

УДК 621.396.663+681.883.43

МАКСИМАЛЬНО ПРАВДОПОДОБНАЯ ОЦЕНКА КООРДИНАТ ШИРОКОПОЛОСНЫХ ИСТОЧНИКОВ ШУМА ПРИ НЕИЗВЕСТНЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЯХ СИГНАЛА И ПОМЕХИ

В. И. Турчин

Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород, Россия

Предложен метод максимально правдоподобной оценки координат (в частном случае — пеленга) широкополосного гауссового источника шума при наличии фоновой помехи, некоррелированной на элементах антенной решётки. Метод адаптируется к неизвестным спектральным плотностям помехи и сигнала от источника. Построена граница Крамера—Рао, характеризующая дисперсию оценки координат. Методом численного моделирования проведено сравнение эмпирических оценок дисперсии с границей Крамера—Рао, а также с эмпирическими оценками дисперсии в случае обычного суммирования мощностей в частотных каналах. Показано, что при значительном различии спектральных плотностей помехи и сигнала предложенный метод обеспечивает существенно большую точность. Показано также, что влияние слабой корреляции помехи на приёмных элементах несущественно.

ВВЕДЕНИЕ

Методы пеленгации или, в общем случае, методы оценки координат широкополосных источников шума с помощью антенных решёток рассматривались достаточно детально как в подводной и воздушной акустике, так и при пассивной локации тепловых объектов в сверхвысокочастотном (СВЧ) диапазоне электромагнитных волн (см., например, [1, 2]). Общеизвестным способом пеленгации является оценка углового положения источника по максимуму выходного сигнала антенной решётки при сканировании окружающего пространства её диаграммой направленности. В простейшем случае сканирование осуществляется путём изменения фазового распределения на элементах антенной решётки в рамках так называемого узкополосного приближения, когда полоса приёма F удовлетворяет ограничению $F \ll c/D$, где c — скорость распространения сигнала, D — размер антенной решётки.

В узкополосном приближении обычное сканирование диаграммой направленности соответствует максимально правдоподобной оценке пеленга¹ при условии, что спектральные плотности помехи и сигнала от источника в полосе приёма постоянны, а отсчёты помехи на элементах антенной решётки статистически независимы и имеют одинаковые мощности. В последние десятилетия основным направлением исследований являлась разработка так называемых адаптивных алгоритмов оценки пеленга в случае априорно неизвестных пространственных корреляционных свойств помехи, в основном ориентированных на оценки пеленга слабых источников при наличии мощных локальных источников помех. Для решения этой задачи в узкополосном приближении было разработано большое число алгоритмов, например хорошо известные методы Кейпона, теплового шума, MUSIC и т. д. (см., например, [4, 5]). Наряду с такими алгоритмами развивались также максимально правдоподобные методы оценки пеленга при наличии обычной фоновой помехи, некоррелированной на отдельных элементах антенной решётки, в случае, когда распределение мощности помехи на этих элементах неизвестно (см., например, [6–8]). Было показано,

¹ Максимально правдоподобная оценка гарантирует асимптотическую эффективность, т. е. близость дисперсии оценки к её нижней границе (границе Крамера—Рао) при определённом отношении сигнала/помеха (см., например, [3]).

что в различных случаях (детерминированный временной сигнал известной формы, неизвестная временная зависимость и т. д.) процедура оценки сводится к решению нелинейных уравнений итерационными методами. Наряду с оценкой углового положения источника, в подводной акустике уже длительное время исследуется проблема оценки координат, т. е. дистанции до источника и глубины его расположения с использованием вертикальных антенных решёток в рамках так называемой обработки, согласованной со средой, см., например, [9]. По сути, для обработки здесь могут использоваться те же методы, что и для оценки углового положения источника. Различие заключается лишь в том, что в качестве модели пространственной структуры поля на элементах антенной решётки — так называемого направляющего вектора — берётся не пространственное распределение поля в плоской волне с определённым углом падения, а функция Грина среды. Поскольку все алгоритмы обработки сигналов в антенной решётке формулируются на основе «абстрактного» вектора направлений, развитые ранее методы были практически без изменений использованы при обработке, согласованной со средой. В частности, аналогом обычного сканирования диаграммой направленности в этой задаче являлась так называемая процедура Барллета [9], в которой дополнительно учитывалась зависимость нормы направляющего вектора от параметров.

