

УДК 621.396

СЛЕПАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ OFDM-СИГНАЛОВ В МНОГОЛУЧЁВЫХ КАНАЛАХ НА ОСНОВЕ ВРЕМЕННЫХ И ЧАСТОТНЫХ ЗАЩИТНЫХ ИНТЕРВАЛОВ

Г. Н. Бочков¹, К. В. Горохов^{1,2}, А. В. Колобков^{1,2}

¹ Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского;

² Научно-производственное предприятие «Полёт», г. Нижний Новгород, Россия

Разработаны и исследованы новые методы слепой синхронизации приёмника OFDM-сигналов во времени и по частоте. Они обобщают известные методы, использующие либо защитный интервал во времени в виде «циклического префикса», либо защитный интервал по частоте в виде «виртуальных поднесущих», и основаны на их совместном применении. Для уменьшения вычислительной сложности предложены приближённые алгоритмы, основанные на аппроксимации оптимальных правил, но обладающие, как показали исследования, практически такими же характеристиками точности оценивания параметров и помехоустойчивости приёма. Показано, что предложенные методы превосходят по точности оценивания параметров и помехоустойчивости приёма известные методы синхронизации по циклическому префиксу и по виртуальным поднесущим в двухлучёвом канале с рэлеевскими замираниями. Для некогерентных систем с относительными видами фазовой модуляции использование данных методов позволяет исключить необходимость точной синхронизации и за счёт незначительной избыточности полосы системы и длины циклического префикса вплотную приблизиться к помехоустойчивости приёма при идеальной синхронизации.

ВВЕДЕНИЕ

Многочастотные сигналы, полученные ортогональным частотным мультиплексированием гармонических составляющих (поднесущих), — так называемые OFDM-сигналы (Orthogonal Frequency Division Multiplexing) — широко используются в различных цифровых системах высокоскоростной передачи информации [1]. Вопросы синхронизации для таких сигналов, обладающих повышенной чувствительностью к частотному и временному сдвигам, имеют особое значение [1–8]. При этом определяющими являются вопросы оценивания частотной расстройки и времени запаздывания. Компенсация обычно проводится с помощью перестраиваемого сдвига частоты и управления задержкой дискретизованных сигналов.

Алгоритмы оценивания параметров синхронизации OFDM-сигналов можно разделить на две категории [8]: методы, использующие периодически передаваемые известные на приёмной стороне символы или поднесущие, и слепые методы, основанные на общих свойствах передаваемого сигнала. Последние, не требуя для своей работы специальных обучающих символов и пилотных поднесущих, позволяют повысить спектральную эффективность системы. Поскольку синхронизаторы на основе слепых методов оценивания не способны определить и скомпенсировать общий для всех поднесущих фазовый сдвиг, их применение наиболее целесообразно в системах с относительными видами модуляции и некогерентным приёмом.

Как правило, слепые алгоритмы получены эвристически, однако часть из них может быть выведена на основе метода максимального правдоподобия при наличии той или иной априорной информации. Среди последних наиболее известными являются алгоритмы, базирующиеся на корреляции защитного интервала во времени в виде циклического префикса и окончания OFDM-символа [4, 5], и методы, основанные на минимизации мощности принимаемого сигнала на виртуальных поднесущих из защитного интервала в частотной области [6]. Особенностью этих

алгоритмов является то, что они не используют информацию о структуре сигнала на активных поднесущих и, следовательно, применимы к любому виду модуляции OFDM-сигнала.

В данной работе для повышения качества слепой оценки частотных и временных сдвигов предлагается более полно использовать априорную информацию о защитных интервалах, используемых в OFDM-системе, и учесть наличие как виртуальных поднесущих, так и циклического префикса.

В разделе 1 описывается модель OFDM-системы при наличии частотных и временных сдвигов в многолучевом канале. В рамках этой модели детально исследуется структура принимаемого сигнала, на основе которой устанавливается оптимальный интервал анализа при синхронизации, обеспечивающий однозначность выделения конкретного OFDM-символа и максимальный диапазон измеряемых задержек в канале. В разделе 2 на основе обобщённого метода максимального правдоподобия единым образом синтезируются как новые алгоритмы оценивания задержек во времени и сдвигов по частоте, учитывающие наличие защитных интервалов во времени и по частоте, так и известные алгоритмы на основе циклического префикса или виртуальных поднесущих. В разделе 3 представлены результаты численного исследования помехоустойчивости синхронизации и приёма, демонстрирующие преимущество предложенных в работе алгоритмов в многолучевых каналах с аддитивным белым гауссовским шумом, рэлеевскими замираниями и отстройками сигнала во времени и по частоте. В заключении сформулированы основные полученные результаты.

Введём обозначения, которые будут использоваться нами в дальнейшем: $\text{diag}(\mathbf{x})$ — диагональная матрица с вектором \mathbf{x} на главной диагонали, \mathbf{I}_n — единичная $(n \times n)$ -матрица, \mathbf{J}_n — $(n \times n)$ -матрица перестановок (единичные элементы которой расположены на главной обратной диагонали); $\mathbf{0}_{n,k}$ — нулевая $(n \times k)$ -матрица, индекс \mathbf{H} обозначает эрмитово сопряжение, индекс \mathbf{T} — транспонирование, индекс $*$ — комплексное сопряжение, $\|\mathbf{a}\|_2 = \sqrt{\mathbf{a}^H \mathbf{a}}$ — эрмитова норма вектора \mathbf{a} . Обозначения размеров в записи матриц \mathbf{I}_n , \mathbf{J}_n и $\mathbf{0}_{n,k}$ будут опускаться, когда они ясны из контекста. Дополнительно обозначим $\langle A \rangle_n$ статистическое усреднение выражения A по перечисленным в нижнем индексе случайным переменным либо, если перечисление отсутствует, по всем случайным переменным.

Введём также специальное обозначение $\mathbf{W}_{n,m,k} = (\mathbf{0}_{n,m}, \mathbf{I}_n, \mathbf{0}_{n,k-m-n})$ для «матрицы окна» с размерами $n \times k$, описывающей выделение вектора с длиной n из вектора с длиной k , начиная с $(m+1)$ -го элемента. При этом $\mathbf{W}_{n,m,k}^T$ является «матрицей расширения» вектора с длиной n до вектора с длиной k посредством добавления m нулевых элементов в начале и $k-m-n$ — в конце («матрица расширения» имеет размеры $(k \times n)$). Общие соотношения для операций с матрицами окна и расширения приведены в Приложении 1.

1. МОДЕЛЬ OFDM-СИСТЕМЫ СВЯЗИ ПРИ НАЛИЧИИ ЧАСТОТНЫХ И ВРЕМЕННЫХ СДВИГОВ

Рассмотрим OFDM-систему с полосой ΔF , в которой используются защитные интервалы по частоте, позволяющие пренебречь взаимным влиянием данной и соседних по частоте систем при наличии частотных уходов. Для этого из N поднесущих, расположенных в полосе системы с шагом $\Delta f = \Delta F/N = T^{-1}$, для передачи информации используются только M активных поднесущих. Остальные $N_{\text{VS}} = N - M$ поднесущих принимаются равными нулю и называются виртуальными (virtual subcarriers, VS). Без потери общности будем полагать, что активными являются поднесущие с номерами от 0 до $M-1$. Тогда N отсчётов k -го OFDM-символа, формируемого на передающей стороне с интервалом дискретизации во времени $\tau_s = T/N$, будут представлены вектором $\mathbf{s}[k] = \mathbf{F}\mathbf{d}[k]$, где $\mathbf{d}[k]$ — вектор комплексных амплитуд активных под-

несущих и $\mathbf{F} = \mathbf{U}\mathbf{W}_{M,0,N}^T = (\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_{M-1})$ — матрица, содержащая первые M столбцов $\mathbf{u}_n = \{N^{-1/2} \exp(i2\pi nl/N) \mid 0 \leq l \leq N-1\}$ матрицы обратного дискретного преобразования Фурье $\mathbf{U} = (\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{N-1})$.

Комплексные амплитуды активных поднесущих определяются законом модуляции. Использование для OFDM-сигналов фазоразностной модуляции m -го порядка во временной (модуляция ВФРМ- m) или частотной (модуляция ЧФРМ- m) области и алгоритмов некогерентного приёма позволяет ослабить влияние фазовых искажений в канале [9–11] и, как следствие, упростить схему синхронизации. Относительной инвариантностью как к частотным, так и к временным отстройкам обладает фазоразностная модуляция 2-го порядка (ФРМ-2, [10]). Обобщением ЧФРМ-2, описывающим все возможные способы выбора разностей фаз 2-го порядка, является трифазовая модуляция [11]. Варианты трифазовой модуляции с двумя опорными поднесущими, участвующими в образовании всех информационных трифаз, образуют подкласс оптимальной трифазовой модуляции (ОТФМ) и при оптимальном перераспределении мощности сигнала обеспечивают наилучшую помехоустойчивость.

Для защиты от межсимвольной интерференции между последовательными символами вставляется защитный интервал. Его длительность $T_G = N_G \tau_s$ должна быть больше максимальной ожидаемой величины рассеяния по времени в канале $T_L = L \tau_s$. Обычно защитный интервал используют для передачи циклического префикса, который представляет собой последние N_G отсчётов следующего за ним символа. В этом случае $K = N + N_G$ отсчётов передаваемого OFDM-символа описываются вектором

$$\mathbf{s}_{tx}[k] = \mathbf{T}_{K,N} \mathbf{s}[k] = \mathbf{T}_{K,N} \mathbf{F} \mathbf{d}[k], \quad (1)$$

где $\mathbf{T}_{k,n} = (\mathbf{W}_{k-n,2n-k,n}^T, \mathbf{I}_n)^T$ — $(k \times n)$ -матрица добавления циклического префикса с длительностью $k - n$ отсчётов.

Отсчёты сигнала на выходе многолучевого канала связи с импульсной характеристикой $\mathbf{h} = (h_0, \dots, h_L)^T$, частотным сдвигом ν и аддитивным белым гауссовым шумом (АБГШ), на которые оказывают влияние только три последовательно переданные OFDM-символа, образуют вектор с длиной $3K - L$

$$\mathbf{r}[k] = \exp\{i[\varphi_0 + (k-1)K_0\varphi]\} \mathbf{P}_{3K-L}(\varphi) \mathbf{H}_{3K-L,3K} \left(\mathbf{s}_{tx}^T[k-1], \mathbf{s}_{tx}^T[k], \mathbf{s}_{tx}^T[k+1] \right)^T + \mathbf{n}_{3K-L}. \quad (2)$$

Здесь $K_0 = K - L$, φ_0 — случайная начальная фаза, учитывающая условность нумерации переданных символов, $\mathbf{H}_{n,m}$ — трёхдиагональная матрица с размерами $(n \times m)$ [12] с первой строкой $(\mathbf{h}^T \mathbf{J}, \mathbf{0}_{1,m-L-1})$ и первым столбцом $(h_L, \mathbf{0}_{1,n-1})^T$, $\mathbf{P}_n(\varphi) = \text{diag}\{1, \exp(i\varphi), \dots, \exp[i(n-1)\varphi]\}$ — матрица с размерами $(n \times n)$, описывающая искажение сигнала во временной области при нормированном значении частотного сдвига $\varphi = 2\pi\nu T/N$, \mathbf{n}_m — вектор АБГШ с длиной m и с корреляционной матрицей $\sigma^2 \mathbf{I}_m$.

