

УДК 537.874+537.624

## ДИФРАКЦИЯ ВОЛН НА ЛЕНТОЧНОЙ РЕШЁТКЕ, РАСПОЛОЖЕННОЙ НА ГРАНИЦЕ СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ: МЕТОД АНАЛИТИЧЕСКОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

*А. В. Бровенко, П. Н. Мележик, С. Б. Панин, А. Е. Поединчук*

Институт радиофизики и электроники НАН Украины, г. Харьков, Украина

В настоящей работе развит новый численно-аналитический метод решения задач дифракции волн на ленточной решётке, расположенной на границе слоисто-неоднородной среды. Построен высокоэффективный алгоритм для вычисления дифракционных характеристик такой структуры при наклонном падении на неё плоской электромагнитной волны. Работа алгоритма продемонстрирована на примере задачи дифракции плоской  $E$ -поляризованной волны на некоторых слоисто-неоднородных средах, в том числе и плазмopodobных, с ленточной решёткой на одной из границ.

### ВВЕДЕНИЕ

Задачи дифракции волн на периодических решётках, образованных идеально проводящими лентами, расположенными в одной плоскости, занимают особое место в теории дифракции электромагнитного поля на периодических структурах [1–6]. Это связано с тем, что для этих задач впервые получены строго обоснованные решения, позволившие аналитически и численно проанализировать электродинамические характеристики ленточных решёток в длинноволновом, резонансном и в коротковолновом диапазонах длин волн [1–4]. Математические методы, развитые в [2, 3] для решения задач дифракции волн на плоских ленточных решётках, стали основой для исследования многих актуальных проблем прикладной электродинамики (см. библиографию к [3–5]). Так, в работе [5] развиты строгие методы, основанные на идее аналитической регуляризации [6]. С их помощью решены задачи дифракции волн на ленточных решётках, расположенных на границах раздела магнетодиэлектриков, киральных и плазмopodobных сред. Одним из существенных недостатков этих методов является то, что в них предполагается независимость материальных параметров сред от пространственных переменных. Устранению этого недостатка посвящена данная работа. В ней апробируется новый численно-аналитический метод на примерах задачи дифракции плоской электромагнитной волны на ленточной решётке, расположенной на слое, диэлектрическая проницаемость которого зависит от одной пространственной координаты. Он основан на идее аналитической регуляризации [5] и результатах работы [7].

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ. МЕТОД АНАЛИТИЧЕСКОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

Рассмотрим электродинамическую структуру, состоящую из плоского неоднородного диэлектрического слоя, занимающего область пространства

$$D = \{(x, y, z): -h \leq z \leq 0; -\infty < x < \infty; -\infty < y < \infty\},$$

где  $x, y, z$  — декартовы координаты, и бесконечно тонкой идеально проводящей периодической ленточной решётки, расположенной на верхней границе слоя при  $z = 0$  (см. рис. 1). Предполагается, что относительная диэлектрическая проницаемость слоя  $\varepsilon$  зависит только от координаты  $z$ , т. е.  $\varepsilon = \varepsilon_1(z)$ , а его магнитная проницаемость  $\mu_1 = \text{const}$ . Период решётки равен  $l$ , расстояние

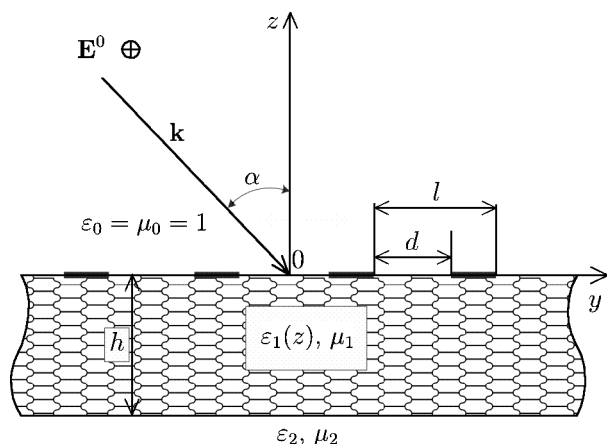


Рис. 1. Геометрия задачи

между краями лент —  $d$ . Будем считать также, что полупространства  $z > 0$  и  $z < -h$  заполнены однородными средами с относительными диэлектрическими и магнитными проницаемостями  $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$  и  $\epsilon_2, \mu_2$ . Вдоль оси  $x$  структура (т. е. решётка и неоднородный вдоль оси  $z$  слой) бесконечна и однородна. Предполагается, что возбуждающая волна и дифракционное поле не зависят от координаты  $x$ , а их зависимость от времени определяется множителем в виде  $\exp(-i\omega t)$ , где  $\omega$  — частота падающей волны.

Процесс взаимодействия монохроматических плоских волн с такой электродинамической структурой моделируется в рамках следующей краевой задачи дифракции. В полупространстве  $z > 0$  распространяется монохроматическая плоская  $E$ -поляризованная волна, вектор напряжённости электрического поля которой параллелен оси  $x$ , а волновой вектор  $\mathbf{k}$  лежит в плоскости  $yz$  и составляет с осью  $z$  угол  $\alpha$ . Отличные от нуля компоненты электромагнитного поля этой волны даются формулами

$$E_x^0 = \exp[ik(y \sin \alpha - z \cos \alpha) - i\omega t], \quad H_y^0 = -\cos \alpha \exp[ik(y \sin \alpha - z \cos \alpha) - i\omega t],$$

$$H_z^0 = -\sin \alpha \exp[ik(y \sin \alpha - z \cos \alpha) - i\omega t],$$

где  $k = \omega/c$ ,  $c$  — скорость света в среде, заполняющей полупространство  $z > 0$ . В дальнейшем временной множитель будем опускать.

Поле дифракции  $\mathbf{E}^d, \mathbf{H}^d$  должно удовлетворять однородной системе уравнений Максвелла, условию Мейкснера, условию излучения на бесконечности (т. е. при  $z \rightarrow \pm\infty$ ), условию квазипериодичности, граничным условиям на идеально проводящих лентах решётки и условию сопряжения на границе неоднородного диэлектрического слоя. Легко показать, что при сделанных предположениях компоненты поля дифракции  $\mathbf{E}^d, \mathbf{H}^d$  выражаются через единственную отличную от нуля компоненту электрического поля  $E_x^d$  по формулам

$$H_y^d = \frac{1}{ik} \times \begin{cases} \frac{\partial E_x^d}{\partial z}, & z > 0; \\ \mu_1^{-1} \frac{\partial E_x^d}{\partial z}, & -h < z < 0; \\ \mu_2^{-1} \frac{\partial E_x^d}{\partial z}, & z < -h, \end{cases} \quad H_z^d = -\frac{1}{ik} \times \begin{cases} \frac{\partial E_x^d}{\partial y}, & z > 0; \\ \mu_1^{-1} \frac{\partial E_x^d}{\partial y}, & -h < z < 0; \\ \mu_2^{-1} \frac{\partial E_x^d}{\partial y}, & z < -h. \end{cases}$$

Остальные компоненты поля  $\mathbf{E}^d, \mathbf{H}^d$  равны нулю, т. е. поле дифракции является  $E$ -поляризованным.