При расширении полосы приёма аналогом обычного фазирования антенной решётки в некотором направлении является введение задержек в сигналы, принятые элементами антенной решётки, либо разбиение входного сигнала на более узкие полосы, внутри которых сигналы суммируются с соответствующими фазовыми сдвигами. Однако для широкой полосы приёма разработка адаптивных методов сталкивается с определёнными трудностями. Как отмечалось в [10]: «Вследствие сложности имеющихся эффектов, универсальное решение для устойчивого широкополосного формирования диаграммы направленности не может быть получено простым способом. В частности, концепции, первоначально разработанные для узкой полосы, становятся неадекватными для широкой полосы без возможности их обобщения и модификации»². Оставляя в стороне результаты, полученные при построении таких алгоритмов (см. их обзор в [10]), остановимся на проблеме неадаптивной обработки в предположении отсутствия пространственной корреляции помехи на приёмных элементах. Такое допущение соответствует сценарию, в котором пеленгуется один источник или несколько разнесённых по углу источников с сопоставимыми уровнями мощности. Основная проблема здесь заключается в том, что при не слишком больших размерах антенной решётки можно ожидать большего влияния на точность оценки не разброса уровня помех на её элементах, а различия в спектрах помехи и сигнала от источника. При ширине полосы больше или порядка центральной частоты зависимости спектральных плотностей помехи и сигнала от частоты могут существенно варьироваться, особенно в подводной акустике, где спектр принятого сигнала сильно искажается за счёт интерференции. Интуитивно очевидно, что суммирование выходных мощностей после обработки в узких полосах должно выполняться с определённым весом, выделяющим те частотные интервалы, в которых отношение спектральных плотностей сигнала и помехи максимально. При известных спектральных плотностях такой вес определяется так называемым фильтром Эккарта [5]. Однако чаще всего спектральные плотности помехи и сигнала неизвестны, что требует построения алгоритмов, адаптирующихся к априори неизвестным зависимостям спектральных плотностей от частоты.

В настоящей работе предлагается и исследуется такой максимально правдоподобный алгоритм в случае, когда и сигнал, и помеха являются гауссовым шумом, отсчёты фоновой помехи на элементах антенной решётки имеют одинаковые спектральные плотности и статистически

² В оригинале: «Because of the complexity of involved phenomena, an universal solution to robust wideband beamforming may not be easily foreseen. In particular, concepts originally developed in the narrowband case may become inadequate in wideband environments, without proper extensions and modifications».

независимы, а спектральные плотности помехи и сигнала неизвестны. Разработка подобных алгоритмов выполнялась, в частности, в [11–13]. В работе [11] рассматривался случай неизвестного спектрального состава помехи при известном спектре источника, что не всегда имеет место на практике. В [12] предложен алгоритм оценки координат источника детерминированного сигнала с неизвестным комплексным спектром на фоне гауссовой помехи с неизвестной спектральной плотностью; ниже будет проанализировано отличие алгоритма, предложенного в настоящей работе, от представленного в [12]. В [13] рассматривалась задача обнаружения гауссового источника с неизвестным спектральным составом на фоне помехи с неизвестным спектральным составом. При выводе алгоритма будет использована произвольная форма направляющего вектора с тем, чтобы его можно было применять для обработки, согласованной со средой. В настоящее время повысился интерес к оценкам координат источников с использованием широкой полосы приёма, что, естественно, повышает информативность измерений (см., например, [14]).

1. МАКСИМАЛЬНО ПРАВДОПОДОБНАЯ ОЦЕНКА КООРДИНАТ ШИРОКОПОЛОСНОГО ИСТОЧНИКА

Будем считать, что пространственно-спектральные отсчёты сигнала представляют собой последовательность векторов-столбцов $\mathbf{x}_{k,j}$ с числом элементов N каждый, где $k = 1, \dots, K$ — номер спектрального отсчёта сигнала на выходе k -го узкополосного фильтра с центральной частотой f_k и шириной полосы Δf , $j = 1, \dots, J$ — номер временного отсчёта, N — число элементов антенной решётки. Отсчёты сигнала представляют собой смесь гауссовой помехи с нулевым средним и сигнала от пространственно-когерентного источника, также излучающего гауссов стационарный шум с нулевым средним. В силу стационарности сигнала и помехи для вывода оптимального алгоритма оценки можно воспользоваться известным представлением для логарифма функции правдоподобия случайных гауссовых сигналов [4]:

$$\Lambda = - \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K [\ln \det \mathbf{P}_k + \mathbf{x}_{k,j}^H \mathbf{P}_k^{-1} \mathbf{x}_{k,j}] = -J \sum_{k=1}^K [\ln \det \mathbf{P}_k + \text{tr}(\mathbf{P}_k^{-1} \hat{\mathbf{P}}_k)], \quad (1)$$

где индекс H означает эрмитово сопряжение, \mathbf{P}_k — матрица корреляции сигнала на k -й частоте, $\hat{\mathbf{P}}_k = J^{-1} \sum_j \mathbf{x}_{k,j} \mathbf{x}_{k,j}^H$ — эмпирическая оценка матрицы корреляции, $\text{tr}(\mathbf{A})$ означает след матрицы \mathbf{A} . В дальнейшем будем рассматривать следующее представление корреляционной матрицы:

$$\mathbf{P}_k = P_k^{(n)} \mathbf{I} + P_k^{(s)} \mathbf{g}_k \mathbf{g}_k^H, \quad (2)$$

