

УДК 537.876.23

## РАСЧЁТ ПРОИЗВОДНЫХ ЛУЧЕВЫХ КООРДИНАТ ПО НАЧАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРАМ В НЕОДНОРОДНЫХ ДВУМЕРНЫХ СРЕДАХ

*И. П. Смирнов*

Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород, Россия

Статья посвящена теории численного расчёта полей в неоднородных двумерных средах в приближении геометрической оптики. В ней получены аналитические формулы, описывающие трансформацию матрицы производных лучевых координат по начальным параметрам при отражениях лучей от помещённых в среду криволинейных поверхностей. Проведено сравнение производных, полученных численно и с использованием данных формул; выведены асимптотические выражения для амплитуд полей, отражённых от тел с большой кривизной.

### 1. РАСЧЁТ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЛУЧЕЙ В ДВУМЕРНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Рассмотрим неоднородную среду в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$ , зависимость скорости распространения колебаний в которой от координат описывается формулой  $c = c(r, z)$ , т. е. обладает азимутальной симметрией. Считая, что характерные масштабы изменения параметров среды значительно превосходят длину волны  $\lambda = c_0/f$ , где  $c_0$  — среднее значение скорости распространения колебаний, применим приближение геометрической оптики для описания поля, генерируемого помещённым в точку  $\mathbf{S}$  с координатами  $(r_0 = 0, z_0)$  волновода точечным источником с частотой  $f$ . В указанном приближении являющаяся решением уравнения Гельмгольца комплексная амплитуда поля в точке наблюдения  $\mathbf{R}$  записывается в виде

$$A = \sum_j A_j \exp(ikS_j),$$

где суммирование проводится по всем энергонесущим лучам, соединяющим источник с приёмником,  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число,  $A_j$  — амплитуда,  $S_j$  — эйконал луча с номером  $j$  [1–3].

Одним из вариантов расчёта лучевых траекторий служит решение системы гамильтоновых уравнений [2]:

$$\frac{dz}{dr} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dr} = -\frac{\partial H}{\partial z}, \quad (1)$$

— с функцией Гамильтона

$$H = -\sqrt{n^2 - p^2}.$$

Здесь переменная  $p = n \sin \vartheta$  отвечает лучевому импульсу,  $\vartheta$  — угол скольжения луча по отношению к горизонтальной плоскости  $z = \text{const}$ ,  $n = n(r, z) = c_0/c(r, z)$  — показатель преломления среды.

Для нахождения траектории луча, выходящего из источника под углом  $\vartheta_0$ , следует решить систему (1) на заданном отрезке  $[r_0, r_1]$  с начальными условиями  $z(r_0) = z_0$ ,  $p(r_0) = p_0 = n(r_0, z_0) \sin \vartheta_0$ . При этом предполагается, что вдоль траектории луча правые части системы изменяются непрерывно, а сама траектория в среде не имеет изломов, т. е. является гладкой. Допускается, однако, наличие в среде рассеивающих объектов, при пересечении границ которых показатель преломления меняется скачкообразно. Этими объектами могут быть естественные

границы волновода или поверхности сторонних тел, помещённых в среду <sup>1</sup>. В этом случае системе лучевых уравнений следует дополнить граничными условиями, характеризующими поведение луча при падении на такие объекты. Из возможных вариантов такого поведения (отражение, преломление, скольжение и пр. [4, 5]) рассмотрим только отражение. Оно описывается следующим мгновенным преобразованием фазового вектора луча при касании границы рассеивающего объекта:

$$\begin{pmatrix} z \\ p \end{pmatrix} \rightarrow \kappa^{(0)} \begin{pmatrix} z \\ p \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где матрица преобразования

$$\kappa^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - 2(\mathbf{t}, \mathbf{N})N_z/t_z \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Здесь вектор  $\mathbf{t}$  с координатами  $(t_r, t_z) = (\cos \vartheta, \sin \vartheta)$  есть вектор направления падающего луча, вектор  $\mathbf{N}$  с координатами  $(N_r, N_z) = (\cos \alpha, \sin \alpha)$  — внешняя нормаль к границе рассеивающего объекта в точке падения. В результате преобразования (2) луч возвращается в среду при равенстве углов падения и отражения. В частности, на горизонтальной границе, где  $N_r = 0$ , а также при нормальном падении луча на произвольную границу, когда  $\mathbf{t} = -\mathbf{N}$ , матрица

$$\kappa^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

При касательном падении луча, когда  $\mathbf{tN} = 0$ , фазовые координаты луча не изменяются и матрица  $\kappa^{(0)}$  равна единичной матрице  $\mathbf{E}$ .

Вычисление соответствующих лучу амплитуд связано с расчётом элемента  $q_{21}$  матрицы стабильности [2, с. 67]

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial p_0} & \frac{\partial p}{\partial z_0} \\ \frac{\partial z}{\partial p_0} & \frac{\partial z}{\partial z_0} \end{pmatrix},$$

удовлетворяющей системе линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{q}}{dr} = K\mathbf{q}. \quad (4)$$

Система (4) получается из (1) дифференцированием по начальным параметрам  $z_0$  и  $p_0$ . Коэффициенты этой системы, определяемые матрицей

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 H}{\partial z \partial p} & -\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial p^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial z \partial p} \end{pmatrix},$$

изменяются вдоль траектории луча, для которого рассчитывается амплитуда.