Введём функцию  $u(y, z)$ , совпадающую с электрической компонентой полного поля  $E_x^0 + E_x^d$  при  $z > 0$  и  $E_x^d$  при  $z < 0$ . Как следует из уравнений Максвелла, эта функция всюду вне лент решётки и границы неоднородного слоя должна удовлетворять уравнению Гельмгольца

$$\Delta u(y, z) + k^2 \gamma(z) u(y, z) = 0, \quad \gamma(z) = \begin{cases} 1, & z > 0; \\ \epsilon_1(z) \mu_1, & -h < z < 0; \\ \epsilon_2 \mu_2, & -h < z, \end{cases} \quad (1)$$

быть квазипериодической по координате  $y$ , т. е.

$$u(y + l, z) = \exp(ikl \sin \alpha)u(y, z), \quad (2)$$

удовлетворяют условию Мейкснера [8], которое состоит в выполнении неравенства  $\iint_{\Omega} (|u|^2 + |\nabla u|^2) dy dx < \infty$  для любого ограниченного и замкнутого множества  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , а также условию излучения в полупространствах  $z > 0$  и  $z < -h$ ,

$$u(y, z) = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \exp\left(i \frac{2\pi}{l} \Gamma_{0n} z\right) \exp\left(i \frac{2\pi}{l} ny\right) + E_x^0, & z > 0; \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp\left(-i \frac{2\pi}{l} \Gamma_{2n} z\right) \exp\left(i \frac{2\pi}{l} ny\right), & z < -h, \end{cases} \quad (3)$$

где  $\Gamma_{0n} = \sqrt{\kappa^2 - \Phi_n^2}$ ,  $\Gamma_{2n} = \sqrt{\kappa^2 \varepsilon_2 \mu_2 - \Phi_n^2}$ , а  $\kappa = kl/(2\pi)$ ,  $\Phi_n = n + \kappa \sin \alpha$ , причём ветви корней  $\Gamma_{0n}$  и  $\Gamma_{2n}$  выбраны так, что  $\operatorname{Re} \Gamma_{0n} \geq 0$ ,  $\operatorname{Im} \Gamma_{0n} \geq 0$  и  $\operatorname{Re} \Gamma_{2n} \geq 0$ ,  $\operatorname{Im} \Gamma_{2n} \geq 0$ .

Введём нормированные величины  $\bar{y} = 2\pi y/l$ ,  $\bar{z} = 2\pi z/l$  и  $\bar{h} = 2\pi h/l$  и применим к уравнению (1) метод разделения переменных с учётом условия излучения (3). В результате для искомой функции  $u(y, z)$  получим следующее представление:

$$u(y, z) = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \exp(i\Gamma_{0n} \bar{z}) \exp(i\Phi_n \bar{y}) + E_x^0, & \bar{z} > 0; \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [b_n^1 u_n^+(\bar{z}) + b_n^2 u_n^-(\bar{z})] \exp(i\Phi_n \bar{y}), & -\bar{h} < \bar{z} < 0; \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp[-i\Gamma_{2n} (\bar{z} + \bar{h})] \exp(i\Phi_n \bar{y}), & \bar{z} < -\bar{h}. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь  $\{a_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ ,  $\{b_n^1\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ ,  $\{b_n^2\}_{n=-\infty}^{+\infty}$  и  $\{c_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$  — неизвестные амплитуды дифракционных гармоник, которые подлежат определению, а функции  $u_n^+(\bar{z})$  и  $u_n^-(\bar{z})$  — линейно независимые решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2 u_n^\pm(\bar{z})}{d\bar{z}^2} + [\kappa^2 \varepsilon_1(\bar{z}) \mu_1 - \Phi_n^2] u_n^\pm(\bar{z}) = 0. \quad (5)$$

Предположим, что найдены решения дифференциального уравнения (5), удовлетворяющие при  $\bar{z} = -\bar{h}$  условиям

$$u_n^+(-\bar{h}) = u_n^-(-\bar{h}) = 1, \quad \frac{du_n^+(-\bar{h})}{d\bar{z}} = ip_n, \quad \frac{du_n^-(-\bar{h})}{d\bar{z}} = -ip_n, \quad (6)$$

где  $p_n \neq 0$  и  $p_n = \mu_1 \sqrt{\kappa^2 \varepsilon_2 \mu_2 - \Phi_n^2} / \mu_2$ .

Используя представление (4) и удовлетворяя условиям сопряжения на нижней границе неоднородного слоя, получаем, что

$$b_n^1 = c_n \frac{du_n^-(-\bar{h})/d\bar{z} + \mu_1 i \Gamma_{1n} / \mu_2}{du_n^-(-\bar{h})/d\bar{z} - du_n^+(-\bar{h})/d\bar{z}}, \quad b_n^2 = -c_n \frac{du_n^+(-\bar{h})/d\bar{z} + \mu_1 i \Gamma_{1n} / \mu_2}{du_n^-(-\bar{h})/d\bar{z} - du_n^+(-\bar{h})/d\bar{z}}. \quad (7)$$

Из (6) и (7) непосредственно следует, что  $b_n^1 = 0$ , а  $b_n^2 = c_n$  для всех значений  $n$ .

Граничные условия на металлических лентах решётки имеют вид  $u(\bar{y}, \bar{z})|_{z=0\pm 0} = 0$ . Условия сопряжения на верхней границе неоднородного слоя  $\bar{z} = 0$  имеют вид  $u(\bar{y}, \bar{z})|_{\bar{z}=0+0} = u(\bar{y}, \bar{z})|_{\bar{z}=0-0}$  для всех значений  $\bar{y}$  и вид  $\partial u(\bar{y}, \bar{z})/\partial \bar{z}|_{\bar{z}=0+0} = \mu_1^{-1} \partial u(\bar{y}, \bar{z})/\partial \bar{z}|_{\bar{z}=0-0}$  для значений  $\bar{y}$ , лежащих в

области щелей решётки. С учётом данных граничных условий после ряда преобразований получаем парную функциональную систему уравнений

$$\begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \exp(in\bar{y}) = 0, & \pi d/l < |\bar{y}| < \pi; \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \left[ \Gamma_{0n} + \frac{i}{\mu_1} \frac{du_n^-(0)/d\bar{z}}{u_n^-(0)} \right] \exp(in\bar{y}) = 2\kappa \cos \alpha, & |\bar{y}| \leq \pi d/l, \end{cases} \quad (8)$$

где  $x_n = c_n u_n^-(0)$ .