В дальнейшем, с целью упрощения записей, не ограничивая общности, будем рассматривать в качестве принимаемого сигнала вектор $\mathbf{r} = \mathbf{r}[0]$. Структура канальной матрицы имеет вид (см. рис. 1)

$$\mathbf{H}_{3K-L,3K} = (\mathbf{W}_{K,0,3K-L}^T \mathbf{H}_{K,K}, \mathbf{W}_{K+L,K-L,3K-L}^T \mathbf{G}_{K+L,K}, \mathbf{W}_{K,2K-L,3K-L}^T \mathbf{G}_{K,K}), \quad (3)$$

где $\mathbf{G}_{n,m}$ — трёхдиагональная матрица с размерами $(n \times m)$ с первым столбцом $(\mathbf{h}^T, \mathbf{0}_{1,n-L-1})^T$ и первой строкой $(h_0, \mathbf{0}_{1,m-1})$. Учитывая (3) и соотношение $\mathbf{W}_{n,m,j} \mathbf{P}_j(\varphi) = \exp(im\varphi) \mathbf{P}_n(\varphi) \mathbf{W}_{n,m,j}$, в векторе принимаемого сигнала

$$\mathbf{r} = \mathbf{W}_{K,0,3K-L}^T \mathbf{s}_{rx}[-1] + \mathbf{W}_{K+L,K-L,3K-L}^T \mathbf{s}_{rx}[0] + \mathbf{W}_{K,2K-L,3K-L}^T \mathbf{s}_{rx}[+1] + \mathbf{n}_{3K-L} \quad (4)$$

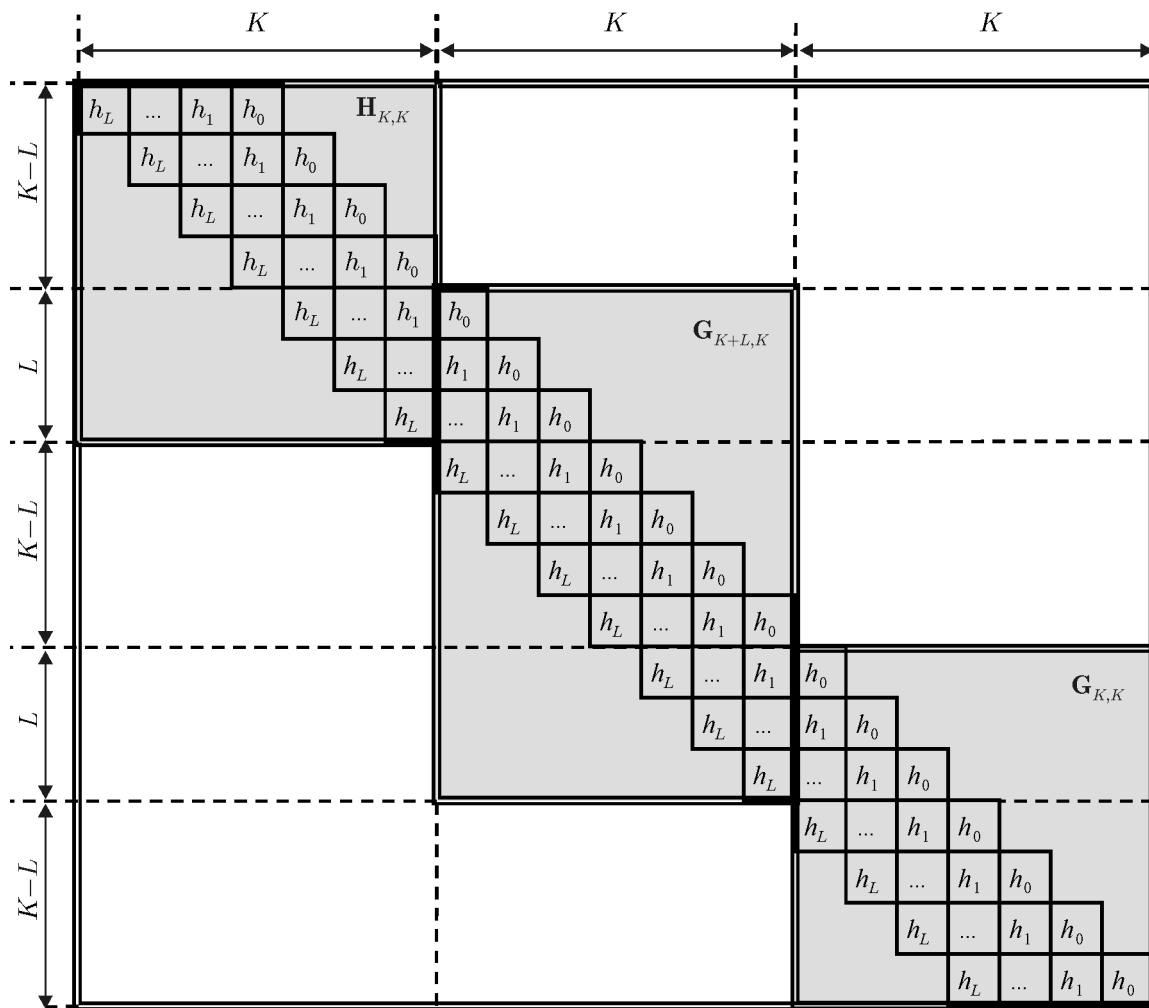


Рис. 1. Структура канальной матрицы $\mathbf{H}_{3K-L, 3K}$

выделим вклады отдельных символов:

$$\mathbf{s}_{rx}[-1] = \exp[i(\varphi_0 - K_0\varphi)]\mathbf{P}_K(\varphi)\mathbf{H}_{K,K}\mathbf{s}_{tx}[-1], \tag{5a}$$

$$\mathbf{s}_{rx}[0] = \exp(i\varphi_0)\mathbf{P}_{K+L}(\varphi)\mathbf{G}_{K+L,K}\mathbf{s}_{tx}[0], \tag{5b}$$

$$\mathbf{s}_{rx}[+1] = \exp[i(\varphi_0 + K\varphi)]\mathbf{P}_K(\varphi)\mathbf{G}_{K,K}\mathbf{s}_{tx}[+1]. \tag{5в}$$

Пусть τ — задержка сигнала во времени (принимаяющая значение целого числа интервалов τ_s) и N_a — длина интервала анализа принимаемого сигнала, используемого для синхронизации. Выбирая точку отсчёта величины задержки так, чтобы для $\tau = 0$ начало интервала анализа совпало с началом появления в принимаемом сигнале (4) вклада (5б) символа с индексом 0, вектор анализируемых отсчётов с длиной N_a («вектор наблюдений») определим в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{W}_{N_a, K_0 - \tau, 3K - L}\mathbf{r} = \mathbf{y} + \mathbf{n}_{N_a}. \tag{6}$$

Здесь $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\varphi_0, \tau, \varphi, \mathbf{h}, \mathbf{d}) = \langle \mathbf{x} \rangle_{\mathbf{n}_{N_a}}$ — «вектор модели», представляющий ожидаемый вектор наблюдений при заданных параметрах передаваемого сигнала $\mathbf{d} = (\mathbf{d}^T[-1], \mathbf{d}^T[0], \mathbf{d}^T[+1])^T$ и канала $(\varphi_0, \tau, \varphi, \mathbf{h})$.

Отметим, что слепые методы синхронизации используют общие для всех OFDM-символов свойства передаваемого сигнала и, следовательно, не позволяют идентифицировать конкретный символ. Поэтому существуют ограничения на предельную задержку, при которой данные алгоритмы работоспособны. При этом интервал анализа N_a необходимо выбрать так, чтобы обеспечить однозначность привязки к конкретному символу с индексом 0 и одновременно максимизировать диапазон допустимых задержек. Для выполнения первого требования необходимо, чтобы при всех допустимых τ интервал анализа включал вклад (5б) символа с индексом 0 полностью, а вклады (5а) и (5в) соседних символов — частично. В результате анализа сигнала (6) с использованием (4) (см. Приложение 2) получаем требуемую форму вектора модели:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{L+\tau, K_0-\tau, K} \\ \mathbf{0}_{N_a-L-\tau, K} \end{pmatrix} \mathbf{s}_{rx}[-1] + \mathbf{W}_{K+L, \tau, N_a}^T \mathbf{s}_{rx}[0] = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{K+\tau, K} \\ \mathbf{W}_{N_a-K-\tau, 0, K} \end{pmatrix} \mathbf{s}_{rx}[+1], \quad (7)$$

для которой при оптимальном значении длины интервала анализа

$$N_a = 2K - 1 \quad (8)$$

обеспечивается максимальный диапазон допустимых задержек

$$0 \leq \tau \leq K_0 - 1. \quad (9)$$

Как следует из структуры канальной матрицы на рис. 1, при компенсации истинного значения задержки синхронизатор может выделить из принимаемого сигнала сегмент из K_0 отсчётов, содержащий всю неискажённую межсимвольной интерференцией информацию о сообщении, переданном на символе с индексом 0. Действительно, при заданном значении τ вектор наблюдения (6) можно представить в виде $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_{-1}^T, \mathbf{x}_{-0}^T, \mathbf{x}_0^T, \mathbf{x}_{+0}^T, \mathbf{x}_{+1}^T)$, т. е. разбиения на блоки $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k(\tau)$ с независимыми АБГШ-составляющими и соответствующими блоками вектора модели (7):

$$\mathbf{y}_{-1} = \mathbf{W}_{\tau, 0, N_a} \mathbf{y} = \exp[i(\varphi_0 - \tau\varphi)] \mathbf{P}_{\tau}(\varphi) \mathbf{W}_{\tau, K_0-\tau, K_0} \mathbf{T}_{K_0, N} \mathbf{F} \mathbf{H}_M \mathbf{d}[-1], \quad (10а)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{-0} &= \mathbf{W}_{L, \tau, N_a} \mathbf{y} = \\ &= \exp(i\varphi_0) \mathbf{P}_L(\varphi) \left(\mathbf{W}_{L, K_0, K} \mathbf{H}_{K, K} \mathbf{T}_{K, N} \mathbf{F} \mathbf{d}[-1] + \mathbf{W}_{L, 0, K+L} \mathbf{G}_{K+L, K} \mathbf{T}_{K, N} \mathbf{F} \mathbf{d}[0] \right), \end{aligned} \quad (10б)$$

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{W}_{K_0, L+\tau, N_a} \mathbf{y} = \exp[i(\varphi_0 + L\varphi)] \mathbf{P}_{K_0}(\varphi) \mathbf{T}_{K_0, N} \mathbf{F} \mathbf{H}_M \mathbf{d}[0], \quad (10в)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{+0} &= \mathbf{W}_{L, K+\tau, N_a} \mathbf{y} = \\ &= \exp[i(\varphi_0 + K\varphi)] \mathbf{P}_L(\varphi) \left(\mathbf{W}_{L, K, K+L} \mathbf{G}_{K+L, K} \mathbf{T}_{K, N} \mathbf{F} \mathbf{d}[0] + \mathbf{W}_{L, 0, K} \mathbf{G}_{K, K} \mathbf{T}_{K, N} \mathbf{F} \mathbf{d}[+1] \right), \end{aligned} \quad (10г)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{+1} &= \mathbf{W}_{K_0-1-\tau, K+L+\tau, N_a} \mathbf{y} = \\ &= \exp[i(\varphi_0 + (K+L)\varphi)] \mathbf{P}_{K_0-1-\tau}(\varphi) \mathbf{W}_{K_0-1-\tau, 0, K_0} \mathbf{T}_{K_0, N} \mathbf{F} \mathbf{H}_M \mathbf{d}[+1]. \end{aligned} \quad (10д)$$

Интересующий нас участок принимаемого сигнала \mathbf{x}_0 представлен вектором \mathbf{y}_0 в (10в), где $\mathbf{H}_n = \text{diag}(H_0, \dots, H_{n-1})$ и $H_m = \sum_{k=0}^L \exp(-i2\pi km/N) h_k$ — передаточная функция канала на частоте m -й поднесущей (см. Приложение 3). Выражения (10а) и (10д) описывают модели $\mathbf{y}_{\pm 1}$ для неискажённых межсимвольной интерференцией наблюдений \mathbf{x}_{+1} и \mathbf{x}_{-1} смежных символов с индексами +1 и -1 и структурно отличаются от (10в) лишь дополнительной операцией «обрезания»

окном наблюдения. Модели \mathbf{y}_{+0} и \mathbf{y}_{-0} в (10б) и (10г) соответствуют наблюдениям \mathbf{x}_{+0} и \mathbf{x}_{-0} , порожённым интерференцией между символами с индексом 0 и символами с индексами +1 и -1 соответственно.

Таким образом, считая, что целью синхронизации во времени является выделение участка \mathbf{x}_0 , операцию компенсации предполагаемых значений задержки во времени θ и нормированного частотного сдвига ϕ целесообразно определить матрицей

$$\mathbf{R}(\theta, \phi) = \exp(-iL\phi)\mathbf{P}_{K_0}(-\phi)\mathbf{W}_{K_0, L+\theta, N_a} = \exp(i\theta\phi)\mathbf{W}_{K_0, L+\theta, N_a}\mathbf{P}_{N_a}(-\phi), \quad (11)$$

а выходной сигнал синхронизатора — вектором $\mathbf{z}(\theta, \phi) = \mathbf{R}(\theta, \phi)\mathbf{x}$. Для случая точной синхронизации с учётом (10в) имеем

$$\mathbf{z}(\tau, \varphi) = \exp(i\varphi_0)\mathbf{T}_{K_0, N}\mathbf{F}\mathbf{H}_M\mathbf{d}[0] + \mathbf{n}_{K_0}. \quad (12)$$

Стандартные демодуляторы OFDM-сигналов, использующие минимальный интервал с длительностью N отсчётов, после отбрасывания циклического префикса и преобразования Фурье восстанавливают сообщение на основе вектора оценки комплексных амплитуд активных поднесущих:

$$\tilde{\mathbf{d}}[0] = \mathbf{F}^H\mathbf{W}_{N, N_G-L, K_0}\mathbf{z}(\tau, \varphi) = \exp(i\varphi_0)\mathbf{H}_M\mathbf{d}[0] + \mathbf{n}_M.$$

Ясно, что для систем с абсолютными видами модуляции для правильного восстановления сообщения необходимо дополнительно оценивать общий фазовый поворот φ_0 и передаточную характеристику канала \mathbf{H}_M . Для некогерентных систем с фазоразностной модуляцией любого порядка случайный общий фазовый поворот не влияет на помехоустойчивость приёма [9, 10].