\mathbf{I} — единичная матрица. Первое слагаемое характеризует некоррелированную на элементах антенной решётки помеху с интенсивностью $P_k^{(n)}$ на частоте f_k , $P_k^{(s)}$ — интенсивность шума, излучаемого источником, на этой же частоте; $\mathbf{g}_k = \|g(f_k, \mathbf{r}_n, \varphi)\|$ — вектор направлений с размерностью $N \times 1$, представляющий собой пространственную форму сигнала от источника на приёмных элементах с координатами \mathbf{r}_n на частоте f_k , вектор φ содержит параметры, характеризующие координаты источника. Для линейной эквидистантной антенной решётки с межэлементным расстоянием d в условиях однородного пространства, в котором скорость распространения сигнала равна c , $\mathbf{g}_k = \|\exp(2\pi i f_k n d \sin(\alpha)/c)\|$ и вектор φ включает в себя один параметр $s = \sin \alpha$, где α — пеленг источника, отсчитываемый от нормали к антенной решётке. При использовании вертикальной гидроакустической антенной решётки и обработки, согласованной со средой, в качестве $g(f_k, z_n, \varphi)$ берётся функция Грина среды распространения для приёмников с глубинами z_n , а вектор φ включает в себя два параметра: глубину источника и расстояние до источника в

горизонтальной плоскости. В принципе, в вектор φ могут войти и другие параметры, характеризующие, например, среду распространения.

Используя явную процедуру обращения (2), после некоторой перегруппировки слагаемых представим логарифм функции правдоподобия (1) в виде

$$\Lambda = -J \sum_{k=1}^K \left[\frac{1}{P_k^{(n)}} \left(\Psi_{x,k} - \frac{\eta_k}{1 + \eta_k} \Psi_{B,k} \right) + N \ln P_k^{(s)} + \ln(1 + \eta_k) \right]. \quad (3)$$

Здесь $\eta_k = P_k^{(s)} \mathbf{g}_k^H \mathbf{g}_k / P_k^{(n)}$,

$$\Psi_{x,k} = \text{tr} \hat{\mathbf{P}}_k, \quad \Psi_{B,k} = \frac{\mathbf{g}_k^H \hat{\mathbf{P}}_k \mathbf{g}_k}{\mathbf{g}_k^H \mathbf{g}_k}. \quad (4)$$

Вторая статистика $\Psi_{B,k}$ в (4) представляет собой хорошо известный алгоритм Бартлета (см., например, [9]), используемый для оценки φ в узкополосном приближении. Поскольку обычно спектральные плотности помехи и источника неизвестны, выражения (4) включают $2K + L$ неизвестных параметров, где L — длина вектора φ . Например, $L = 2$ при оценке глубины и дальности. Однако при оценке φ желательно иметь статистику, инвариантную к спектральным отсчётам мощностей помехи и сигнала $P_k^{(n)}$ и $P_k^{(s)} \propto \eta_k$. Для получения такой статистики максимизируем (3) по этим параметрам³. После несложных выкладок получаем

$$\Lambda_\varphi = \max_{P_k^{(n)}, P_k^{(s)}} \Lambda = -J \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^K \ln \Psi_{B,k} + \left(1 - \frac{1}{N} \right) \sum_{k=1}^N \ln(\Psi_{x,k} - \Psi_{B,k}) \right\} + C, \quad (5)$$

где C — несущественная константа, которая в дальнейшем будет опускаться. Соответственно, за оценку φ принимается аргумент Λ_φ , при котором Λ_φ достигает глобального максимума. Для узкополосного приближения, когда сумма (5) содержит только одно слагаемое ($K = 1$), $\Lambda_\varphi(\Psi_B)$ является монотонно возрастающей функцией аргумента Ψ_B в интервале изменения $\Psi_x/N \leq \Psi_B \leq \Psi_x$. В этом интервале⁴ глобальные максимумы Λ_φ и Ψ_B будут достигаться при одном и том же значении φ ; тем самым, для оценки φ возможна замена Λ_φ на Ψ_B , что и делается на практике. При использовании широкой полосы частот такая замена уже некорректна и суммирование по частотам должно выполняться в соответствии с (5).

Отметим отличие (5) от алгоритма, представленного в [12]: в последнем отсутствует первое слагаемое в выражении (5). Это отличие является следствием разной постановки задач. В настоящей работе использована модель гауссового сигнала, который вносит свой вклад в дисперсию оценки наряду с помехой. В соответствии с механизмом действия принципа максимума правдоподобия, (5) минимизирует результирующую дисперсию оценки. В [12] использована модель детерминированного сигнала, не вносящего вклад в дисперсию, откуда и проистекает различие в алгоритмах.

Исследование чувствительности алгоритма (5) к отклонениям изменяемого в процессе обработки вектора φ от его истинного значения φ_0 можно выполнить при достаточно большом объёме выборки J , когда в (5) статистики $\Psi_{x,k}$ и $\Psi_{B,k}$ можно приближённо заменить их математическими ожиданиями $\bar{\Psi}_{x,k}$ и $\bar{\Psi}_{B,k}$:

$$\bar{\Psi}_{x,k} = NP_k^{(n)} + P_k^{(s,\Sigma)}; \quad \bar{\Psi}_{B,k} = P_k^{(n)} + P_k^{(s,\Sigma)} \rho_k^2, \quad (6)$$

³ Аналогичный подход использовался в [11], однако максимизация (4) там проводилась только по спектральным отсчётам помехи, поскольку спектр источника считался известным.