Для определения  $du_n^-(0)/d\bar{z}$  и  $u_n^-(0)$  рассмотрим задачу Коши вида

$$\frac{d^2 u_n^-(\bar{z})}{d\bar{z}^2} + q_n(\bar{z}) u_n^-(\bar{z}) = 0, \quad -\bar{h} < z < 0, \quad (9)$$

$$u_n^-(-\bar{h}) = 1, \quad \frac{du_n^-(-\bar{h})}{d\bar{z}} = -ip_n, \quad (10)$$

где  $q_n(\bar{z}) = \kappa^2 \varepsilon_1(\bar{z}) \mu_1 - \Phi_n^2$ . Следуя работе [7], введём новую неизвестную функцию  $V_n(\bar{z})$  с помощью формулы

$$u_n^-(\bar{z}) = \exp \left[ \int_{-\bar{h}}^{\bar{z}} V_n(\xi) d\xi \right]. \quad (11)$$

Подставляя (11) в (9) и учитывая, что  $du_n^-/d\bar{z} = V_n u_n^-$ , сводим задачу (9) и (10) к задаче Коши для нелинейного уравнения Риккати

$$\frac{dV_n(\bar{z})}{d\bar{z}} + V_n^2(\bar{z}) + q_n(\bar{z}) = 0, \quad V_n(-\bar{h}) = -ip_n. \quad (12)$$

Интересно отметить, что в точках нарушения непрерывности функции  $q_n(\bar{z})$ , являющихся разрывами первого рода, функция (11) и её первая производная являются непрерывными.

Пусть  $n_0$  есть ближайшее к величине  $\kappa \sin \alpha$ , но не превышающее её, целое число. Тогда  $\kappa \sin \alpha$  может быть представлено в виде  $\kappa \sin \alpha = n_0 + \nu$ , где  $0 \leq \nu < 1$ . С учётом этого и равенства  $du_n^-/d\bar{z} = V_n u_n^-$  сводим систему уравнений (8) к виду

$$\begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \exp(in\bar{y}) = 0, & \vartheta < |\bar{y}| \leq \pi, \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \left[ \Gamma_{0n}^\nu + \frac{i}{\mu_1} \tilde{V}_n(0) \right] \exp(in\bar{y}) = 2\kappa \exp(in_0 \bar{y}) \cos \alpha, & |\bar{y}| \leq \vartheta. \end{cases} \quad (13)$$

Здесь  $y_n = x_{n-n_0}$ ,  $\Gamma_{0n}^\nu = \sqrt{\kappa^2 - (n + \nu)^2}$ ,  $\vartheta = \pi d/l$ ,  $\tilde{V}_n(0) = V_{n-n_0}(0)$ . Из задачи Коши (12) с учётом сдвига индекса  $n$  на  $n_0$  получаем задачу Коши для функции  $\tilde{V}_n(\bar{z})$ :

$$\tilde{V}_n'(\bar{z}) + \tilde{V}_n^2(\bar{z}) + q_n^\nu(\bar{z}) = 0, \quad \tilde{V}_n(-\bar{h}) = -ip_n^\nu, \quad (14)$$

где  $q_n^\nu(\bar{z}) = \kappa^2 \varepsilon_1(\bar{z}) \mu_1 - (n + \nu)^2$ ,  $p_n^\nu(\bar{z}) = \mu_1 \sqrt{\kappa^2 \varepsilon_2 \mu_2 - (n + \nu)^2} / \mu_2$ .

Приближённое решение задачи Коши (14) можно получить с помощью следующего алгоритма. Аппроксимируем интервал  $-\bar{h} < \bar{z} < 0$  конечным числом точек  $\bar{z}_m = -\bar{h} + \delta(m - 1)$ ,  $m = 1, 2, \dots, N$ ,  $\delta = \bar{h}/(N - 1)$ , где  $N$  — натуральное число. Пусть  $W_{mn} = \tilde{V}_n(\bar{z}_m)$ . Задача состоит в

построении алгоритма вычисления этих значений  $\{W_{mn}\}_{m=1}^N$  при  $-\infty < n < +\infty$ . Для её решения проинтегрируем уравнение в (14) в пределах от  $\bar{z}_m$  до  $\bar{z}_{m+1}$  и получим

$$W_{m+1n} - W_{mn} + \int_{\bar{z}_m}^{\bar{z}_{m+1}} \tilde{V}_n^2(\xi) d\xi + \int_{\bar{z}_m}^{\bar{z}_{m+1}} q_n^\nu(\xi) d\xi = 0, \quad m = 1, 2, \dots, N-1; \quad -\infty < n < +\infty. \quad (15)$$

Предполагая, что  $N$  является достаточно большим числом и аппроксимируя интегралы в (15) по формуле трапеции [9], имеем

$$W_{m+1n} - W_{mn} + \frac{\delta}{2} (W_{m+1n}^2 + W_{mn}^2) + \frac{\delta}{2} (q_{m+1n} + q_{mn}) = 0, \quad (16)$$

где  $q_{mn} = q_n^\nu(\bar{z}_m)$ ,  $m = 1, 2, \dots, N$ .

Представим (16) в виде

$$\frac{\delta}{2} W_{m+1n}^2 + W_{m+1n} + F_{mn} = 0. \quad (17)$$

Здесь  $F_{mn} = -W_{mn} + \delta W_{mn}^2/2 + \kappa^2 \delta (q_{m+1n} + q_{mn})/2$ . Из (17) находим

$$W_{m+1n} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 2\delta F_{mn}}}{\delta}. \quad (18)$$

Выбирая в (18) то значение  $W_{m+1n}$ , которое при  $\delta \rightarrow 0$  (т. е.  $N \rightarrow \infty$ ) стремится к  $V_{mn}$ , получаем

$$W_{m+1n} = \frac{-2F_{mn}}{1 + \sqrt{1 - 2\delta F_{mn}}}, \quad m = 1, 2, \dots, N-1. \quad (19)$$

Рекуррентная формула (19) позволяет вычислить значения  $W_{mn} \equiv \tilde{V}_n(\bar{z}_m)$ , если известно значение  $W_{1n} \equiv \tilde{V}_n(\bar{z}_1) = -ip_n^\nu$ . Можно показать (см., например, [9]), что погрешность формулы (16), а, следовательно, и (19) составляет величину порядка  $\delta^2$ .