Заметим, что при априори неизвестной длительности канала в качестве оценки величины L часто используют максимальное возможное значение. При этом как при известной длительности канала, так и при использовании её верхней границы обычно выбирают длительность защитного интервала таким образом, что $N_G = L$. Во-первых, такой выбор затрудняет использование защитного интервала во времени для повышения точности синхронизации. Во-вторых, выходной сигнал синхронизатора (12) имеет минимальную допустимую длительность N и не даёт «дополнительных степеней свободы» для повышения помехоустойчивости демодулятора. Вместе с тем выбор $N_G > L$ позволяет не только использовать защитный интервал во времени для повышения точности синхронизации, но и повысить помехоустойчивость приёма за счёт обработки в расширенном интервале в оптимальном демодуляторе, синтезированном на основе модели (12). Влияние избыточного выбора длины защитного интервала на точность синхронизации исследовано ниже в разделе 3, а вопросы синтеза и анализа оптимального демодулятора выходят за рамки данной работы.

В заключение данного раздела выясним влияние размеров защитных интервалов на спектральную эффективность системы, которая характеризуется удельной скоростью

$$c = c_0 \left(1 + \frac{N_{VS} + N_G}{M}\right)^{-1} = c_1 \left(1 + \frac{\Delta_{VS} + \Delta_G}{M + |\nu|T + L}\right)^{-1} \approx c_1 \left(1 - \frac{\Delta_{VS} + \Delta_G}{M + |\nu|T + L}\right). \quad (13)$$

Здесь c_0 — зависящая от вида модуляции удельная скорость для системы без защитных интервалов, $c_1 = c_0 [1 + (|\nu|T + L)/M]^{-1}$ — удельная скорость системы с минимальными защитными интервалами, которые определяются максимальными ожидаемыми значениями абсолютной величины частотного сдвига $|\nu|$ и интервала многолучёвости L , $\Delta_{VS} = N_{VS} - |\nu|T$ и $\Delta_G = N_G - L$ — избыточные размеры защитных интервалов. Последняя часть в (13) справедлива при выполнении

условия малой суммарной избыточности защитных интервалов: $\Delta_{VS} + \Delta_G \ll M + |\nu|T + L$. Причём, если это условие выполняется, то удельная скорость снижается не обратно пропорционально, а прямо пропорционально избыточности защитных интервалов, и эта избыточность ухудшает спектральную эффективность системы незначительно.

2. СИНТЕЗ АЛГОРИТМОВ ОЦЕНИВАНИЯ ЧАСТОТНЫХ И ВРЕМЕННЫХ СДВИГОВ НА ОСНОВЕ ВИРТУАЛЬНЫХ ПОДНЕСУЩИХ И ЦИКЛИЧЕСКОГО ПРЕФИКСА

Для оценивания параметров сигнала широко используется метод максимального правдоподобия [13]. Для анализируемого отрезка сигнала (6) функция правдоподобия имеет вид

$$L(\tau, \varphi, \mathbf{h}, \mathbf{d}) = (\pi\sigma^2)^{-N_a} \exp\left(-\sigma^{-2} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}(\tau, \varphi, \mathbf{h}, \mathbf{d})\|_2^2\right), \quad (14)$$

где параметры передаваемого сигнала и канала считаются неизвестными детерминированными величинами и начальная фаза φ_0 «включена» в импульсную характеристику канала \mathbf{h} . На основе (14) получаем совместную оценку максимального правдоподобия

$$\{\tau_{ML}, \varphi_{ML}, \mathbf{h}_{ML}, \mathbf{d}_{ML}\} = \arg \min_{\tau, \varphi, \mathbf{h}, \mathbf{d}} S(\tau, \varphi, \mathbf{h}, \mathbf{d}), \quad (15)$$

где решающая статистика $S(\tau, \varphi, \mathbf{h}, \mathbf{d}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}(\tau, \varphi, \mathbf{h}, \mathbf{d})\|_2^2$ с точностью до знака и постоянного слагаемого представляет собой логарифм функции правдоподобия.

Задачу (15) можно упростить и разбить её на набор последовательных процедур по отдельной оценке параметров, используя обобщённый метод максимального правдоподобия [14]. Для получения оценки задержки во времени и смещения по частоте необходимо предварительно найти условные оценки сопутствующих параметров $\mathbf{d}_{ML}(\tau, \varphi)$ и $\mathbf{h}_{ML}(\tau, \varphi)$, а затем использовать их в качестве истинных значений сопутствующих параметров. Однако воспользоваться этим способом непосредственно не представляется возможным, поскольку затруднительно найти выражение для целевой функции $S[\tau, \varphi, \mathbf{h}_{ML}(\tau, \varphi), \mathbf{d}_{ML}(\tau, \varphi)]$ в замкнутой форме. Эта трудность связана с тем, что в разложении решающей статистики

$$S(\tau, \varphi, \mathbf{h}, \mathbf{d}) = S_{-1}(\tau, \varphi, \mathbf{h}, \mathbf{d}[-1]) + S_{-0}(\tau, \varphi, \mathbf{h}, \mathbf{d}[-1], \mathbf{d}[0]) + S_0(\tau, \varphi, \mathbf{h}, \mathbf{d}[0]) + \\ + S_{+0}(\tau, \varphi, \mathbf{h}, \mathbf{d}[0], \mathbf{d}[+1]) + S_{+1}(\tau, \varphi, \mathbf{h}, \mathbf{d}[+1]) \quad (16)$$

на сумму статистик $S_k = \|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k\|_2^2$ отдельных блоков \mathbf{x}_k с независимыми АБГШ и моделями (10) присутствуют слагаемые S_{+0} и S_{-0} , отвечающие блокам с межсимвольной интерференцией. В них информация о канале и комплексных амплитудах смежных символов содержится в более сложном виде, чем в статистиках S_{+0} , S_{+1} и S_{-1} блоков без межсимвольной интерференции.

Для преодоления указанной трудности использования всей содержащейся в (16) информации о параметрах (τ, φ) будем пренебрегать всё большей и большей её частью и последовательно синтезировать всё менее и менее сложные алгоритмы оценивания этих параметров.

Первый шаг, который позволяет синтезировать реализуемый алгоритм, заключается в отбрасывании информации, содержащейся в наблюдениях с межсимвольной интерференцией, и использовании логарифма функции правдоподобия

$$S(\tau, \varphi, \mathbf{b}_{-1}, \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_{+1}) = S_{-1}(\tau, \varphi, \mathbf{b}_{-1}) + S_0(\tau, \varphi, \mathbf{b}_0) + S_{+1}(\tau, \varphi, \mathbf{b}_{+1}), \quad (17)$$

где $\mathbf{b}_k = \mathbf{H}_M \mathbf{d}[k]$ — принимаемые комплексные амплитуды активных поднесущих. Как видим, в данном случае отпадает необходимость отдельного вычисления $\mathbf{d}_{ML}(\tau, \varphi)$ и $\mathbf{h}_{ML}(\tau, \varphi)$, а условные

оценки сопутствующих параметров \mathbf{b}_k можно вычислить независимо посредством минимизации соответствующего логарифма функции правдоподобия

$$S_k(\tau, \varphi, \mathbf{b}_k) = \|\mathbf{x}_k - \exp(i\eta_k)\mathbf{P}_k\mathbf{A}_k(\tau)\mathbf{b}_k\|_2^2 = \|\mathbf{x}_k(\tau, \varphi) - \mathbf{A}_k(\tau)\mathbf{b}_k\|_2^2, \quad (18)$$

где $\mathbf{x}_k(\tau, \varphi) = \exp(-i\eta_k)\mathbf{P}_k^H\mathbf{x}_k$ и, в соответствии с (10а), (10в) и (10д),

$$\eta_{-1} = \varphi_0 - \tau\varphi, \quad \mathbf{P}_{-1} = \mathbf{P}_\tau(\varphi), \quad \mathbf{A}_{-1}(\tau) = \mathbf{W}_{\tau, K_0 - \tau, K_0}\mathbf{A}_0; \quad (19а)$$

$$\eta_0 = \varphi_0 + L\varphi, \quad \mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_{K_0}(\varphi), \quad \mathbf{A}_0(\tau) = \mathbf{A}_0 = \mathbf{T}_{K_0, N}\mathbf{F}; \quad (19б)$$

$$\eta_{+1} = \varphi_0 + (K + L)\varphi, \quad \mathbf{P}_{+1} = \mathbf{P}_{K_0 - 1 - \tau}(\varphi), \quad \mathbf{A}_{+1}(\tau) = \mathbf{W}_{K_0 - 1 - \tau, 0, K_0}\mathbf{A}_0. \quad (19в)$$

Последняя часть в (18) основана на том, что норма вектора не меняется при умножении на унитарную матрицу $\exp(-i\eta_k)\mathbf{P}_k^H$.

При вычислении максимально правдоподобной условной оценки $\mathbf{b}_k^{(ML)}(\tau, \varphi)$ после приравнивания к нулю градиента $\nabla_{\mathbf{b}_k} S_k(\tau, \varphi, \mathbf{b}_k)$ получаем уравнение

$$\mathbf{A}_k^H(\tau)\mathbf{A}_k(\tau)\mathbf{b}_k^{(ML)}(\tau, \varphi) = \mathbf{A}_k^H(\tau)\mathbf{x}_k(\tau, \varphi). \quad (20)$$

Решением уравнения (20) является решение задачи о наименьших квадратах

$$\mathbf{b}_k^{(ML)}(\tau, \varphi) = \mathbf{A}_k^+(\tau)\mathbf{x}_k(\tau, \varphi), \quad (21)$$

где \mathbf{A}_k^+ — псевдообратная матрица для матрицы \mathbf{A}_k (см. Приложение 4).

В результате подстановки в (18) в качестве параметров \mathbf{b}_k их оценок (21), получаем слагаемые

$$S_k(\tau, \varphi) = \|\mathbf{x}_k(\tau, \varphi) - \mathbf{A}_k(\tau)\mathbf{b}_k^{(ML)}(\tau, \varphi)\|_2^2 = \|\mathbf{B}_k(\tau)\mathbf{x}_k(\tau, \varphi)\|_2^2 \quad (22)$$

целевой функции в совместной оценке временного и нормированного частотного сдвигов

$$\{\theta_A, \phi_A\} = \arg \min_{\tau, \varphi} S_A(\tau, \varphi) = \arg \min_{\tau, \varphi} \sum_{k=-1}^1 S_k(\tau, \varphi), \quad (23)$$

где $\mathbf{B}_k(\tau) = \mathbf{I}_\tau - \mathbf{A}_k(\tau)\mathbf{A}_k^+(\tau)$.

Покажем, что не все из $2K_0 - 1$ матриц $\mathbf{B}_k(\tau)$ различны и отличны от нулевых. Действительно, можно установить (см. Приложение 5), что

$$\mathbf{B}_{+1}(K_0 - 1 - \tau) = \mathbf{B}_{-1}(\tau). \quad (24)$$

Используя то, что при $\tau > M$ ранг матрицы

$$\mathbf{A}_{-1}(\tau) = \begin{cases} \mathbf{T}_{\tau, N}\mathbf{F}, & N \leq \tau \leq K_0; \\ \mathbf{W}_{\tau, N - \tau, N}\mathbf{F}, & 1 \leq \tau < N \end{cases} \quad (25)$$

с размерами $(\tau \times M)$ равен числу столбцов, а при $\tau \leq M$ — числу строк, с помощью формул (П4.2) и (П4.3) (см. Приложение 4) находим

$$\mathbf{B}_{-1}(\tau) = \begin{cases} \mathbf{I}_\tau - \mathbf{A}_{-1}(\tau) [\mathbf{A}_{-1}^H(\tau)\mathbf{A}_{-1}(\tau)]^{-1} \mathbf{A}_{-1}^H(\tau), & M < \tau \leq K_0; \\ \mathbf{0}_{\tau, \tau}, & 1 \leq \tau \leq M. \end{cases} \quad (26)$$

Заметим, что последовательности (25) и (26) расширены включением элементов $\mathbf{A}_{-1}(K_0) = \mathbf{A}_0$ и $\mathbf{B}_{-1}(K_0) = \mathbf{B}_0$ соответственно.