⁴ Неравенство $\Psi_B \leq \Psi_x$ выполняется всегда, неравенство $\Psi_x/N \leq \Psi_B$ может нарушаться с определённой вероятностью, когда изменяемый параметр φ далёк от истинного значения, однако это влияет лишь на структуру боковых лепестков функции Λ_φ . Эти тонкости на практике игнорируются.

где $P_k^{(s,\Sigma)} = P_k^{(s)} \mathbf{g}_{0,k}^H \mathbf{g}_{0,k}$ — суммарная мощность сигнала на всех элементах антенной решётки, $\mathbf{g}_{0,k} = \|g(f_k, \mathbf{r}_n, \boldsymbol{\varphi}_0)\|$ — вектор направлений для истинного значения вектора параметров $\boldsymbol{\varphi}_0$, ρ_k^2 — квадрат модуля коэффициента корреляции векторов $\mathbf{g}_{0,k}$ и \mathbf{g}_k на k -й частоте:

$$\rho_k^2 = \frac{|\mathbf{g}_{0,k}^H \mathbf{g}_k|^2}{(\mathbf{g}_{0,k}^H \mathbf{g}_{0,k})(\mathbf{g}_k^H \mathbf{g}_k)}.$$

Функцию $F(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}_0) = \Lambda_{\boldsymbol{\varphi}}(\dots, \bar{\Psi}_{y,k}, \dots, \bar{\Psi}_{B,k}, \dots)$ можно, очевидно, рассматривать как функцию неопределённости, характеризующую реакцию алгоритма (5) на отклонение $\boldsymbol{\varphi}$ от $\boldsymbol{\varphi}_0$. Она определяется следующим выражением:

$$F(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}_0) = -J \sum_{k=1}^K \left\{ (N-1) \ln \left[1 + \frac{\eta_k}{N-1} (1 - \rho_k^2) \right] + \ln(1 + \eta_k \rho_k^2) \right\} + C, \quad (7)$$

где $C \sim \sum_k \ln P_{i,k}$,

$$\eta_k = P_k^{(s,\Sigma)} / P_k^{(n)} \quad (8)$$

— отношение сигнал/помеха на k -й частоте с учётом выигрыша антенны. Нетрудно показать, что слагаемые в фигурных скобках в (7) монотонно убывают с увеличением ρ_k , так что глобальный максимум (7) с учётом знака перед суммой в (7) достигается при $\rho_k = 1$, т. е. при $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}_0$.

Характер поведения (7) можно исследовать в окрестности малых отличий $\boldsymbol{\varphi}$ от $\boldsymbol{\varphi}_0$, полагая $\rho_k^2 \approx 1 - \beta_k \delta^2$, где $\delta^2 \sim |\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\varphi}_0|^2$ (чтобы не усложнять изложение, ограничимся случаем оценки одного скалярного параметра). Разлагая (7) в ряд по малому δ , получаем $F(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}_0) \approx F_0 - F_1 \delta^2$, где

$$F_1 = J \sum_{k=1}^K \frac{\beta_k \eta_k^2}{1 + \eta_k}. \quad (9)$$

Константа F_1 определяет чувствительность процедур обработки к разности $\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\varphi}_0$: чем она больше, тем выше чувствительность. Как следует из (9), F_1 зависит от поведения отношения сигнал/помеха в частотной области: чем меньше η_k , тем меньший вклад вносит эта частота в результат обработки. Таким образом, алгоритм (5) фактически адаптируется к реальным частотным зависимостям помехи и сигнала. При простом суммировании процедуры Бартлетта $\Psi_{B,k}$ по частоте, что эквивалентно оценке средней мощности при пеленгации с помощью сканирования задержками, $F_1 \sim \sum_k \beta_k P_k^{(s,\Sigma)}$, т. е. зависит только от спектральной плотности сигнала. Очевидно, что при неравномерной спектральной плотности помехи (5) будет давать более точные оценки пеленга.

2. АНАЛИЗ ПОГРЕШНОСТИ ОЦЕНКИ КООРДИНАТ ИСТОЧНИКА

Анализ ширины главного лепестка функции неопределённости (7) для алгоритма (5) даёт определённое представление о возможной погрешности оценки, например пеленга. Однако количественные характеристики погрешности могут быть получены только в результате анализа дисперсий оценок. Обычно такой анализ проводится на основе границы Крамера—Рао, определяющей минимальную возможную среди различных алгоритмов дисперсию оценки в зависимости от различных параметров, т. е. числа приёмных элементов, отношения сигнал/помеха и пр. Известно (см., например, [3]), что при увеличении объёма выборки дисперсии максимально правдоподобных оценок асимптотически стремятся к границе Крамера—Рао. Поскольку алгоритм (5)

относится к таковым, можно полагать, что граница Крамера—Рао будет адекватно описывать дисперсии оценок координат источников.