Таким образом, формула (19) даёт явный вычислительный алгоритм для расчёта значений  $\{W_{mn}\}_{m=1}^N$  при  $-\infty < n < +\infty$ , а в силу равенства  $W_{mn} \equiv \tilde{V}_n(\bar{z}_m)$  и решение задачи Коши (14) на заданной сетке  $\{\bar{z}_m\}_{m=1}^N$ , аппроксимирующей интервал  $-\bar{h} < z < 0$ . Из (19) также следует, что  $\tilde{V}_n(0) = W_{Nn}$ .

В дальнейшем нам понадобится оценка величины  $\tilde{V}_n(0)$  при  $|n| \rightarrow \infty$ . Для её получения введём функцию

$$G_n(\bar{z}) = \frac{\tilde{V}_n(\bar{z})}{|n + \nu|}. \quad (20)$$

Используя (20) и то, что при  $|n| \rightarrow \infty \kappa^2 \mu_1 \varepsilon_1(\bar{z})/|n + \nu|^2 \rightarrow 0$ , из уравнения в (14) получаем уравнение вида

$$\frac{G_n'(\bar{z})}{|n + \nu|} + G_n^2(\bar{z}) - 1 = 0, \quad (21)$$

где  $G_n(-\bar{h}) = -ir_n$ ,  $r_n = \mu_1 \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2 \kappa^2 / |n + \nu|^2 - 1} / \mu_2$ .

Решая уравнение (21), получаем представление

$$G_n(0) \approx \frac{1 - ir_n - \exp(-2|n + \nu|\bar{h})(1 + r_n)}{1 - ir_n + \exp(-2|n + \nu|\bar{h})(1 + r_n)}.$$

Отсюда следует, что  $G_n(0) \rightarrow 1$  при  $|n| \rightarrow \infty$ , а, следовательно, в соответствии с (20),  $\tilde{V}_n(0) \sim |n + \nu|$ , что и требовалось получить.

Введём обозначение  $K_n^\nu = \Gamma_{0n}^\nu + i\tilde{V}_n(0)/\mu_1$  и новые неизвестные  $z_n = (n + \nu) y_n$ . Тогда, учитывая, что  $|n + \nu|/(n + \nu) = |n|/n$  при  $0 \leq \nu < 1$ , в результате несложных преобразований получаем из (13) систему функциональных уравнений относительно  $z_n$ :

$$\begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z_n \exp(in\bar{y}) = 0, & \vartheta < |\bar{y}| \leq \pi; \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z_n \frac{|n|}{n} (1 - \delta_n^\nu) \exp(in\bar{y}) = \frac{i\mu_1}{1 + \mu_1} y_0 K_0^\nu - \frac{i2\kappa\mu_1}{\mu_1 + 1} \exp(in_0\bar{y}) \cos \alpha, & |\bar{y}| \leq \vartheta. \end{cases} \tag{22}$$

Здесь  $\delta_n^\nu = 1 + i\mu_1 K_n^\nu / (1 + \mu_1)$  – параметр малости, причём при  $|n| \rightarrow \infty$

$$\delta_n^\nu = O\left(\frac{1}{|n + \nu|^2}\right). \tag{23}$$

Система (22) с учётом (23) имеет стандартный вид для её регуляризации методом задачи Римана–Гильберта [3]. Применяя последний и учитывая соотношение  $z_n = (n + \nu) y_n$ , получаем для неизвестных  $y_n$  систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (M_{mn} - \delta_n^m) y_n = T_m, \tag{24}$$

где  $M_{mn} = R_{mn}^\nu S_n^\nu$ ,  $T_m = 2i\mu_1 R_{mn_0}^\nu \sqrt{\kappa^2 - (n_0 + \nu)^2} / (1 + \mu_1)$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ,  $\delta_n^m$  – символ Кронекера,

$$R_{mn}^\nu = \begin{cases} \frac{P_\sigma(u, \nu) V_0^n(u) - V_\sigma^n(u)}{1 + \nu P_\sigma(u, \nu)}, & m = 0; \\ \frac{V_{m-1}^{n-1}(u) + \nu [V_m^n(u) P_\sigma(u, \nu) - P_m(u) V_\sigma^n(u)]}{(m + \nu) [1 + \nu P_\sigma(u, \nu)]}, & m \neq 0, \end{cases}$$

$$S_n^\nu = |n + \nu| + \frac{1}{\mu_1 + 1} \left[ i\mu_1 \sqrt{\kappa^2 - (n + \nu)^2} - \tilde{V}_{n+n_0}(0) \right],$$

$u = \cos(\pi d/l)$ ,  $P_m(u)$  – полиномы Лежандра, а функции  $V_m^n(u)$  определяются через полиномы Лежандра и вычислены, например, в [5]:

$$P_\sigma(u, \nu) = \frac{1}{1 - \nu} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \nu} \frac{2n + 1}{n - \nu + 1} P_n(u),$$

$$V_\sigma^n(u) = \begin{cases} \rho_1(u) P_\sigma(u, \nu) - P_\sigma(u, -\nu), & n = 0; \\ \rho_{n+1}(u) P_\sigma(u, \nu) + \frac{1}{n + \nu} \{ P_n(u) [1 - \nu P_\sigma(u, -\nu)] - P_{n-1}(u) [1 + \nu P_\sigma(u, \nu)] \}, & n \geq 1; \\ (1 - u) P_\sigma(u, \nu) - \frac{1}{1 - \nu} \{ [1 - \nu P_\sigma(u, -\nu)] - u [1 + \nu P_\sigma(u, \nu)] \}, & n = -1; \\ \rho_{|n|}(u) P_\sigma(u, \nu) - \frac{1}{n + \nu} \{ P_{|n|}(u) [1 + \nu P_\sigma(u, \nu)] - P_{|n|-1}(u) [1 - \nu P_\sigma(u, -\nu)] \}, & n \leq -2; \end{cases}$$

где  $\rho_0(u) = 1$ ,  $\rho_1(u) = -u$ ,  $\rho_n(u) = P_n(u) - 2uP_{n-1}(u) + P_{n-2}(u)$ ,  $n \geq 2$ .

На основании асимптотических оценок  $\delta_n^\nu = O(1/|n + \nu|^2)$  и  $\tilde{V}_n(0) \sim |n + \nu|$  нетрудно получить, что при  $|n| \rightarrow \infty$  справедлива оценка

$$S_n^\nu = O\left(\frac{1}{|n + \nu|}\right). \tag{25}$$

Исходя из (25) с использованием оценок для  $P_n(u)$  и  $V_m^n(u)$  при  $\{|m|, |n|\} \rightarrow \infty$ , полученных в [5], можно показать, что  $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |M_{mn}|^2 < \infty$ ,  $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} |T_m|^2 < \infty$ . Следовательно, бесконечная система линейных алгебраических уравнений (24) является операторным уравнением второго рода с компактным оператором, и её решение может быть получено с любой наперёд заданной точностью методом усечения, т. е. с помощью замены бесконечной системы уравнений на конечную.