Таким образом, для целевой функции в правиле (23) с учётом (24), (26) получаем

$$S_A(\tau, \varphi) = \begin{cases} \|\mathbf{B}_0(\tau)\mathbf{x}_0(\tau, \varphi)\|_2^2 + \|\mathbf{B}_{-1}(K_0 - 1 - \tau)\mathbf{x}_{+1}(\tau, \varphi)\|_2^2, & 0 \leq \tau \leq K_0 - M - 2; \\ \|\mathbf{B}_0(\tau)\mathbf{x}_0(\tau, \varphi)\|_2^2, & K_0 - M - 1 \leq \tau \leq M; \\ \|\mathbf{B}_0(\tau)\mathbf{x}_0(\tau, \varphi)\|_2^2 + \|\mathbf{B}_{-1}(\tau)\mathbf{x}_{-1}(\tau, \varphi)\|_2^2, & M + 1 \leq \tau \leq K_0 - 1, \end{cases} \quad (27)$$

где предполагается, что число «избыточных степеней свободы в системе» достаточно мало: $N_{VS} + N_G \leq M + L + 1$.

Минимальная вычислительная сложность алгоритма (23), (27), который назовём CP-VS-A-алгоритмом (cyclic prefix, CP), обеспечивается в том случае, когда весь набор ненулевых матриц (26) вычисляется заранее. Для хранения этих матриц необходимо иметь объём памяти для $\text{int}\{(2K_0 + 1)(K_0 + 1)K_0 - (2M + 1)(M + 1)M\}/6$ комплексных чисел, где $\text{int}(x)$ — целая часть числа x . Для вычисления целевой функции (27) при каждом пробном значении (τ, φ) требуется выполнить от $K_0(K_0 + 2)$ до $2K_0(K_0 + 1) - 1$ операций умножения комплексных чисел.

Второй шаг в упрощении оценивания частотных и временных сдвигов заключается в отбрасывании информации, содержащейся во вкладах символов с индексами +1 и -1, и использовании в качестве целевой функции $S_B(\tau, \varphi) = S_0(\tau, \varphi)$, что приводит к правилу

$$\{\theta_B, \phi_B\} = \arg \min_{\tau, \varphi} S_B(\tau, \varphi) = \arg \min_{\tau, \varphi} \|\mathbf{B}_0\mathbf{x}_0(\tau, \varphi)\|_2^2. \quad (28)$$

При реализации этого алгоритма, в дальнейшем CP-VS-B-алгоритма, заранее вычисляется только матрица \mathbf{B}_0 , состоящая из K_0^2 элементов, и, следовательно, требуемый объём памяти по сравнению с CP-VS-A-алгоритмом существенно уменьшается. Для вычисления целевой функции в (28) при каждом пробном значении (τ, φ) требуется $K_0(K_0 + 2)$ умножений комплексных чисел, что практически в 2 раза меньше, чем для вычисления (27) в максимуме сложности при $\tau = 0$ или $\tau = K_0 - 1$.

Третий шаг в упрощении оценивания частотных и временных сдвигов заключается в том, что в логарифме функции правдоподобия

$$S_0(\tau, \varphi, \mathbf{b}_0) = \|\mathbf{W}_{N_G-L,0,K_0}[\mathbf{x}_0 - \exp(i\eta_0)\mathbf{P}_0\mathbf{A}_0\mathbf{b}_0]\|_2^2 + \|\mathbf{W}_{N,N_G-L,K_0}[\mathbf{x}_0 - \exp(i\eta_0)\mathbf{P}_0\mathbf{A}_0\mathbf{b}_0]\|_2^2$$

отбрасывается первое слагаемое, отвечающее свободной от межсимвольной интерференции части циклического префикса в принятом символе с индексом 0. Это приводит к правилу

$$\{\theta_{VS}, \phi_{VS}\} = \arg \min_{\tau, \varphi} S_{VS}(\tau, \varphi) = \arg \min_{\tau, \varphi} \|\mathbf{B}_{VS}\mathbf{x}_0^{(VS)}(\tau, \varphi)\|_2^2 = \arg \min_{\tau, \varphi} \sum_{n=M}^{N-1} \left| \mathbf{u}_n^H \mathbf{x}_0^{(VS)}(\tau, \varphi) \right|^2, \quad (29)$$

где $\mathbf{x}_0^{(VS)}(\tau, \varphi) = \mathbf{W}_{N,N_G-L,K_0}\mathbf{x}_0(\tau, \varphi)$, $\mathbf{B}_{VS} = \mathbf{I}_N - \mathbf{A}_{VS}\mathbf{A}_{VS}^+$ и $\mathbf{A}_{VS} = \mathbf{W}_{N,N_G-L,K_0}\mathbf{A}_0 = \mathbf{F}$. Последняя часть в (29) следует из соотношений $\mathbf{B}_{VS} = \mathbf{I}_N - \mathbf{F}\mathbf{F}^H = (\mathbf{u}_M, \dots, \mathbf{u}_{N-1})(\mathbf{u}_M, \dots, \mathbf{u}_{N-1})^H$ и $\mathbf{B}_{VS}\mathbf{B}_{VS}^H = \mathbf{B}_{VS}$ и показывает, что алгоритм заключается в минимизации мощности виртуальных поднесущих принятого сигнала. Он расширяет область применения алгоритма, полученного в [6] для оценивания только частотного сдвига и совпадающего с (29) при известной задержке во времени.

Алгоритм (29) — VS-алгоритм в дальнейшем — при вычислении мощности виртуальных поднесущих для каждого пробного значения (τ, φ) с использованием быстрого преобразования Фурье

требует примерно $N(\log_2 N + 2)$ умножений комплексных чисел. Таким образом, в обычных ситуациях, когда $K_0 \approx N \gg 1$, вычислительная сложность VS-алгоритма примерно в $N/\log_2 N$ раз меньше сложности CP-VS-B-алгоритма (28).

Другой способ осуществления третьего шага в упрощении оценивания частотных и временных сдвигов заключается в отбрасывании в $S_0(\tau, \varphi, \mathbf{b}_0)$ информации о наличии виртуальных поднесущих и использовании $S_{\text{CP}}(\tau, \varphi, \mathbf{b}_0) = \|\mathbf{x}_0(\tau, \varphi) - \mathbf{A}_{\text{CP}}(\tau)\mathbf{b}_0\|_2^2$, где $\mathbf{A}_{\text{CP}} = \mathbf{T}_{K_0, N}\mathbf{U}$. Это даёт для оценки $\{\theta_{\text{CP}}, \phi_{\text{CP}}\}$ целевую функцию

$$S_{\text{CP}}(\tau, \varphi) = \|\mathbf{B}_{\text{CP}}\mathbf{x}_0(\tau, \varphi)\|_2^2, \quad (30)$$

где $\mathbf{B}_{\text{CP}} = \mathbf{I}_{K_0} - \mathbf{A}_{\text{CP}}\mathbf{A}_{\text{CP}}^+ = \mathbf{I}_{K_0} - \mathbf{T}_{K_0, N}\mathbf{T}_{K_0, N}^+$ и $\mathbf{A}_{\text{CP}}^+ = \mathbf{U}^H\mathbf{T}_{K_0, N}^+$, для которой можно получить

$$\begin{aligned} S_{\text{CP}}(\tau, \varphi) &= \|(\mathbf{W}_{N_G-L, 0, K_0} - \mathbf{W}_{N_G-L, N, K_0})\mathbf{x}_0(\tau, \varphi)\|_2^2 = \\ &= \|\mathbf{v}_0(\tau)\|_2^2 + \|\mathbf{v}_N(\tau)\|_2^2 - 2\text{Re}[\exp(-iN\varphi)\mathbf{v}_0^H(\tau)\mathbf{v}_N(\tau)], \end{aligned} \quad (31)$$

где $\mathbf{v}_n(\tau) = \mathbf{W}_{N_G-L, n, K_0}\mathbf{x}_0$. Решая уравнение $\partial S_{\text{CP}}(\tau, \varphi)/\partial \varphi = 0$, которое эквивалентно уравнению $\text{Im}[\exp(-i\varphi N)\mathbf{v}_0^H(\tau)\mathbf{v}_N(\tau)] = 0$, находим условную максимально правдоподобную оценку нормированного частотного сдвига

$$\phi_{\text{ML}}(\tau) = N^{-1} \arg[\mathbf{v}_0^H(\tau)\mathbf{v}_N(\tau)]. \quad (32)$$

На основе (31) и (32), получаем CP-алгоритм:

$$\theta_{\text{CP}} = \arg \min_{\tau} S_{\text{CP}}[\tau, \phi_{\text{ML}}(\tau)] = \arg \min_{\tau} \left(\|\mathbf{v}_0(\tau)\|_2^2 + \|\mathbf{v}_N(\tau)\|_2^2 - 2|\mathbf{v}_0^H(\tau)\mathbf{v}_N(\tau)| \right), \quad (33a)$$

$$\phi_{\text{CP}} = \phi_{\text{ML}}(\theta_{\text{CP}}), \quad (33b)$$

который был впервые предложен в [3] и выполняется в два этапа: сначала оценивается задержка во времени, затем — частотный сдвиг.

В асимптотике больших отношений сигнал/шум (ОСШ) CP-алгоритм (33) совпадает при $L = 0$ с правилом оценивания [4], которое является оптимальным для стандартного однолучёвого канала с АБГШ, а при $L > 0$ — с алгоритмом [5], который получен на основе приближённой функции правдоподобия для стационарных многолучёвых каналов. Отметим, что, в отличие от нашего подхода, алгоритмы [4, 5] выведены в предположении о нормальном распределении отсчётов передаваемого OFDM-сигнала.

Следует уточнить, что в работе [5] сначала получен алгоритм, описываемый формулой (7) в [5] и требующий труднодоступную на практике статистическую информацию о профиле многолучёвости в виде набора $(\langle h_0^2 \rangle, \dots, \langle h_L^2 \rangle)$. Затем в результате предельного перехода к бесконечному значению ОСШ получен алгоритм, обозначенный авторами [5] как MMSE₁-алгоритм (minimum mean-square error, MMSE). Он отличается от (33) только тем, что в нём используются более длинные сегменты $\tilde{\mathbf{v}}_n(\tau) = \mathbf{W}_{N_G+L, n, K_0}\mathbf{x}_0$. Однако при его выводе сделано некорректное огрубление исходных априорных сведений. Оно заключается в уравнивании амплитуд отсчётов взаимной корреляции между циклическим префиксом и окончанием OFDM-символа, относящихся к поразжённым межсимвольной интерференцией и свободным от неё участкам сигнала. Между тем, если переход к бесконечному значению ОСШ выполнить строго без использования каких-либо огрублений, то из формулы (7) в [5] следует именно CP-алгоритм (33).

Поскольку перебор в (33) осуществляется только по задержке, CP-алгоритм по сравнению с предыдущими имеет очень низкую вычислительную сложность. Однако, поскольку $|\phi_{\text{CP}}| \leq \pi/N$,

он позволяет оценивать частотный сдвиг, который не превосходит по абсолютной величине половину расстояния между поднесущими.

Покажем, что вместо (23), (27) и (28) можно предложить близкие по качеству, но гораздо менее сложные с вычислительной точки зрения приближённые алгоритмы.

Идея синтеза этих алгоритмов заключается в использовании вместо оптимальных оценок $\mathbf{b}_k^{(\text{ML})}(\tau, \varphi) = \mathbf{A}_k^+(\tau)\mathbf{x}_k(\tau, \varphi)$ их приближений $\mathbf{b}_k^\#(\tau, \varphi) = \mathbf{A}_k^\#(\tau)\mathbf{x}_k(\tau, \varphi)$, где псевдообратные матрицы $\mathbf{A}_{-1}^+(\tau)$ для матриц из (25) заменяются их аппроксимациями

$$\mathbf{A}_{-1}^\#(\tau) = \begin{cases} \mathbf{F}^H \mathbf{T}_{\tau, N}^+, & N \leq \tau \leq K_0; \\ \mathbf{F}^H \mathbf{W}_{\tau, N-\tau, N}^T = \mathbf{A}_{-1}^H(\tau), & M < \tau < N, \end{cases} \quad (34)$$

которые вычисляются через произведения псевдообращённых сомножителей. Отметим, что $\mathbf{F}^H \mathbf{F} = \mathbf{I}_M$ и $\mathbf{T}_{\tau, N}^+ \mathbf{T}_{\tau, N} = \mathbf{I}_N$, поэтому для $N \leq \tau \leq K_0$ матрицы $\mathbf{A}_{-1}^\#(\tau)$ довольно близки к матрицам $\mathbf{A}_{-1}^+(\tau)$ в том смысле, что они не удовлетворяют лишь четвёртому из условий (П4.1) в Приложении 4 и

$$\mathbf{A}_{-1}^\#(\tau)\mathbf{A}_{-1}(\tau) = \mathbf{A}_{-1}^+(\tau)\mathbf{A}_{-1}(\tau) = \mathbf{I}_M. \quad (35)$$

В то же время, для интервала $M < \tau < N$ соотношение (35) выполняется лишь приближённо, и матрицы $\mathbf{A}_{-1}^\#(\tau)$ довольно сильно отличаются от матриц $\mathbf{A}_{-1}^+(\tau)$.