Для гауссовых сигналов с нулевым средним и матрицами корреляции \mathbf{P}_k , характеризующими независимые процессы, матрица Фишера Φ с размерностью $M \times M$ определяется известным выражением [15]:

$$\Phi = \left\| \left\| J \sum_{k=1}^K \text{tr} \left(\frac{\partial \mathbf{P}_k}{\partial \theta_l} \mathbf{P}_k^{-1} \frac{\partial \mathbf{P}_k}{\partial \theta_m} \mathbf{P}_k^{-1} \right) \right\| \right\|, \tag{10}$$

где вектор θ представляет полный список неизвестных параметров. В рассматриваемом случае $\theta = (P_1^{(n)}, \dots, P_K^{(n)}, P_1^{(s)}, \dots, P_K^{(s)}, \phi_1, \dots, \phi_L)$, $M = 2K + L$. Матрица корреляции оценок при этом определяется как $\text{cov } \hat{\theta} \approx \Phi^{-1}$. Для представления (2) нетрудно показать, что Φ имеет блочную структуру:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \Phi_\phi \end{pmatrix}, \tag{11}$$

где \mathbf{D} — матрица с размерностью $2K \times 2K$, состоящая из четырёх диагональных блоков с размерностями $K \times K$: относящегося к помеховой компоненте $\mathbf{D}^{(n,n)}$, относящегося к сигнальной компоненте $\mathbf{D}^{(s,s)}$ (блоки на главной диагонали) и смешанных блоков $\mathbf{D}^{(s,n)} = \mathbf{D}^{(n,s)}$ на контрдиагонали. Диагональные элементы этих блоков определяются выражениями

$$D_{k,k}^{(n,n)} = \frac{J}{(P_k^{(n)})^2} \left[N - 1 + \frac{1}{(1 + \eta_k)^2} \right]; \quad D_{k,k}^{(s,s)} = \frac{J}{(P_k^{(s)})^2} \left(\frac{\eta_k}{1 + \eta_k} \right)^2; \\ D_{k,k}^{(n,s)} = \frac{J}{P_k^{(n)} P_k^{(s)}} \frac{\eta_k}{(1 + \eta_k)^2}, \tag{12}$$

\mathbf{B} и Φ_ϕ — матрицы с размерностями $2K \times L$ и $L \times L$ соответственно. Чтобы не загромождать изложение, рассмотрим оценку одного параметра, т. е. положим $L = 1$. В этом случае \mathbf{B} становится вектором-столбцом, включающим два вектора-столбца $\mathbf{b}^{(n)}$ и $\mathbf{b}^{(s)}$ с числом элементов K каждый: $\mathbf{B} = (\mathbf{b}^{(n)}, \mathbf{b}^{(s)})^T$,

$$b_k^{(n)} = \frac{2J}{P_k^{(n)}} \frac{\eta_k \text{Re } \mu_{1,k}}{(1 + \mu_k)^2}; \quad b_k^{(s)} = \frac{2J}{P_k^{(s)}} \frac{\eta_k^2 \text{Re } \mu_{1,k}}{(1 + \mu_k)^2}; \quad k = 1, \dots, K, \tag{13}$$

где $\mu_{1,k} = \gamma_k^H \mathbf{g}_k / (\mathbf{g}_k^H \mathbf{g}_k)$, $\gamma_k = \partial \mathbf{g}_k / \partial \phi$, а Φ_ϕ является числом:

$$\Phi_\phi = 2J \sum_{k=1}^K \frac{\eta_k^2}{1 + \eta_k} \left[\frac{\gamma_k^H \gamma_k}{\mathbf{g}_k^H \mathbf{g}_k} + \frac{1}{1 + \eta_k} (\text{Re } \mu_{1,k}^2 - \eta_k |\mu_{1,k}|^2) \right]. \tag{14}$$

С помощью известной теоремы об обращении блочных матриц (см., например, [3]) получаем следующее выражение для дисперсии оценки

$$\text{cov } \hat{\phi} \approx (\Phi_\phi - \mathbf{B}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{B})^{-1}; \quad \mathbf{B}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{B} = 4J \sum_{k=1}^K \left(\frac{\eta_k \text{Re } \mu_{1,k}}{1 + \eta_k} \right)^2. \tag{15}$$

Выражение (15) существенно упрощается, когда скалярные произведения $\mu_{1,k} = 0$: при этом $\mathbf{B} = 0$ и

$$\text{cov } \hat{\phi} \approx \frac{1}{2J} \left(\sum_{k=1}^K \frac{\eta_k^2}{1 + \eta_k} \frac{\gamma_k^H \gamma_k}{\mathbf{g}_k^H \mathbf{g}_k} \right)^{-1}. \tag{16}$$