Амплитуды  $\{a_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$  поля дифракции в области отражения  $z > 0$  выражаются через  $\{y_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$  по формулам

$$a_n = y_{n+n_0} - \delta_n^0. \quad (26)$$

В зоне прохождения, при  $z < -h$ , а также в неоднородном слое  $-h \leq z \leq 0$ , в силу полученных равенств  $b_n^1 = 0$ ,  $b_n^2 = c_n$ , выполняется соотношение

$$c_n = \frac{y_{n+n_0}}{u_n(0)}. \quad (27)$$

Из (26) следует формула для вычисления коэффициента отражения  $R = y_{n_0} - 1$ .

Используя (11), получаем, что  $c_n$  могут быть представлены в виде

$$c_n = y_{n+n_0} \exp\left(-\int_{-h}^0 V_n(\xi) d\xi\right). \quad (28)$$

Для вычисления величины  $\exp(-\int_{-h}^0 V_n(\xi) d\xi)$  воспользуемся формулой трапеции и получим следующую рекуррентную схему:

$$\exp\left(-\int_{-h}^0 V_n(\xi) d\xi\right) = B_{Nn}, \quad B_{1n} = 1, \quad B_{m+1n} = B_{mn} \exp\left[-\frac{\delta}{2} (\tilde{W}_{mn} + \tilde{W}_{m+1n})\right],$$

$$\tilde{W}_{mn} = V_n(\bar{z}_m), \quad m = 1, 2, \dots, N-1. \quad (29)$$

Для предложенного выше алгоритма был разработан комплекс программ для расчёта характеристик дифракционного поля, в частности коэффициентов отражения и прохождения.

## 2. ПРИМЕРЫ ЧИСЛЕННОГО РАСЧЁТА

Проиллюстрируем на небольшом числе примеров основные черты численных результатов, полученных описанным выше методом аналитической регуляризации.

Вначале рассмотрим однородный диэлектрический слой с ленточной решёткой. Параметры слоя и решётки такие же, как и в работе [4]:  $\varepsilon = 2,25$ ,  $d/l = 0,45$ ,  $h/l = 1,1$ ,  $\alpha = 10^\circ$  — угол падения плоской  $E$ -поляризованной волны. Как было показано в работе [4], такая периодическая структура обладает ярко выраженными резонансными свойствами в диапазоне частот  $0,597 < \kappa < 0,852$ , где количество волн, распространяющихся в однородном слое, больше, чем в зонах отражения ( $z > 0$ ) и прохождения ( $z < -h$ ). На рис. 2а показана зависимость плотности потока энергии  $W$  прошедшего излучения от частотного параметра  $\kappa$  для такого слоя (сплошная линия). На этом же рисунке приведены аналогичные зависимости и в случае неоднородного диэлектрического слоя с синусоидальной зависимостью диэлектрической проницаемости от координаты  $z$ :  $\varepsilon(z/h) = 2,25 + \sin[4\pi(z/h + 1)]$  (пунктирная линия), и с кубической зависимостью  $\varepsilon(z/h) = (z/h + 1)^3 + 1,25$  (штриховая линия). Графики зависимостей  $\varepsilon(z)$  представлены однотипными линиями на рис. 2б.

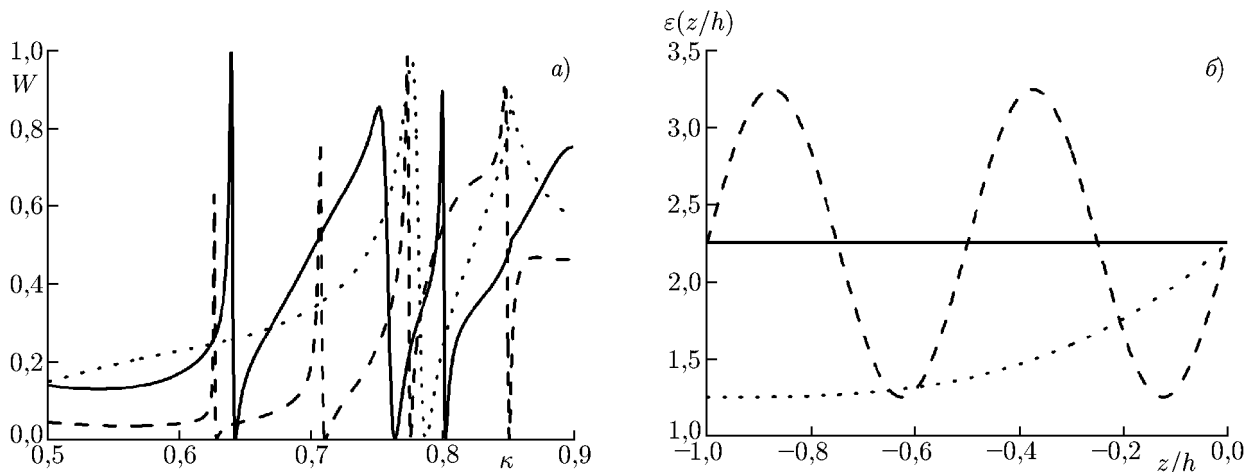


Рис. 2. Зависимости плотности потока энергии  $W$  прошедшего излучения от частотного параметра  $\kappa$  (а); зависимости  $\varepsilon(z/h)$  (б):  $\varepsilon = 2,25$  (сплошная линия),  $\varepsilon(z/h) = 2,25 + \sin[4\pi(z/h + 1)]$  (пунктирная линия),  $\varepsilon(z/h) = (z/h + 1)^3 + 1,25$  (штриховая линия)

Прежде всего отметим, что сравнение зависимости энергии прошедшего излучения от частотного параметра  $\kappa$ , приведённой в [4], с аналогичной зависимостью, рассчитанной с помощью разработанного метода (сплошная линия на рис. 2а), показывает их графическое совпадение. Это является подтверждением достоверности результатов, получаемых с помощью развиваемого в данной работе подхода для решения задач дифракции на ленточных решётках при наличии слоисто-неоднородной диэлектрической среды. Кроме того, как видно из рис. 2а, в случае неоднородных слоёв исследуемая периодическая структура в диапазоне частотного параметра  $0,597 < \kappa < 0,852$  также обладает высокодобротными резонансными режимами практически полного прохождения и отражения. При этом резонансные значения частотного параметра для различных зависимостей  $\varepsilon(z)$  существенно отличаются как друг от друга, так и от случая однородного слоя.

