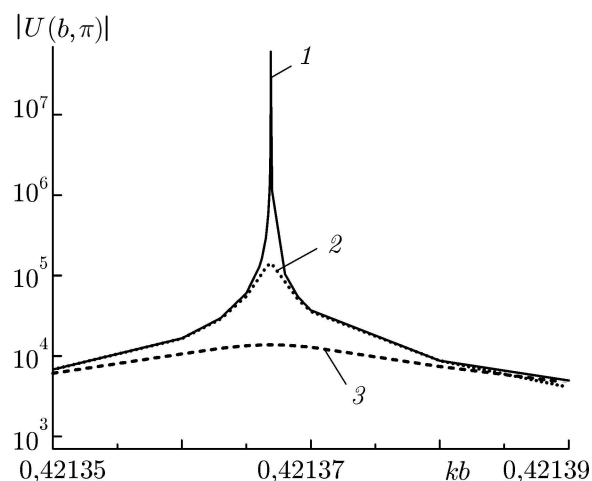


Рис. 8. Амплитудно-частотные характеристики полых цилиндров с  $\varepsilon = -1,01$ ,  $\alpha = 0,3$  и  $r_0 = 0,5a$  в окрестности безразмерной резонансной частоты  $kb_5 = 0,42136\dots$  при различных значениях диэлектрических потерь: кривые 1, 2 и 3 отвечают  $\nu = 10^{-7}$ ;  $10^{-5}$  и  $10^{-4}$  соответственно

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, кольцевой слой из немагнитного материала, диэлектрическая проницаемость которого близка к  $-1$ , обладает резонансными свойствами в низкочастотной области, при этом азимутальная зависимость полей на резонансной частоте описывается единственной гармоникой  $\cos(m\varphi)$ . Изученные резонансы возникают лишь при выполнении жёстких требований к величине  $\varepsilon$  и размерам слоя. В зависимости от знака выражения  $\varepsilon + 1$  резонансные частоты колебаний могут либо возрастать, либо убывать с ростом азимутального индекса  $m$ . Эти колебания различаются также характером зависимости поля внутри слоя от радиальной координаты. На резонансной частоте происходит преобразование ненаправленного излучения нитевидного источника, окружённого кольцевым слоем, в мультипольное излучение с диаграммой направленности, содержащей  $2m$  одинаковых лепестков.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант 12-02-00062-а).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Анютин А. П., Коршунов И. П., Шатров А. Д. // Радиотехника и электроника. 2013. Т. 58, № 9. С. 951.
2. Каценеленбаум Б. З. Высокочастотная электродинамика. М.: Наука, 1966. 240 с.
3. Кюркчан А. Г., Минаев С. А., Соловейчик А. Л. // Радиотехника и электроника. 2001. Т. 46, № 6. С. 666.
4. Анютин А. П., Кюркчан А. Г., Минаев С. А. // Радиотехника и электроника. 2002. Т. 47, № 8. С. 955.
5. Анютин А. П. // Радиотехника и электроника. 2010. Т. 55, № 2. С. 144.

6. Анютин А. П. // Радиотехника и электроника. 2011. Т. 56, № 9. С. 1029.

Поступила в редакцию 6 мая 2013 г.; принята в печать 28 мая 2013 г.

## RESONANCE CONVERSION OF THE POINT-SOURCE FIELD TO MULTIPOLE RADIATION USING THE RING LAYER OF THE OVERCRITICAL PLASMA

*A. P. Anyutin, I. P. Korshunov, and A. D. Shatrov*

We study numerically the two-dimensional problem of excitation of a hollow round cylinder, which is made of a nonmagnetic material with  $\mu = 1$  and the negative dielectric permittivity  $\varepsilon < 0$ , by a filamentary source. It is found that when the relative dielectric permittivity is close to  $-1$ , high-Q resonances exist in hollow cylinders having electrically small diameters. We show that when the source of a cylindrical wave is situated within a cavity, the undirected radiation is converted at the resonance frequency to the multipole radiation with a great number of identical lobes in the radiation pattern. The patterns of near and far fields are calculated. The influence of the loss on the resonance properties are studied.