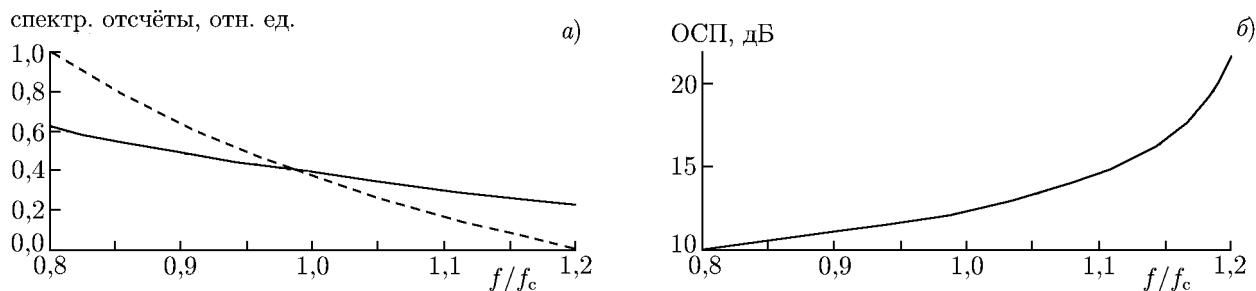


Рис. 1. Зависимости мощности сигнала (сплошная кривая) и помехи (пунктир) от относительной частоты, использованные при численном моделировании (а) и соответствующее им отношение сигнал/помеха (ОСП) с учётом антенного выигрыша (б)

Отметим, что в случае $\mathbf{B} = 0$ дисперсия оценки не зависит от априорного незнания спектральных плотностей помехи и сигнала, т. к. матрица Фишера распадается на два независимых блока, и $\text{cov} \hat{\phi}$ остаётся той же самой, как и в случае $\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}_\varphi$, когда спектральные отсчёты мощностей сигнала и помехи известны. При $\mathbf{B} \neq 0$ априорное незнание спектральных отсчётов приводит к увеличению дисперсии оценки (см. (15)).

В случае $L > 1$ расчёт границы Крамера–Рао выполняется по той же схеме, однако аналитические выражения здесь оказываются весьма громоздкими, и проще использовать численное обращение (11) с учётом блочного представления матриц \mathbf{D} и \mathbf{B} согласно (12) и (13).

3. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Численное моделирование проводилось для задачи оценки пеленга α , т. е. угловой координаты источника относительно нормали к антенной решётке, с помощью эквидистантной N -элементной решётки в условиях однородного пространства. Шаг между элементами составлял половину длины волны на центральной частоте f_c , $f_k = \nu_k f_c$, безразмерный параметр ν_k брался удовлетворяющим неравенству $0,8 < \nu_k < 1,2$. Зависимости спектральных отсчётов помехи и сигнала от частоты, использованные при моделировании, приведены на рис. 1, там же показаны зависимости отношения сигнал/помеха от частоты. В рассматриваемом примере $\mathbf{g}_k = \|\exp(i\pi n \nu_k s)\|$, $\gamma_k = i\pi \nu_k \|n \exp(i\pi n \nu_k s)\|$, где $s = \sin \alpha \equiv \phi$ — оцениваемый параметр и $\mu_{1,k} = 0$. В этом случае граница Крамера–Рао определяется выражением (16). При $N \gg 1$ среднее квадратическое отклонение оцениваемого параметра s , отнесённое к угловому разрешению Рэля $\Delta s = 2/N$ на центральной частоте, находится как

$$\frac{\sqrt{\text{var } \hat{s}}}{\Delta s} = \frac{\pi}{\sqrt{3NJ}} \left(\sum_{k=1}^K \frac{\eta_k^2 \nu_k^2}{1 + \eta_k} \right)^{-1/2}. \quad (17)$$

На рис. 2 приведена зависимость границы Крамера–Рао (17) от длины временных блоков J . На этом же графике показаны эмпирические оценки среднее квадратического отклонения для различных J для алгоритма (5) и для тривиального суммирования узкополосных процедур Бартлета (4) по частоте. Расчёты выполнялись для $N = 16$, $K = 32$. Эмпирические оценки среднее квадратического отклонения выполнялись по 100 реализациям. Как видно из рис. 2, при частотной зависимости отношения сигнал/помеха, показанной на рис. 1, среднее квадратические отклонения оценки синуса пеленга с использованием (5) хорошо группируются вокруг границы Крамера–Рао и примерно в 2 раза меньше среднее квадратического отклонения оценок, получаемых при триви-