Рассмотрим наиболее длинноволновые резонансы и выясним, насколько их расположение на частотной оси зависит от вида функции  $\varepsilon(z)$ . В частности, определим, можно ли с помощью этих резонансов разрешить слабо отличающиеся по диэлектрической проницаемости неоднородные слои. Для примера рассмотрим два слоя со следующими зависимостями диэлектрической проницаемости от координаты  $z$ :  $\varepsilon_1^{(1)}(z/h) = 3,25 - 4(z/h + 0,5)^2$  и  $\varepsilon_1^{(2)}(z/h) = 2,25 + \sin[\pi(z/h + 1)]$ . На рис. 3б приведены графики этих зависимостей. Как видно, отличие диэлектрических проницаемостей в этом случае незначительно:  $\max |\varepsilon_1^{(1)}(z) - \varepsilon_1^{(2)}(z)| \approx 0,055$ . На рис. 3а однотипными с рис. 3б линиями показаны зависимости модуля коэффициента отражения  $|R|$  от частоты  $f$ . Были выбраны следующие параметры решётки и слоя:  $l = 4$  мм,  $d = 2$  мм,  $h = 4,4$  мм, а угол падения плоской  $E$ -поляризованной волны  $\alpha = 45^\circ$ . Следует отметить, что в рассматриваемом диапазоне частот обе периодические структуры имеют длинноволновый резонанс практически полного прохождения ( $lf/c < 1$ , где  $c$  — скорость света в вакууме). Как видно из рис. 3, несмотря на незначительное различие в распределениях диэлектрической проницаемости по толщине слоя (см. рис. 3б), резонансные частоты различаются почти на 200 МГц. Следовательно, определяя смещение резонансных частот можно контролировать незначительные изменения диэлектрической проницаемости по толщине слоя.

Предложенный метод может быть применён и к исследованию слоисто-неоднородных плазмоподобных сред, которым в последнее время уделяется особое внимание (см., например, [10–15]). В частности, он может быть использован для исследования эффектов безотражательного прохож-



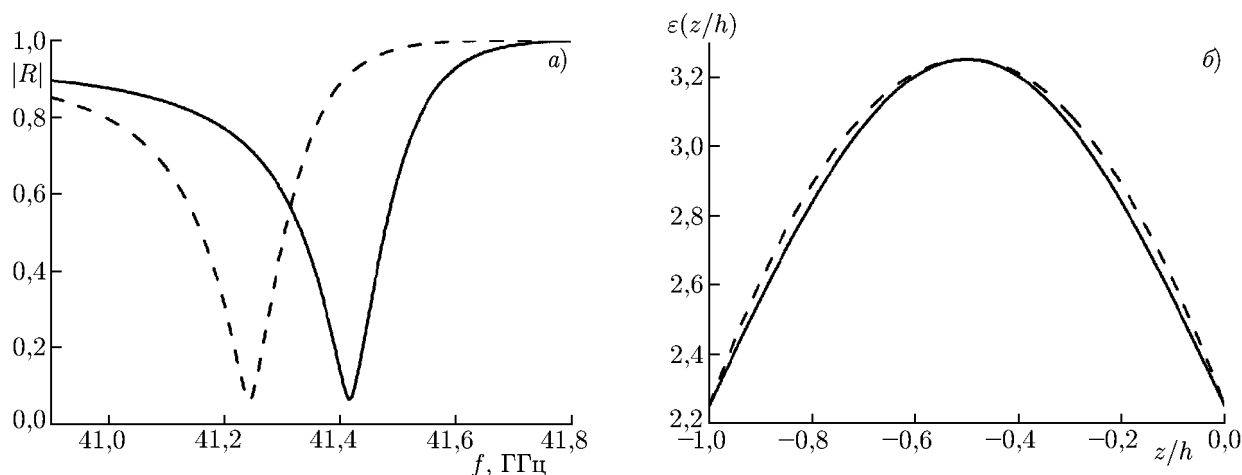


Рис. 3. Зависимость модуля коэффициента отражения  $|R|$  от частоты  $f$  (а) и распределение диэлектрической проницаемости  $\varepsilon(z/h)$  по толщине слоя (б):  $\varepsilon_1^{(1)}(z/h) = 2,25 + \sin[\pi(z/h + 1)]$  (сплошная линия) и  $\varepsilon_1^{(2)}(z/h) = 3,25 - 4(z/h + 0,5)^2$  (пунктирная линия)

дения электромагнитной волны через слой плазмы с субволновыми неоднородностями большой амплитуды [15]. В качестве примера рассмотрим слой, диэлектрическая проницаемость которого зависит от координаты  $z$  согласно формуле

$$\varepsilon(z) = 1 - \frac{\omega_p^2 N(z)}{\omega(\omega + i\nu)},$$

где безразмерная функция  $0 \leq N(z) \leq 1$  определяет распределение электронов по толщине слоя,  $\omega_p$  — плазменная частота, соответствующая максимальной концентрации электронов в слое,  $\nu$  — частота столкновений электронов. Пусть ленточная решётка расположена на одной из границ этого слоя. В дальнейшем будем использовать безразмерные величины  $\kappa_p = \omega_p l / (2\pi c)$ ,  $\bar{\nu} = \nu l / (2\pi c)$ ,  $\kappa = \omega l / (2\pi c)$ .

На рис. 4 представлены результаты расчётов модуля коэффициента отражения  $|R|$  для  $E$ -поляризованной волны от частотного параметра  $\kappa$  для различных видов функции  $N(z/h)$ :  $N(z/h) = z/h$  (пунктирная линия),  $N(z/h) = (z/h)^2$  (штриховая линия) и  $N(z/h) = (z/h)^3$  (штрих-пунктирная линия). На этом же рисунке показана зависимость  $|R|$  для слоя без решётки с  $N(z/h) = z/h$  (сплошная линия) и слоя с решёткой со средним для кубической зависимости значением  $N(z/h) = 1/3$  (штрих-пунктирная линия с двумя точками). Параметры решётки и толщина слоя имеют следующие значения:  $d/l = 0,8$ ,  $h/l = 1,1$ , а нормированная плазменная частота  $\kappa_p = 0,6$ . Как видно из рис. 4а, наличие решётки приводит к появлению резонанса практически полного прохождения  $E$ -поляризованной волны через слой плазмы. Важно отметить, что резонансные значения частотного параметра  $\kappa$ , при которых  $|R|$  принимает минимальное значение, находятся в диапазоне  $\kappa < \kappa_p$ , в котором реальная часть диэлектрической проницаемости плазмы принимает отрицательные значения (см. рис. 4б, на котором одготипными с рис. 4а для различных видов функции  $N(z/h)$  линиями представлены зависимости действительной части диэлектрической проницаемости при резонансных значениях частотного параметра  $\kappa$ , при которых  $|R|$  принимает минимальное значение).