Вводя вместо матриц (26) последовательность

$$\mathbf{B}_{-1}^\#(\tau) = \mathbf{I} - \mathbf{A}_{-1}(\tau)\mathbf{A}_{-1}^\#(\tau) = \begin{cases} \mathbf{I}_\tau - \mathbf{T}_{\tau, N} \mathbf{F} \mathbf{F}^H \mathbf{T}_{\tau, N}^+, & N \leq \tau \leq K_0; \\ \mathbf{I}_\tau - \mathbf{W}_{\tau, N-\tau, N} \mathbf{F} \mathbf{F}^H \mathbf{W}_{\tau, N-\tau, N}^T, & M < \tau < N, \end{cases} \quad (36)$$

вместо (23), (27) получим алгоритм

$$\{\theta_{A1}, \phi_{A1}\} = \arg \min_{\tau, \varphi} S_{A1}(\tau, \varphi), \quad (37)$$

где

$$S_{A1}(\tau, \varphi) = \begin{cases} \|\mathbf{B}_{-1}^\#(K_0)\mathbf{x}_0(\tau, \varphi)\|_2^2 + \|\mathbf{B}_{-1}^\#(K_0 - 1 - \tau)\mathbf{x}_{+1}(\tau, \varphi)\|_2^2, & 0 \leq \tau \leq K_0 - M - 2; \\ \|\mathbf{B}_{-1}^\#(K_0)\mathbf{x}_0(\tau, \varphi)\|_2^2, & K_0 - M - 1 \leq \tau \leq M; \\ \|\mathbf{B}_{-1}^\#(K_0)\mathbf{x}_0(\tau, \varphi)\|_2^2 + \|\mathbf{B}_{-1}^\#(\tau)\mathbf{x}_{-1}(\tau, \varphi)\|_2^2, & M + 1 \leq \tau \leq K_0 - 1, \end{cases} \quad (38)$$

а вместо (28) — алгоритм

$$\{\theta_{B1}, \phi_{B1}\} = \arg \min_{\tau, \varphi} S_{B1}(\tau, \varphi) = \arg \min_{\tau, \varphi} \|\mathbf{B}_{-1}^\#(K_0)\mathbf{x}_0(\tau, \varphi)\|_2^2. \quad (39)$$

Алгоритм (37), (38) будем называть CP-VS-A1-алгоритмом, а (39) — CP-VS-B1-алгоритмом.

Нетрудно установить смысл действий при каждом пробном значении (τ, φ) и CP-VS-B1-алгоритма (39) в целом. На первом шаге из анализируемого отрезка сигнала \mathbf{x} выделяется соответствующий участок $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0(\tau)$ с длиной K_0 отсчётов и компенсируется частотный сдвиг $\mathbf{x}_0(\tau, \varphi) = \exp(-iL\varphi)\mathbf{P}_{K_0}^H(\varphi)\mathbf{x}_0$. На втором шаге вычисляется предварительная оценка принятого символа без циклического префикса $\mathbf{s}_0^{(1)}(\tau, \varphi) = \mathbf{T}_{K_0, N}^+\mathbf{x}_0(\tau, \varphi)$, в котором последняя часть, состоящая из $N_G - L$ отсчётов, согласно (П4.6) (см. Приложение 4), находится усреднением свободной от межсимвольной интерференции части циклического префикса и совпадающего с ней в незашумлённом сигнале окончания символа. На третьем шаге оцениваются активные поднесущие $\mathbf{b}_0^\# = \mathbf{F}^H \mathbf{s}_0^{(1)}$

и посредством перехода во временную область вычисляется уточнённая оценка принятого символа без циклического префикса $\mathbf{s}_0^{(2)} = \mathbf{F}\mathbf{b}_0^\#$, в которой подавлены виртуальные поднесущие. На четвёртом шаге формируется оценка OFDM-сигнала $\tilde{\mathbf{y}}_0 = \mathbf{T}_{K_0, N}\mathbf{s}_0^{(2)}$ на выходе канала связи со свободной от межсимвольной интерференции частью циклического префикса. Наконец, на пятом шаге вычисляется энергия «сигнала ошибки» $\|\mathbf{x}_0(\tau, \varphi) - \tilde{\mathbf{y}}_0(\tau, \varphi)\|_2^2$, которая при истинном значении (τ, φ) должна быть минимальной.

По сравнению с (39) в CP-VS-A1-алгоритме (37), (38) при определённых пробных значениях τ вычисляется дополнительное слагаемое. Причём смысл действий, осуществляемых при обработке наблюдений $\mathbf{x}_{+1} = \mathbf{x}_{+1}(\tau)$ при $0 \leq \tau \leq K_0 - N - 1$ и $\mathbf{x}_{-1} = \mathbf{x}_{-1}(\tau)$ при $N \leq \tau \leq K_0 - 1$, такой же, как в (39). Нетрудно также установить способ использования информации «о наличии виртуальных поднесущих» в коротких наблюдениях \mathbf{x}_{+1} при $K_0 - N \leq \tau \leq K_0 - M - 2$ и \mathbf{x}_{-1} при $M+1 \leq \tau \leq N$. Например, в коротком наблюдении \mathbf{x}_{-1} в результате компенсации частотного сдвига $\mathbf{x}_{-1}(\tau, \varphi) = \exp(i\tau\varphi)\mathbf{P}_\tau^H(\varphi)\mathbf{x}_{-1}$ и добавления нулевых отсчётов формируется предварительная оценка $\mathbf{s}_{-1}^{(1)} = \mathbf{W}_{\tau, N-\tau, N}^T \mathbf{x}_{-1}(\tau, \varphi)$ принятого символа без циклического префикса. На её основе после выделения активных поднесущих $\mathbf{b}_{-1}^\# = \mathbf{F}^H \mathbf{s}_{-1}^{(1)}$ вычисляется уточнённая оценка принятого символа $\mathbf{s}_{-1}^{(2)} = \mathbf{F}\mathbf{b}_{-1}^\#$ с подавленными виртуальными поднесущими, из которой выделяется соответствующий участок $\tilde{\mathbf{y}}_{-1} = \mathbf{W}_{\tau, N-\tau, N}\mathbf{s}_{-1}^{(2)}$ и определяется энергия «сигнала ошибки» $\|\mathbf{x}_{-1}(\tau, \varphi) - \tilde{\mathbf{y}}_{-1}\|_2^2$.

Для вычисления целевой функции в (39) при каждом пробном значении (τ, φ) с использованием быстрого преобразования Фурье требуется приблизительно $2(N \log_2 N + K_0)$ умножений комплексных чисел. В обычных ситуациях, когда $K_0 \approx N$, вычислительная сложность CP-VS-B1-алгоритма примерно в $N/(2 \log_2 N)$ раз меньше сложности CP-VS-B-алгоритма (28) и всего в 2 раза выше сложности VS-алгоритма (29). Ясно, что использование CP-VS-A1-алгоритма (37), (38) вместо (39) увеличивает сложность обработки менее чем вдвое.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Исследование характеристик предложенных алгоритмов было проведено с помощью компьютерного моделирования. При моделировании использовался OFDM-сигнал с модуляцией, представляющей собой вариант четырёхпозиционной ОТФМ [11], в котором две первые активные поднесущие используются в качестве опорных; общее количество активных поднесущих $M = 130$.

Точность оценивания временного сдвига определялась по значению $\sigma_{t/\tau_s} = \tau_s^{-1} \langle (t - \tau)^2 \rangle^{1/2}$ — нормированного к интервалу дискретизации среднеквадратичного отклонения оценки t от истинной задержки τ . Заметим, что некоторые из относительных видов модуляции, такие, как ВФРМ и ОТФМ, обладают инвариантностью к временному сдвигу начала сигнала в пределах интервала, отвечающего не поражённой межсимвольной интерференцией части циклического префикса. Поэтому для них качество синхронизации по времени целесообразно характеризовать величиной $P_t = 1 - P\{0 \leq t - \tau < N_G - L\}$ — вероятностью выхода ошибки оценивания за границы этого интервала. Точность оценки частотного сдвига определялась по величине $\sigma_{fT} = T \langle (f - \nu)^2 \rangle^{1/2}$ — нормированного к интервалу между поднесущими среднеквадратичного отклонения оценки $f = \theta N/(2\pi T)$ от истинного сдвига ν . Для оценки влияния точности работы синхронизаторов на помехоустойчивость некогерентного приёма сигнала с ОТФМ исследовалась вероятность битовой ошибки P_b .

На рис. 2 приведены результаты моделирования при $N_G = N_{VS} = 10$ в однолучевой модели канала с АБГШ и смещением по частоте $\nu = 0,2/T$ в зависимости от отношения сигнал/шум

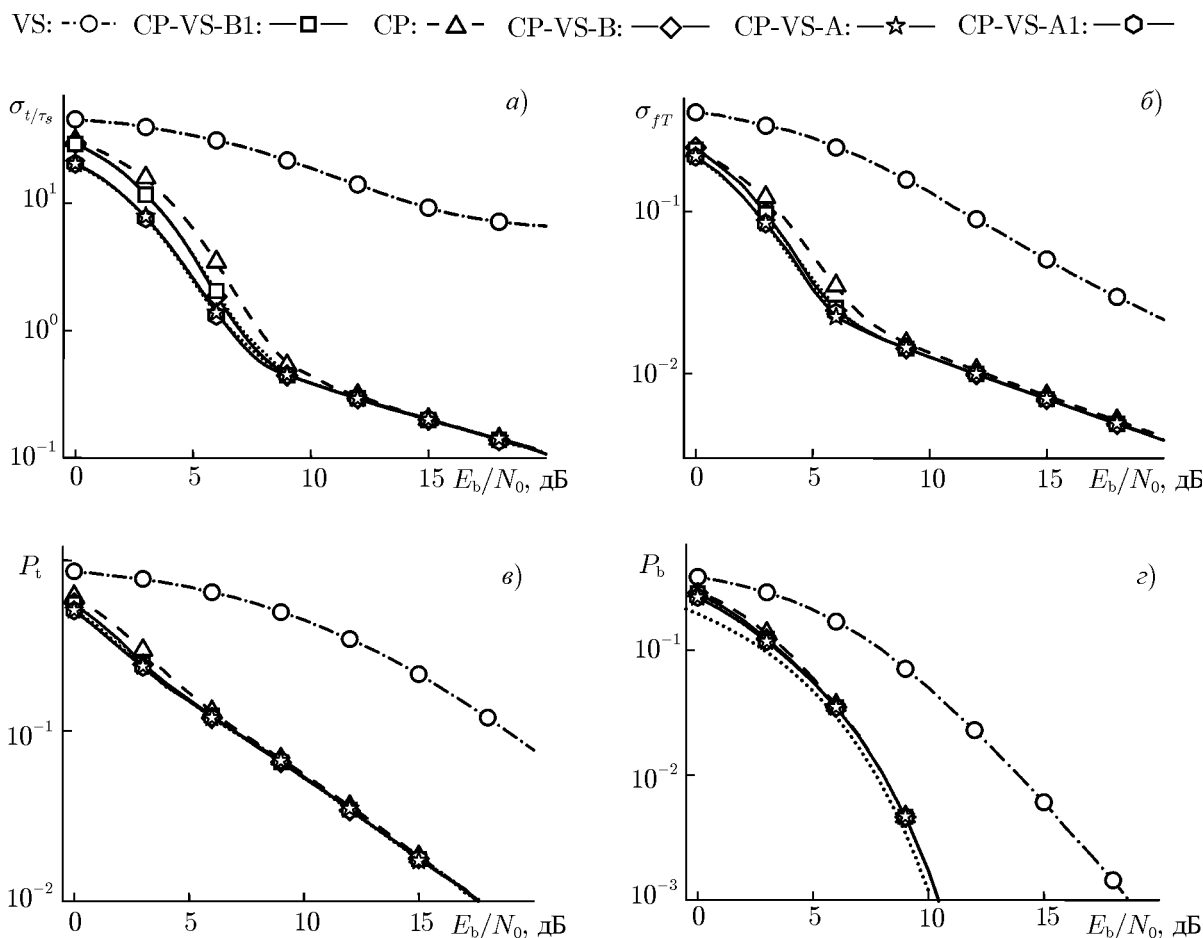


Рис. 2. Помехоустойчивость различных алгоритмов синхронизации (обозначения представлены на рисунке) в однолучевом канале с АБГШ и смещением по частоте $\nu = 0,2/T$ при $N_G = N_{VS} = 10$ в зависимости от энергетического ОСШ E_b/N_0 . Пунктиром обозначена помехоустойчивость приёма при точной синхронизации

в виде относительных энергетических затрат на передачу одного бита сообщения E_b/N_0 , где $N_0 = \sigma^2\tau_s$ — односторонняя спектральная плотность мощности шума.