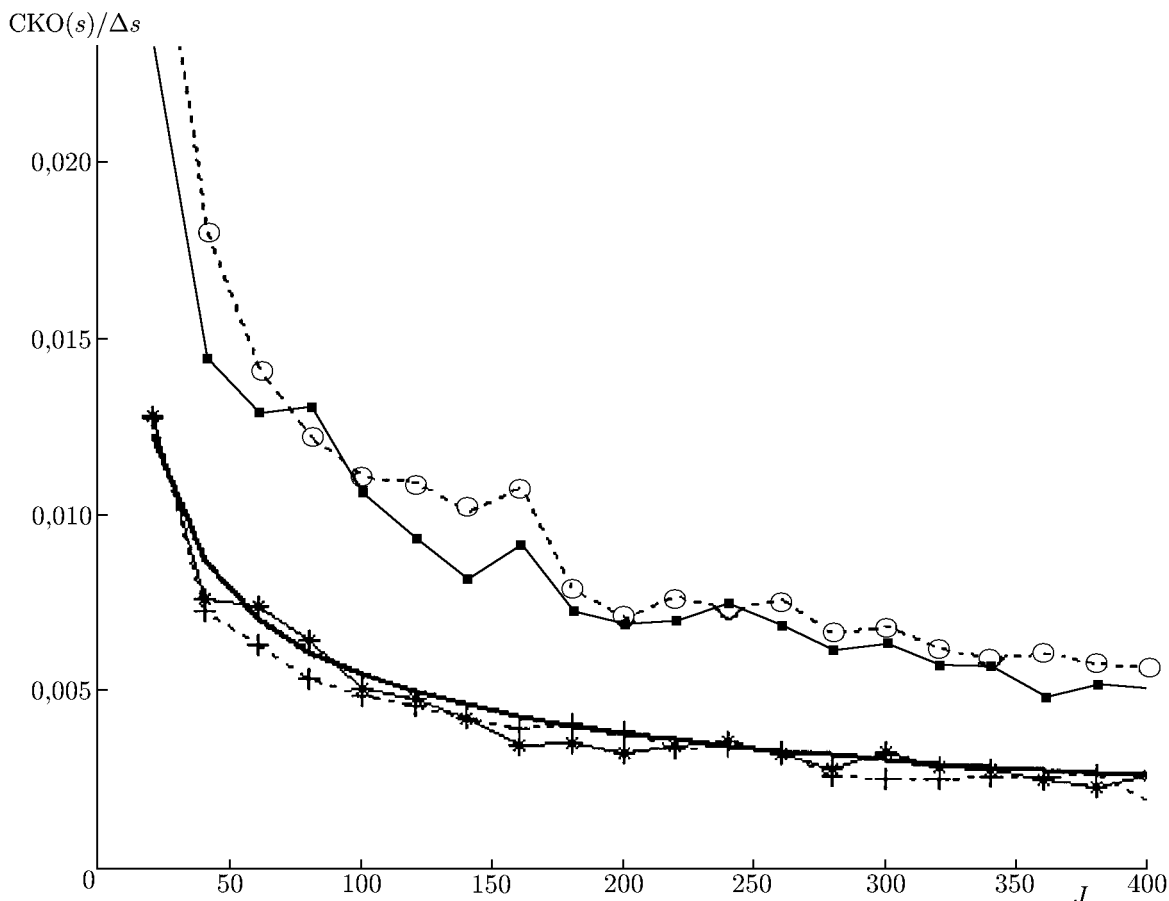


Рис. 2. Зависимость относительного среднеквадратического отклонения (СКО) оценки синуса пеленга от числа временных отсчётов. Сплошной жирной линией показана граница Крамера–Рао, символами * и ■ — эмпирические оценки СКО, отвечающие широкополосному максимально правдоподобному алгоритму (5) и тривиальному суммированию по частотам, соответственно. Символы + и o представляют эмпирические оценки СКО для изотропной помехи

альном суммировании по частотам. В качестве иллюстрации на рис. 3 приведена одна из реализаций (5) для $J = 100$ и соответствующая ей реализация алгоритма с простым суммированием по частотам. Как видно из рис. 3, обе реализации имеют хорошо выраженный главный максимум и достаточно похожи.

Предположение о статистической независимости помех на приёмных элементах обычно оправдано, если они обусловлены собственными шумами приёмных элементов. Фоновая помеха с малой угловой анизотропией, как правило, имеет пространственный масштаб корреляции порядка $\lambda/2$, где λ — длина волны. Если расстояние между приёмными элементами составляет $\lambda_c/2$, где λ_c — длина волны на центральной частоте, на частотах ниже центральной помеха уже оказывается коррелированной. Для исследования этого эффекта эмпирические оценки среднеквадратического отклонения выполнялись также для помеховой компоненты, т. е. первого слагаемого в (1), в виде

$$P_k^{(n)} = P_k^{(n)} \|\text{sinc}[\nu_k(n - m)]\|, \tag{18}$$

где $\text{sinc}(x) = \sin(\pi x)/(\pi x)$. Модель (18) соответствует изотропной по всем угловым направлениям помехе. Эти эмпирические оценки также показаны на рис. 2. Их отличие от оценок для

независимой помехи оказывается несущественным. Фактически корреляция помехи из-за малого межэлементного расстояния должна приводить к тому, что выигрыш антенны определяется числом, меньшим N , а именно приблизительно отношением длины антенны к пространственному масштабу корреляции. При этом соответствующим образом будет уменьшаться выходное отношение сигнал/помеха на низких частотах. Однако алгоритм (5) адаптируется к реальному отношению сигнал/помеха, поэтому он должен быть слабо чувствителен к пространственной корреляции помехи.