Кроме того, изменяя параметры решётки, например коэффициент заполнения  $d/l$ , или параметры плазмы, например плазменную частоту  $\kappa_p$ , с помощью предлагаемого алгоритма можно провести оптимизацию безотражательного туннелирования электромагнитной волны через неоднородный слой плазмы. На рис. 5 представлены результаты такой оптимизации, где линии равных

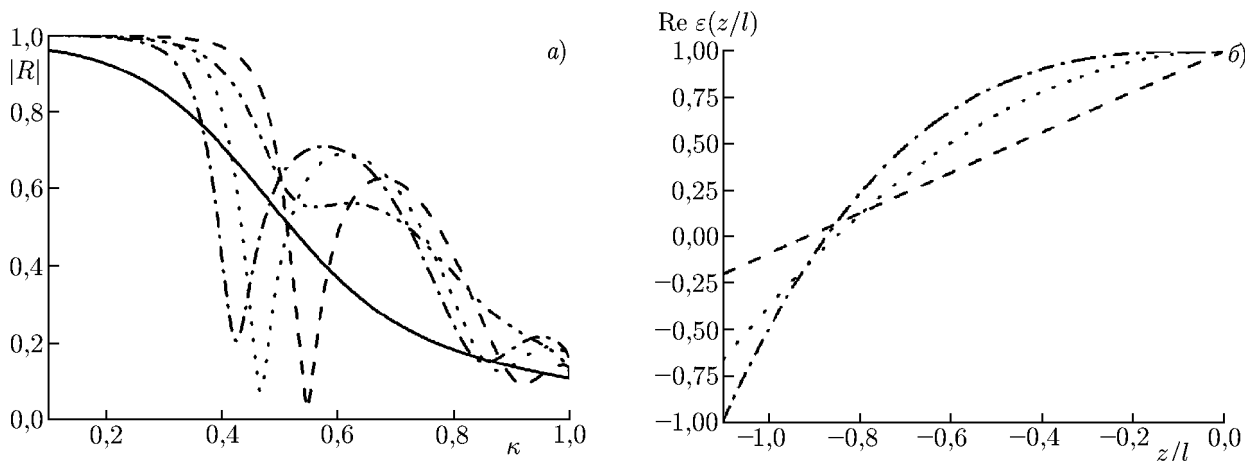


Рис. 4. Зависимость коэффициента отражения  $|R|$  от частотного параметра  $\kappa$  (а) и зависимость действительной части эффективной диэлектрической проницаемости от  $z/l$  в точках минимума  $|R|$  (б) для различных видов функции  $N(z/h)$ :  $N(z/h) = z/h$  (пунктирная линия),  $N(z/h) = (z/h)^2$  (штриховая линия),  $N(z/h) = (z/h)^3$  (штрих-пунктирная линия), слой с  $N(z/h) = z/h$  без решётки отвечает сплошной линии; слой с решёткой с постоянным значением  $N(z/h) = 1/3$  — штрих-пунктирной линии с двумя точками. Значения параметров  $d/l = 0,8$ ,  $h/l = 1,1$ ,  $\kappa_p = 0,6$

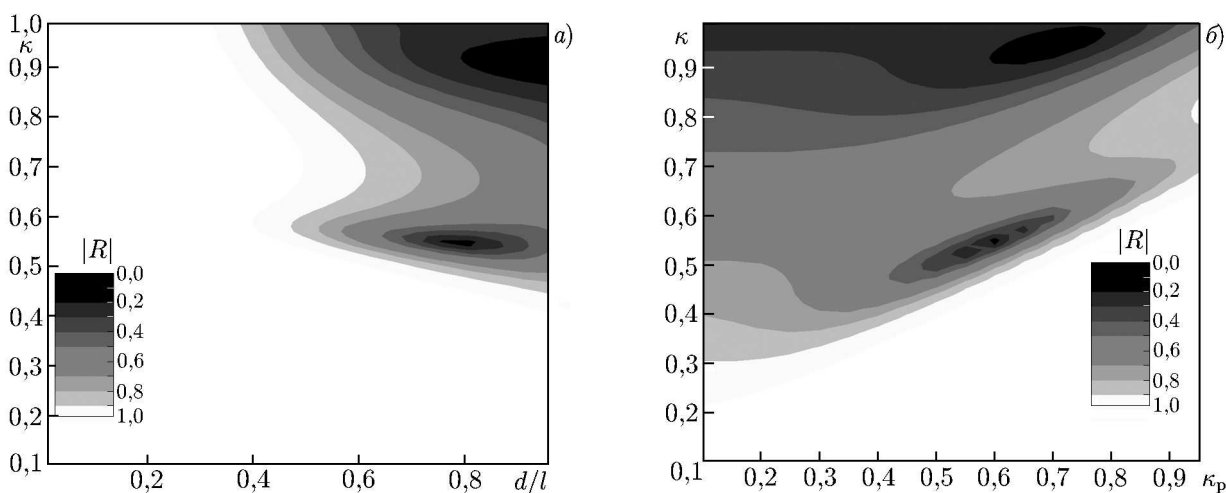


Рис. 5. Линии равных амплитуд модуля коэффициента отражения,  $|R| = \text{const}$ , для функции  $N(z/h) = z/h$  в плоскости частотного параметра  $\kappa$  и коэффициента заполнения решётки  $d/l$  при  $h/l = 1,1$ ,  $\kappa_p = 0,6$  (а); плоскости частотного параметра  $\kappa$  и плазменной частоты  $\kappa_p$  при  $d/l = 0,8$  и  $h/l = 1,1$  (б)

амплитуд коэффициента отражения  $|R| = \text{const}$  показаны в координатах  $d/l, \kappa$  (рис. 5а) и  $\kappa_p, \kappa$  (рис. 5б). Как легко видеть, существуют оптимальные значения параметров  $d/l$  и  $\kappa_p$ , а также частотного параметра  $\kappa$ , при которых модуль коэффициента отражения принимает минимальные значения.