Приведённые результаты демонстрируют, что VS-алгоритм, использующий только виртуальные поднесущие, хотя и даёт состоятельные оценки частотного сдвига (см. рис. 2б) и монотонно убывающую зависимость для величины P_t (рис. 2в), в целом является несостоятельным алгоритмом оценивания задержки во времени (рис. 2а). Последнее обусловлено тем, что его решающая статистика, использующая мощности поднесущих, нечувствительна к сдвигу начала основной части OFDM-символа внутри циклического префикса. В общем, VS-алгоритм существенно проигрывает по помехоустойчивости CP-алгоритму.

CP-алгоритм является состоятельным алгоритмом оценивания как задержки во времени, так и частотного сдвига. Однако в «переходной области» (при $E_b/N_0 = 3 \div 6$ дБ) он уступает $0,7 \div 0,8$ дБ по энергетике в точности оценивания задержки во времени и частотного сдвига CP-VS-B-алгоритму, который дополнительно учитывает и виртуальные поднесущие. В однолучевом канале межсимвольная интерференция отсутствует, и, значит, CP-VS-A-алгоритм является оптимальным. В указанной выше переходной области он даёт дополнительный выигрыш в $0,7 \div 0,8$ дБ при оценивании задержки и $0,3$ дБ при оценивании частотного сдвига. Однако в асимптоти-

ке большого отношения сигнал/шум все три алгоритма (CP, CP-VS-B и CP-VS-A), использующие содержащуюся в циклическом префиксе информацию, обеспечивают одинаковые характеристики. В этих условиях уровень потерь на синхронизацию при вероятности ошибки приёма $P_b < 3 \cdot 10^{-2}$ относительно приёма в условиях точной синхронизации не превышает 0,3 дБ (см. рис. 2з).

Отметим, что отличие между соответствующими кривыми на рис. 2 для приближённых CP-VS-A1- и CP-VS-B1-алгоритмов и точных CP-VS-A- и CP-VS-B-алгоритмов пренебрежимо мала. Подобная ситуация наблюдалась и для остальных исследований, представленных ниже. Это позволяет нам в дальнейшем при обсуждении результатов не различать приближённые и точные CP-VS-A- и CP-VS-B-алгоритмы.

При исследовании алгоритмов синхронизации в условиях многолучёвости использовалась двухлучёвая модель канала с АБГШ и частотным сдвигом $\nu = 0,2/T$ при следующих параметрах: задержка между лучами $L = 6$, статистически эквивалентные рэлеевские замирания в каждом луче с $\langle |h_0^2| \rangle = \langle |h_L^2| \rangle = 1/2$ и временем корреляции $\tau_d = 21,5T$, обеспечивающим квазистационарность канала на длительности OFDM-символа. Для того, чтобы уменьшить влияние многолучёвости и замираний на точность приёма сообщений в демодуляторе и тем самым выделить вклад в помехоустойчивость приёма характеристик синхронизации, демодуляция сообщений осуществлялась по сигналам на выходе оптимального эквалайзера [15] с использованием точной информации о нестационарной передаточной характеристике канала и отношении сигнал/шум.

Результаты моделирования в двухлучёвой модели канала при $N_G = N_{VS} = 10$ в зависимости от среднего отношения сигнал/шум $\langle E_b/N_0 \rangle$ представлены на рис. 3.

Они демонстрируют существенное преимущество CP-алгоритма, учитывающего только свободную от межсимвольной интерференции часть циклического префикса, по сравнению с MMSE₁-алгоритмом, который использует и поражённые межсимвольной интерференцией участки циклического префикса. Это преимущество реализуется именно при большом отношении сигнал/шум, что подтверждает ошибочность вывода MMSE₁-алгоритма в [5].

Отметим, что CP-алгоритм, демонстрируя хорошее качество в характеристике на рис. 3в, теряет своё преимущество над VS-алгоритмом в характеристиках на рис. 3а, б, г по сравнению со случаем однолучёвого канала из-за уменьшения используемой части циклического префикса до $N_G - L = 4$ отсчётов и при $\langle E_b/N_0 \rangle > 20$ дБ даже проигрывает последнему. В то же время превосходство новых CP-VS-A- и CP-VS-B-алгоритмов над CP-алгоритмом становится гораздо более существенным, чем в однолучёвом канале. В частности, при $\langle E_b/N_0 \rangle = 10 \div 18$ дБ (кривые на рис. 3а, б для CP-алгоритма ещё не выходят на плато) CP-VS-B-алгоритм выигрывает у CP-алгоритма $4 \div 5,5$ дБ при оценивании задержки во времени и $3,5 \div 5$ дБ — при оценивании частотного сдвига, а CP-VS-A-алгоритм даёт дополнительные выигрыши в 2 дБ и $0,5 \div 0,7$ дБ соответственно. При этом, если уровень потерь на синхронизацию при вероятности ошибки приёма $P_b \approx 2 \cdot 10^{-2}$ (относительно приёма в условиях точной синхронизации) для VS-алгоритма и CP-алгоритма составляет $4 \div 4,5$ дБ, то для CP-VS-A- и CP-VS-B-алгоритмов — примерно 1 дБ (см. рис. 3з).

Результаты исследования влияния на качество синхронизации и приёма «избыточных степеней свободы», обеспечиваемых отдельно виртуальными поднесущими и циклическим префиксом, представлены на рис. 4 и 5 соответственно.

Рисунок 4 свидетельствует, что при заданных значениях $\langle E_b/N_0 \rangle$ и N_G с увеличением количества виртуальных поднесущих N_{VS} , т. е. полосы системы, все характеристики для CP-алгоритма монотонно ухудшаются. Это обусловлено тем, что с ростом полосы системы увеличивается общая мощность АБГШ за счёт его спектральных составляющих, расположенных вне полосы сигнала, и это никак не учитывается в CP-алгоритме. В то же время, характеристики VS-алгоритма на

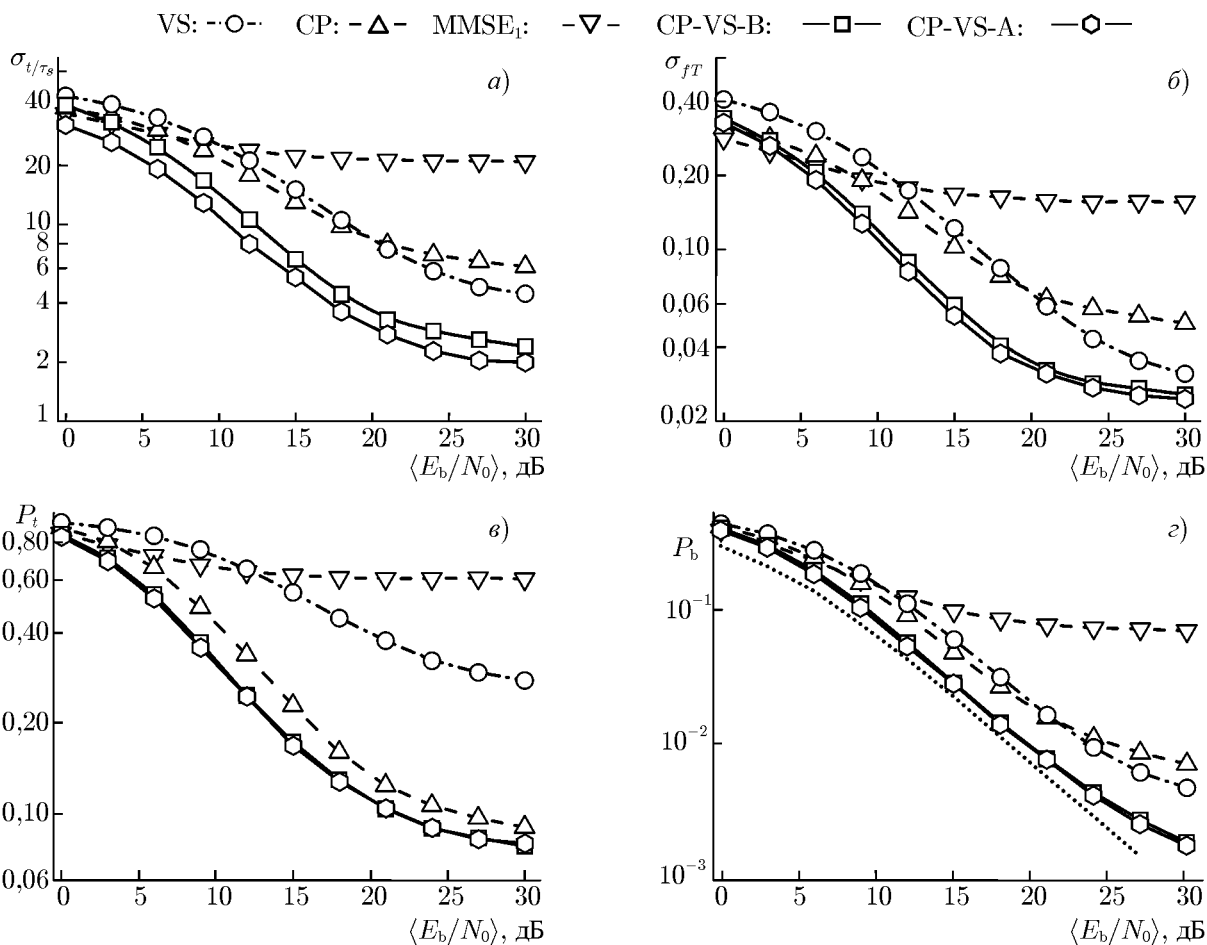


Рис. 3. Помехоустойчивость различных алгоритмов синхронизации (обозначения представлены на рисунке) в двухлучевом канале с рэлеевскими замираниями, АБГШ и смещением по частоте $\nu = 0,2/T$ при $N_G = N_{VS} = 10$ в зависимости от среднего ОСШ $\langle E_b/N_0 \rangle$. Пунктиром обозначена помехоустойчивость приёма при точной синхронизации

рис. 4а, б, г показывают наличие оптимального значения N_{VS} , при котором реализуется баланс между положительным вкладом расширения полосы, используемой для обнаружения сигнала на виртуальных поднесущих при рассинхронизации, и негативным влиянием избыточного шума в этой полосе. Очевидно, что это оптимальное значение должно зависеть и от величины смещения частоты сигнала. Характеристики CP-VS-A- и CP-VS-B-алгоритмов превосходят характеристики известных алгоритмов и также демонстрируют наличие достаточно малого оптимального значения $N_{VS} \approx 5$, при превышении которого качество синхронизации и приёма либо перестаёт заметно улучшаться, либо даже начинает ухудшаться.