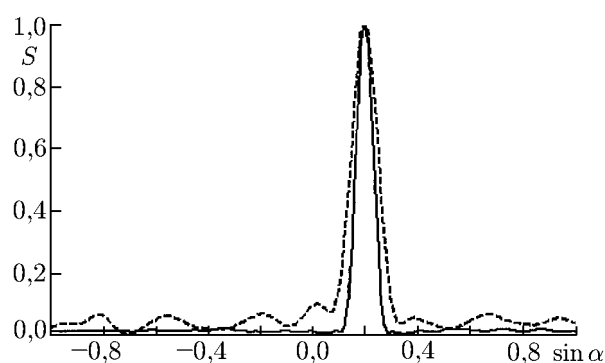


Рис. 3. Пример случайной реализации нормированного выходного сигнала S при использовании алгоритма (5): широкополосной максимально правдоподобной процедуры (сплошная линия) и алгоритма с простым суммированием по частотам (штриховая линия) для тех же параметров, что и на рис. 2; $J = 100$, точное значение пеленга $\sin \alpha_0 = 0,2$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе предложен новый алгоритм оценки координат широкополосных источников гауссового шума на фоне гауссовой фоновой помехи с отсчётами, независимыми на элементах антенной решётки, при неизвестных спектральных плотностях помехи и сигнала от источника. По сложности реализации алгоритм фактически не отличается от обычной процедуры суммирования мощностей сигналов на выходе узкополосных диаграммообразующих блоков: требуется лишь дополнительная процедура суммирования мощностей на выходах приёмных элементов в узких полосах. Построена в явном виде граница Крамера—Рао для оценок координат (пеленга) источника при неизвестных спектральных плотностях помехи и сигнала. Численное моделирование показало заметное повышение точности оценки с помощью предложенного алгоритма по сравнению с простым суммированием в узких полосах при существенной частотной зависимости отношения сигнал/помеха. Показана также малая чувствительность алгоритма к корреляции помехи на приёмных элементах антенной решётки, возникающей в случае, когда межэлементное расстояние оказывается меньше половины длины волны.

Автор выражает благодарность А. Л. Вировлянскому, Л. Я. Любавину и А. А. Родионову за ценные замечания.

Работа поддержана РФФИ (грант 13-02-97082).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Урик Р. Дж. Основы гидроакустики. Л.: Судостроение, 1978. 448 с.
2. Караваев В. В., Сазонов В. В. Статистическая теория пассивной локации. М.: Радио и связь, 1987. 240 с.
3. Бард Й. Нелинейное оценивание параметров. М.: Статистика, 1979. 349 с.

4. Van Trees H. L. Detection, estimation and modulation theory, optimum array processing. John Wiley and Sons, 2004. 1 472 p.
5. Малышкин Г. С. Оптимальные и адаптивные методы обработки гидроакустических сигналов. Т. 1, 2. СПб: ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2011.
6. Matveyev A. L., Gershman A. B., Böhme J. F. // *Circuits, Systems, Signal Proc.* 1999. V. 18. P. 479.
7. Pesavento M., Gershman A. B. // *IEEE Trans. Signal Proc.* 2001. V. 49, No. 7. P. 1 310.
8. Li M., Lu Y. // *IEEE Trans. Aerospace Electron. Syst.* 2008. V. 44, No. 3. P. 1 079.
9. Beggeroer A. B., Kuperman W. A., Mikhalevsky P. N. // *IEEE J. Oceanic Eng.* 1993. V. 18, No. 4. P. 401.
10. Robust adaptive beamforming / Ed. by J. Li, P. Stoica. John Wiley and Sons, 2006.
11. Mecklenbräuker C. F., Gershman A. B., Böhme J. F. // *Signal Proc.* 2001. V. 81, No. 2. P. 389.
12. Mecklenbräuker C. F., Gerstoft P. // *J. Comp. Acoust.* 2000. V. 8, No. 2. P. 259.
13. Репин В. Г., Тартаковский Г. П. Статистический синтез при априорной неопределённости и адаптация информационных систем. М.: Сов. радио, 1977. 432 с.
14. Rouseff D., Zurk L. M. // *J. Acoust. Soc. Amer. Express Lett.* 2011. V. 130, No. 2. P. 76.
15. Kay S. M. Fundamentals of statistical signal processing: estimation theory. Prentice Hall, 1993.

Поступила в редакцию 19 марта 2013 г.; принята в печать 28 апреля 2013 г.

**MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATE OF THE COORDINATES OF WIDEBAND
NOISE SOURCES IN THE CASE OF UNKNOWN SPECTRAL DENSITIES
OF THE SIGNAL AND THE NOISE**

V. I. Turchin

We propose a method of obtaining the maximum likelihood estimate of the coordinates (the bearing, in a special case) of a wideband Gaussian noise source in the presence of background interference which is uncorrelated at the elements of the antenna array. The method is adapted to unknown spectral densities of the noise and the signal produced by the source. The Cramer—Rao bound is constructed, which characterize the dispersion of the coordinate estimate. Empirical estimates of the dispersion are compared with the Cramer—Rao boundary and the empirical dispersion estimates by the method of numerical simulation in the case of usual summation of the power values in the frequency channels. It is shown that when the spectral densities of the noise and the signal differ significantly, the proposed method ensures a significantly better accuracy. It is shows also that the influence of weak correlation of the noise at the receiver elements is insignificant.