Разработанный алгоритм позволяет рассчитывать электромагнитное поле как вне неоднородного плазменного слоя, так и внутри него. На рис. 6 показаны линии равных значений модуля компоненты  $E_x$  электрического поля на периоде структуры (рис. 6а) и в сечении по оси  $z$  при  $y = 0$  (рис. 6б) для  $N(z/h) = z/h$  при  $\kappa = 0,5475$  для минимального значения коэффициента от-

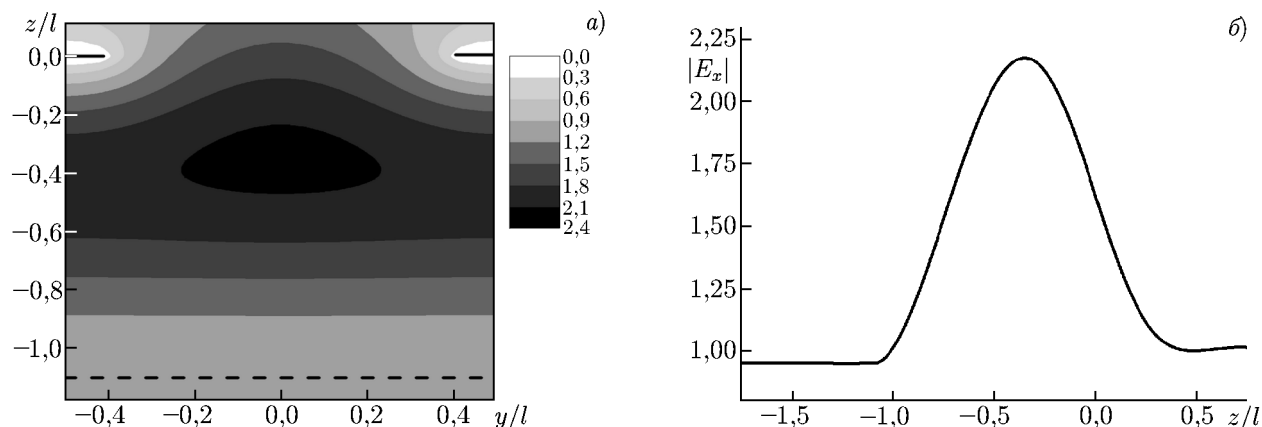


Рис. 6. Линии равных значений модуля компоненты электрического поля  $|E_x| = \text{const}$  при минимальном значении коэффициента отражения  $|R| = 0,028$ ,  $\kappa = 0,5475$  и  $N(z/h) = z/h$  на периоде структуры (а) и распределение  $|E_x|$  в сечении по оси  $z$  при  $y = 0$  (б)

ражения  $|R| = 0,028$ . Как видно из рис. 6б, внутри неоднородного плазменного слоя наблюдается усиление электромагнитного поля, а амплитуда компоненты  $E_x$  электромагнитного поля, нормированная на амплитуду падающей волны, в зоне прохождения  $z/l < -1,1$  близка к единице, что является подтверждением почти безотражательного туннелирования плоской электромагнитной волны через неоднородный плазменный слой.

## ВЫВОДЫ

В настоящей работе развит новый численно-аналитический метод решения задач дифракции волн на ленточной решётке, расположенной на границе слоисто-неоднородной среды. Построен высокоэффективный алгоритм для вычисления дифракционных характеристик такой структуры при наклонном падении на неё плоской электромагнитной волны. Работа алгоритма продемонстрирована на примере задачи дифракции плоской  $E$ -поляризованной волны на некоторых слоисто-неоднородных средах, в том числе и плазмopodobных, с ленточной решёткой на одной из границ. Показано, что, измеряя смещения резонансных частот для коэффициента отражения, можно контролировать незначительные изменения диэлектрической проницаемости по толщине слоя. Показано также, что изменяя параметры решётки, например коэффициент заполнения  $d/l$ , или параметры плазмы, например безразмерную плазменную частоту  $\kappa_p$ , с помощью предложенного алгоритма можно провести оптимизацию безотражательного туннелирования электромагнитной волны через неоднородный слой плазмы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вайнштейн Л. А. Теория дифракции и метод факторизации. М.: Сов. радио, 1966.
2. Шестопапов В. П., Литвиненко Л. Н., Масалов С. А., Сологуб В. Г. Дифракция волн на решётках. Харьков: Изд-во Харьковского ун-та, 1973.
3. Шестопапов В. П. Метод задачи Римана—Гильберта в теории дифракции и распространения волн. Харьков: Изд-во Харьковского ун-та, 1971.
4. Шестопапов В. П., Кириленко А. А., Масалов С. А., Сиренко Ю. К. Дифракционные решётки. Киев: Наукова думка, 1986.

5. Candezon I., Granet G., Melezhik P.N., et al. Modern theory of gratings. Resonant scattering: analysis techniques and phenomena. Dordrecht: Springer, 2010.
6. Шестопалов В. П., Тучкин Ю. А., Поединчук А. Е., Сиренко Ю. К. Новые методы решения прямых и обратных задач теории дифракции. Аналитическая регуляризация краевых задач электродинамики. Харьков: Основа, 1997.
7. Бровенко А. В., Мележик П. Н., Панин С. Б., Поединчук А. Е. // Физические основы приборостроения. 2013. Т. 2, № 1. С. 34.
8. Meixner J. // Zeitschrift für Naturforschung. A. 1948. V. 3. P. 506.
9. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырский П. И. Вычислительные методы. Т. 1, 2. М.: Наука, 1977.
10. Шварцбург А. Б. // Успехи физ. наук. 2000. Т. 170, № 12. С. 1297.
11. Гинзбург В. Л., Рухадзе А. А. Электромагнитные волны в плазме. М.: Наука, 1970. С. 342.
12. Лаговский Б. А. // Радиотехника и электроника. 2006. Т. 51. С. 74.
13. Ерохин Н. С., Михайловская Л. А., Ерохин Н. Н. Некоторые примеры точных решений математических моделей, описывающих колебания непрерывных сред: Препринт № 2109 ИКИ РАН. Москва, 2005.
14. Ерохин Н. С., Захаров В. Е. // Докл. АН. 2007. Т. 416. С. 1.
15. Меркулов Е. С., Ерохин Н. С. // Вопросы атомной науки и техники. Плазменная электроника и новые методы ускорения. 2010. № 4(68). С. 128.

Поступила в редакцию 25 апреля 2013 г.; принята в печать 15 мая 2013 г.

## WAVE DIFFRACTION ON A BAND GRATING AT A BOUNDARY OF A LAYERED INHOMOGENEOUS MEDIUM: METHOD OF ANALYTIC REGULARIZATION

*A. V. Brovenko, P. N. Melezhik, S. B. Panin, and A. E. Poedinchuk*

In this work, we develop a novel numerical analytic method of solving the problem of wave diffraction on a band array situated at a boundary of a layered inhomogeneous medium. A high-efficiency algorithm for calculation of the diffraction characteristics of such a structure in the case, where a plane electromagnetic wave is incident on it obliquely, has been developed. The operation of the algorithm is demonstrated on an example of the problem about diffraction of a plane  $E$ -polarized wave on certain layered inhomogeneous media, including plasma-like ones, with a band array at one of its boundaries.