Рисунок 5 показывает, что при заданных значениях $\langle E_b/N_0 \rangle$ и N_{VS} с увеличением избыточной длины циклического префикса $\Delta_G = N_G - L$ (при перераспределении энергии передаваемого сигнала от основной части OFDM-символа к циклическому префиксу) характеристики синхронизации для CP-алгоритма и CP-VS-A- и CP-VS-B-алгоритмов монотонно улучшаются, а помехоустойчивость приёма стремится к помехоустойчивости при идеальной синхронизации. Интересно, что при этом различные характеристики VS-алгоритма ведут себя по-разному. Вследствие нечувствительности VS-алгоритма к сдвигу начала сигнала внутри свободной от межсимвольной интерференции части циклического префикса при её расширении ошибка синхронизации во

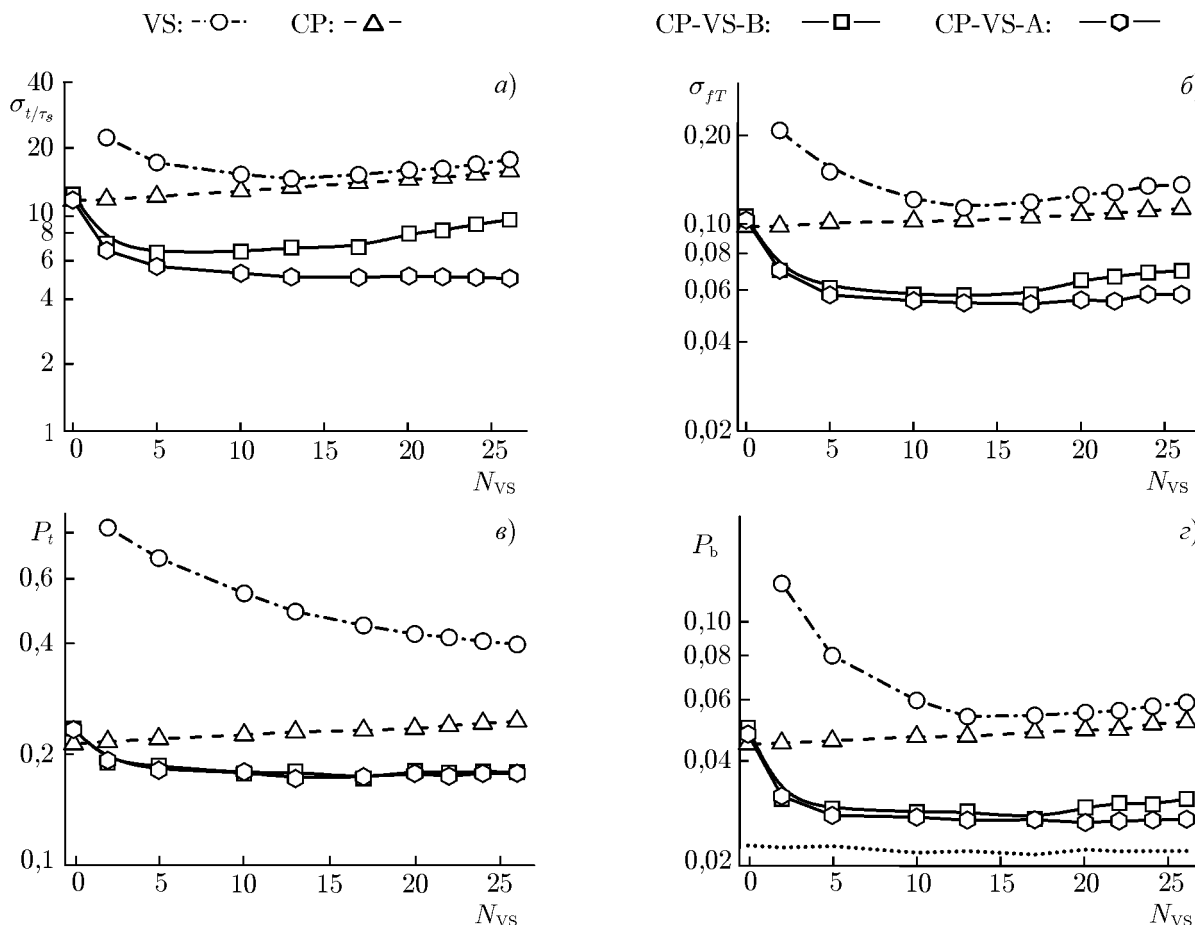


Рис. 4. Помехоустойчивость различных алгоритмов синхронизации (обозначения представлены на рисунке) в двухлучевом канале с рэлеевскими замираниями, АБГШ и смещением по частоте $\nu = 0,2/T$ при $(E_b/N_0) = 15$ дБ и $N_G = 10$ в зависимости от количества виртуальных поднесущих N_{VS} . Пунктиром обозначена помехоустойчивость приёма при точной синхронизации

времени на рис. 5а увеличивается, а вероятность P_t на рис. 5б уменьшается. Наблюдаемое на рис. 5б постоянство ошибки оценки частотного сдвига для VS-алгоритма можно объяснить тем, что негативное влияние снижения энергии основной части OFDM-символа компенсируется увеличением вероятности того, что зафиксируется значение частоты для свободного от межсимвольной интерференции участка принимаемого сигнала.

Сравнение кривых на рис. 4г и 5г для помехоустойчивости приёма при точной синхронизации показывает, что, в отличие от расширения полосы системы, увеличение длины циклического префикса из-за снижения энергии полезной части OFDM-символа ухудшает помехоустойчивость приёма даже при идеальной синхронизации. Это объясняет наличие оптимальных по помехоустойчивости приёма значений избыточной длины циклического префикса Δ_G при реальной синхронизации. На рис. 5г оптимальное значение $\Delta_G \approx 14$ для CP-алгоритма, что на 75 % выше, чем значение $\Delta_G \approx 8$ для CP-VS-A- и CP-VS-B-алгоритмов.

Относительное уменьшение удельной скорости системы $\delta c \equiv 1 - c/c_1$ из-за избыточности защитных интервалов, рассчитанное с использованием (13) при соответствующих рис. 5 значениях параметров $M, \nu, L, N_{VS} = 10$ и $\Delta_G = 8$, составляет всего 12 %. Впрочем, если с целью понижения потерь в удельной скорости до величины $\delta c \approx 6$ % ограничиться меньшими значениями

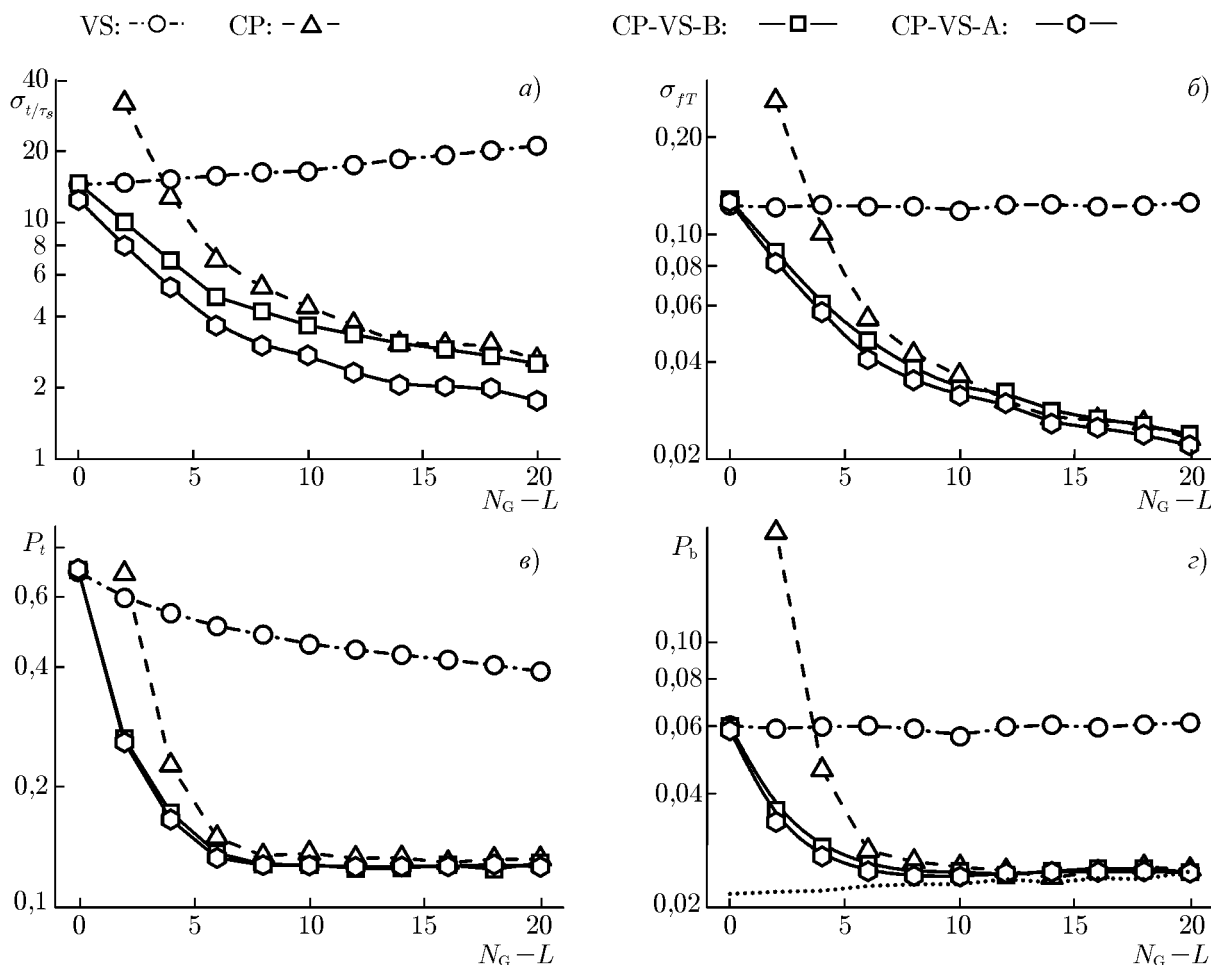


Рис. 5. Помехоустойчивость различных алгоритмов синхронизации (обозначения представлены на рисунке) в двухлучевом канале с рэлеевскими замираниями, АБГШ и смещением по частоте $\nu = 0,2/T$ при $\langle E_b/N_0 \rangle = 15$ дБ и $N_{VS} = 10$ в зависимости от избыточной длины циклического префикса $N_G - L$. Пунктиром обозначена помехоустойчивость приёма при точной синхронизации

$\Delta_G = 4$ и $N_{VS} = 5$, то для новых алгоритмов это увеличит вероятность ошибки примерно на 10 %, в то время как для CP-алгоритма — почти в два раза.

Суммируя представленные на рис. 3–5 результаты, отметим следующее. Они позволяют утверждать, что для систем, использующих новые CP-VS-A- и CP-VS-B-алгоритмы, при оптимальном расширении полосы сигнала число виртуальных поднесущих N_{VS} должно лишь на несколько единиц превышать ожидаемое максимальное абсолютное значение относительного смещения по частоте $|\nu|T$, а оптимальная длина циклического префикса N_G — максимальный интервал многолучёвости L . По сравнению с системой, использующей CP-алгоритм, если $|\nu|T < 1/2$, или VS-алгоритм, если $|\nu|T \geq 1/2$, когда CP-алгоритм не работает, это обеспечивает значительное улучшение точности синхронизации и достижение качества приёма, близкого к качеству приёма в условиях идеальной синхронизации.

Сравнение новых CP-VS-A- и CP-VS-B-алгоритмов показало, что более сложный CP-VS-A-алгоритм обеспечивает меньшую среднеквадратичную ошибку оценки задержки во времени и практически не даёт выигрыша в величине вероятности P_t . Это означает, что CP-VS-A-алгоритм целесообразно использовать для грубой синхронизации в когерентных системах, а также в неко-

герентных системах с чувствительными к временному сдвигу относительными видами модуляции, такими, как ЧФРМ-1. Для некогерентных систем с инвариантными к временному сдвигу относительными видами модуляции (ВФРМ, ОТФМ) можно применять менее сложный CP-VS-B-алгоритм синхронизации. Заметим, что в некогерентных системах этап точной синхронизации не требуется, т.к. уже грубая синхронизация с использованием CP-VS-A- или CP-VS-B-алгоритмов обеспечивает достижение качества приёма, близкого к качеству приёма при идеальной синхронизации.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе обобщённого метода максимального правдоподобия посредством последовательного упрощения функции правдоподобия сигнала, принимаемого в многолучёвом канале с задержкой во времени, частотным сдвигом и аддитивным белым гауссовым шумом, разработаны новые методы слепой синхронизации приёмника OFDM-сигнала во времени и по частоте. Первый из них (CP-VS-A-алгоритм) использует информацию о структуре принимаемого сигнала на интервале трёх последовательных OFDM-символов, а второй (CP-VS-B-алгоритм) — только одного OFDM-символа. Они обобщают известные методы, использующие либо защитный интервал во времени в виде циклического префикса, либо защитный интервал по частоте в виде виртуальных поднесущих, и основаны на их совместном применении.

Для уменьшения вычислительной сложности предложены приближённые алгоритмы, основанные на аппроксимации оптимальных правил, но обладающие, как показали исследования, практически такими же характеристиками точности оценивания параметров и помехоустойчивости приёма.

В результате моделирования продемонстрировано, что предложенные методы превосходят по точности оценивания параметров и помехоустойчивости приёма методы синхронизации по циклическому префиксу и по виртуальным поднесущим в двухлучёвом канале с рэлеевскими замираниями. Для некогерентных систем с относительными видами фазовой модуляции их использование позволяет исключить этап точной синхронизации и за счёт незначительной избыточности полосы системы и длины циклического префикса вплотную приблизиться к помехоустойчивости приёма при идеальной синхронизации.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 11-07-97024-р_поволжье_а).

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Приведём общие соотношения для операций с матрицами окна и расширения. Произведение матриц окна с размерами $(n \times j)$ и $(j \times k)$

$$\mathbf{W}_{n,m,j} \mathbf{W}_{j,l,k} = \mathbf{W}_{n,m+l,k}, \quad (\text{П1.1})$$

где по определению $n + m \leq j$, $j + l \leq k$, всегда сводится к матрице окна с размерами $(n \times k)$. Произведение матрицы окна с размерами $(n \times j)$ и матрицы расширения с размерами $(j \times k)$

удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{W}_{n,m,j} \mathbf{W}_{k,l,j}^T = \begin{cases} \mathbf{0}_{n,k}, & n+m \leq j \cup k+l \leq m; \\ \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{l-m,k} \\ \mathbf{W}_{n+m-l,0,k} \end{pmatrix}, & m < l < n+m \leq k+l; \\ \mathbf{W}_{k,l-m,n}^T, & 0 \leq l-m \leq n-k; \\ \mathbf{W}_{n,m-l,k}, & 0 \leq m-l \leq k-n; \\ \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{k+l-m,m-l,k} \\ \mathbf{0}_{n+m-k-l,k} \end{pmatrix}, & l \leq m < k+l < n+m. \end{cases} \quad (\text{П1.2})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Подставляя (4) в (6) и отбрасывая слагаемое с АБГШ, получаем

$$\mathbf{y} = \mathbf{W}_{N_a, K_0-\tau, 3K-L} (\mathbf{W}_{K,0,3K-L}^T \mathbf{s}_{rx}[-1] + \mathbf{W}_{K+L,K-L,3K-L}^T \mathbf{s}_{rx}[0] + \mathbf{W}_{K,2K-L,3K-L}^T \mathbf{s}_{rx}[+1]).$$

Для того, чтобы из этого выражения после раскрытия скобок в правой части получить (7), потребуем, чтобы произведения матрицы окна на матрицы расширения в первом, втором и третьем слагаемых имели форму, как в пятом, третьем и втором случаях из (П1.2) соответственно. При этом согласно (П1.2) имеем систему неравенств

$$\begin{aligned} 0 < K_0 - \tau < N_a + K_0 - \tau; \quad 0 \leq \tau \leq N_a - K - L; \\ K_0 - \tau < 2K - L < N_a + K_0 - \tau < 3K - L. \end{aligned}$$

В результате её анализа легко найти требуемое оптимальное решение (8), (9).

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Последние части в (10а), (10в) и (10д) получены из формул

$$\mathbf{y}_{-1} = \exp[i(\varphi_0 - \tau\varphi)] \mathbf{P}_\tau(\varphi) \mathbf{W}_{\tau, K_0-\tau, K} \mathbf{H}_{K,K} \mathbf{T}_{K,N} \mathbf{F} \mathbf{d}[-1], \quad (\text{П3.1а})$$

$$\mathbf{y}_0 = \exp[i(\varphi_0 + L\varphi)] \mathbf{P}_{K_0}(\varphi) \mathbf{W}_{K_0, L, K+L} \mathbf{G}_{K+L, K} \mathbf{T}_{K,N} \mathbf{F} \mathbf{d}[0], \quad (\text{П3.1б})$$

$$\mathbf{y}_{+1} = \exp[i(\varphi_0 + (K+L)\varphi)] \mathbf{P}_{K_0-1-\tau}(\varphi) \mathbf{W}_{K_0-1-\tau, L, K} \mathbf{G}_{K, K} \mathbf{T}_{K,N} \mathbf{F} \mathbf{d}[+1]. \quad (\text{П3.1в})$$

Для этого в них использованы соотношения $\mathbf{W}_{\tau, K_0-\tau, K} \mathbf{H}_{K,K} = \mathbf{W}_{\tau, K_0-\tau, K_0} \mathbf{H}_{K_0, K}$, $\mathbf{W}_{K_0, L, K+L} \times \mathbf{G}_{K+L, K} = \mathbf{H}_{K_0, K}$ и $\mathbf{W}_{K_0-1-\tau, L, K} \mathbf{G}_{K, K} = \mathbf{W}_{K_0-1-\tau, 0, K_0} \mathbf{H}_{K_0, K}$ соответственно, а также формула

$$\mathbf{H}_{K_0, K} \mathbf{T}_{K,N} \mathbf{F} = \mathbf{T}_{K_0, N} \mathbf{F} \mathbf{H}_M. \quad (\text{П3.2})$$

Соотношение (П3.2) следует из того, что $\mathbf{H}_{K_0, K} \mathbf{T}_{K,N} = \mathbf{T}_{K_0, N} (\mathbf{U} \mathbf{H}_N \mathbf{U}^H)$ и $(\mathbf{U} \mathbf{H}_N \mathbf{U}^H) \mathbf{F} = \mathbf{F} \mathbf{H}_M$, где $\mathbf{U} \mathbf{H}_N \mathbf{U}^H$ — правоциркулярная матрица с размерами $(N \times N)$ с первым столбцом $(\mathbf{h}^T, \mathbf{0}_{1, N-L-1})^T$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Напомним [16], что для любой прямоугольной матрицы \mathbf{A} всегда существует псевдообратная матрица \mathbf{A}^+ , которая удовлетворяет необходимым и достаточным условиям:

$$1) \mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{A}, \quad 2) \mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+, \quad 3) (\mathbf{A}^+\mathbf{A})^H = \mathbf{A}^+\mathbf{A}, \quad 4) (\mathbf{A}\mathbf{A}^+)^H = \mathbf{A}\mathbf{A}^+. \quad (\text{П4.1})$$

Псевдообращение обратимо: $(\mathbf{A}^+)^+ = \mathbf{A}$, и коммутирует с транспонированием, комплексным сопряжением и эрмитовым сопряжением, например, $(\mathbf{A}^H)^+ = (\mathbf{A}^+)^H$. Псевдообратная матрица для матрицы полного ранга по столбцам может быть вычислена по формуле

$$\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^H, \quad (\text{П4.2})$$

и в этом случае $\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{I}$. В случае матрицы полного ранга по строкам псевдообращение может быть выполнено по формуле

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^H(\mathbf{A}\mathbf{A}^H)^{-1}, \quad (\text{П4.3})$$

и выполняется равенство $\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{I}$. Среди известных случаев справедливости правила $(\mathbf{B}\mathbf{A})^+ = \mathbf{A}^+\mathbf{B}^+$ для псевдообращения матричных произведений отметим случаи, когда одна из матриц (\mathbf{A} или \mathbf{B}) является ортогональной или унитарной.

Нетрудно выполнить псевдообращение матриц, участвующих в образовании $\mathbf{A}_k(\tau)$ в качестве сомножителей. Поскольку согласно (П1.2) справедливо $\mathbf{W}_{n,m,j}\mathbf{W}_{n,m,j}^T = \mathbf{W}_{n,0,n} = \mathbf{I}_n$ и ранг матрицы окна совпадает с числом строк, то из (П4.3) имеем

$$\mathbf{W}_{n,m,j}^+ = \mathbf{W}_{n,m,j}^T. \quad (\text{П4.4})$$

Учитывая это соотношение и унитарность матрицы обратного дискретного преобразования Фурье, получаем

$$\mathbf{F}^+ = (\mathbf{U}\mathbf{W}_{M,0,N}^T)^+ = \mathbf{W}_{M,0,N}\mathbf{U}^H = \mathbf{F}^H. \quad (\text{П4.5})$$

И, наконец, матрица добавления циклического префикса имеет полный ранг по столбцам, а для матрицы $\mathbf{T}_{k,n}^T\mathbf{T}_{k,n} = \mathbf{I}_n + \mathbf{W}_{k-n,2n-k,n}^T\mathbf{W}_{k-n,2n-k,n}$ легко найти обратную матрицу $(\mathbf{T}_{k,n}^T\mathbf{T}_{k,n})^{-1} = \mathbf{I}_n - \mathbf{W}_{k-n,2n-k,n}^T\mathbf{W}_{k-n,2n-k,n}/2$, поэтому на основе (П4.2) в результате несложных преобразований имеем

$$\mathbf{T}_{k,n}^+ = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{2n-k,k-n,k} \\ (\mathbf{W}_{k-n,0,k} + \mathbf{W}_{k-n,n,k})/2 \end{pmatrix}. \quad (\text{П4.6})$$

Однако вычисление матриц $\mathbf{A}_k^+(\tau)$ в общем случае не сводится к вычислению произведений матриц (П4.4)–(П4.6).

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

Для вывода (24) выразим матрицы

$$\mathbf{A}_{+1}(K_0 - 1 - \tau) = \mathbf{W}_{\tau,0,K_0}\mathbf{A}_0 = \left(\mathbf{f}_{(N-N_G+L)_N}^T, \dots, \mathbf{f}_{(N-N_G+L+\tau-1)_N}^T \right)^T, \quad (\text{П5.1})$$

$$\mathbf{A}_{-1}(\tau) = \mathbf{W}_{\tau, K_0-1, K_0} \mathbf{A}_0 = \left(\mathbf{f}_{(N-\tau)_N}^T, \dots, \mathbf{f}_{N-1}^T \right)^T \quad (\text{П5.2})$$

через строки $\mathbf{f}_n = \mathbf{u}_n^T \mathbf{W}_{M,0,N}^T$ матрицы \mathbf{F} , где $(\dots)_N$ обозначает приведение номеров строк к интервалу $[0, N-1]$. Учитывая соотношение $\mathbf{f}_m = \mathbf{f}_n \mathbf{P}_M[2\pi(m-n)/N]$, связывающее любые две строки матрицы \mathbf{F} , имеем уравнение

$$\mathbf{A}_{+1}(K_0 - 1 - \tau) = \mathbf{A}_{-1}(\tau) \mathbf{P}_M[2\pi(\tau - N_G + L)/N], \quad (\text{П5.3})$$

из которого, используя унитарность матрицы $\mathbf{P}_M(\varphi)$, находим

$$\mathbf{A}_{+1}^+(K_0 - 1 - \tau) = \mathbf{P}_M^H[2\pi(\tau - N_G + L)/N] \mathbf{A}_{-1}^+(\tau). \quad (\text{П5.4})$$

На основе соотношений (П5.3) и (П5.4) и определений матриц $\mathbf{B}_{+1}(\tau)$ и $\mathbf{B}_{-1}(\tau)$ получаем (24).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rohling H. OFDM: concepts for future communication systems. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2011. 266 p.
2. Ma X., Tepedelenlioglu C., Giannakis G. B., Barbarossa S. // IEEE J. Sel. Areas Commun. 2001. V. 19, No. 12. P. 2504.
3. Speth M., Classen F., Meyr H. // Proc. IEEE Int. Conf. Vehicular Technology. 1997. P. 1807.
4. Van de Beek J., Sandell M., Borjesson P. // IEEE Trans. Signal Processing. 1997. V. 45, No. 7. P. 1800.
5. Lee D., Cheun K. // IEEE Commun. Lett. 2002. V. 6, No. 10. P. 446.
6. Chen B. // IEEE Signal Processing Lett. 2002. V. 9, No. 4. P. 123.
7. Mostofi Y., Cox D. C. // IEEE Trans. Commun. 2006. V. 54, No. 2. P. 226.
8. Ai B., Yang Z., Pan C., et al. // IEEE Trans. Broadcasting. 2006. V. 52, No. 2. P. 236.
9. Gini F., Giannakis G. B. // IEEE Trans. Signal Processing. 1998. V. 46, No. 11. P. 2967.
10. Окунев Ю. Б. Цифровая передача информации фазомодулированными сигналами. М.: Радио и связь, 1991. 296 с.
11. Бочков Г. Н., Горохов К. В., Колобков А. В. // Изв. вузов Радиофизика. 2010. Т. 53, № 8. С. 543.
12. Марпл-мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990. 265 с.
13. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Кн. 2. М.: Сов. радио, 1975. 392 с.
14. Тихонов В. И. Оптимальный приём сигналов. М.: Радио и связь, 1983. 320 с.
15. Choi Y.-S., Peter J. V., Frank A. C. // IEEE Trans. Commun. 2001. V. 49. P. 1375.
16. Алберт А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1977. 224 с.

Поступила в редакцию 8 ноября 2012 г.; принята в печать 28 марта 2013 г.

BLIND SYNCHRONIZATION OF THE OFDM SIGNALS IN MULTIPATH CHANNELS ON THE BASIS OF THE TIME AND FREQUENCY PROTECTION INTERVALS

G. N. Bochkov, K. V. Gorokhov, and A. V. Kolobkov

New methods of the blind synchronization of the OFDM-signal receiver with respect to time and frequency are developed and studied. They generalize the known methods which use either the protection interval in time in the form of the "cyclic prefix" or the protection interval with respect to frequency

in the form of the “virtual subcarriers” and are based on their joint use. To reduce the computational complexity, the approximate algorithms based on the approximation of the optimal rules, but having, according to the study results, almost the same accuracy characteristics when estimating the reception parameters and interference immunity are proposed. It is shown that the proposed methods by the accuracy of estimation of the reception parameters and interference immunity are superior to the known methods of synchronization by the cyclic prefix and the virtual subcarriers in the two-beam Rayleigh-fading channel. For the incoherent systems with the relative phase-modulation types, using such methods, we can rule out the necessity of accurate synchronization and due to insignificant redundancy of the system band and the cyclic prefix length closely approach the reception interference immunity during perfect synchronization.