В начальной точке луча  $\mathbf{S}$  матрица  $\mathbf{q}$  равна  $\mathbf{E}$ . При отражении луча от границы рассеивающего объекта матрица  $\mathbf{q}$  аналогично фазовому вектору луча, претерпевает мгновенную трансформацию. Для того, чтобы определить соответствующее преобразование, рассмотрим падающий на границу узкий пучок лучей (рис. 1), ограниченный лучами с близкими импульсами  $p$  и  $\tilde{p}$ . Предполагается, что эти лучи вышли с одинаковым импульсом  $p_0$  из близких по глубине источников

<sup>1</sup> Для сохранения двумерности задачи предполагается, что указанные объекты обладают азимутальной симметрией, а их границы описываются уравнениями  $f(z, r) = 0$ .

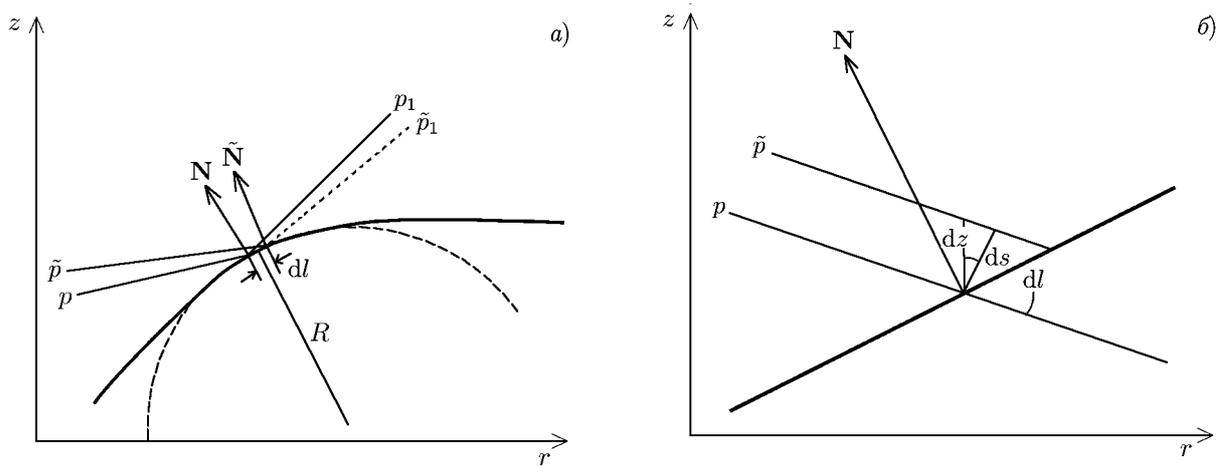


Рис. 1. Схема отражения узкого пучка лучей от участка криволинейной поверхности с вектором нормали  $\mathbf{N}$  и радиусом кривизны  $R = 1/\mathcal{R}$

с координатами  $z_0$  и  $z_0 + \Delta z_0$  или из общего источника с координатой  $z_0$  и с близкими начальными импульсами  $p_0$  и  $p_0 + \Delta p_0$ . Пусть точки падения этих лучей есть  $(r, z)$  и  $(\tilde{r} = r + \delta r, \tilde{z} = z + \delta z)$ , их направления распространения —  $\mathbf{t}$  и  $\tilde{\mathbf{t}}$ , нормали к поверхности —  $\mathbf{N}$  и  $\tilde{\mathbf{N}}$ , углы падения —  $\beta$  и  $\tilde{\beta}$ , соответственно. Фазовые координаты лучей после отражения обозначим нижним индексом 1.

Из геометрических соображений (рис. 1б) легко найти, что

$$\begin{aligned} \delta r &\approx \frac{\Delta z}{\text{ctg } \alpha + \text{tg } \vartheta} = \frac{t_r N_z}{N_r t_r + t_z N_z} \Delta z = \frac{t_r N_z}{N_t} \Delta z, \\ \delta z &\approx -\text{ctg}(\alpha) \delta r = -\frac{N_r}{N_z} \frac{t_r N_z}{N_t} \Delta z = -\frac{t_r N_r}{N_t} \Delta z. \end{aligned}$$

Сначала найдём формулы для отражения пучка, пренебрегая изменением вектора нормали к поверхности рассеивающего объекта на участке падения лучей, т. е. считая его поверхность плоской. Для приращения  $\Delta z = z(r) - \tilde{z}(r)$  после отражения имеем в этом приближении

$$\begin{aligned} z_1(r + \delta r) &= z_1(r) + \dot{z}_1 \delta r = z(r) + \frac{t_{1z}}{t_{1r}} \delta r, & \tilde{z}_1(r + \delta r) &= \tilde{z}(r) + \dot{\tilde{z}} \delta r = \tilde{z}(r) + \frac{\tilde{t}_z}{\tilde{t}_r} \delta r, \\ \Delta z_1 &\equiv z_1(r + \delta r) - \tilde{z}_1(r + \delta r) = \Delta z + \left( \frac{t_{1z}}{t_{1r}} - \frac{\tilde{t}_z}{\tilde{t}_r} \right) \delta r \approx \left[ 1 + \frac{t_r N_z}{N_t} \left( \frac{t_{1z}}{t_{1r}} - \frac{t_z}{t_r} \right) \right] \Delta z = -\frac{t_r}{t_{1r}} \Delta z. \end{aligned} \quad (5)$$

Для  $\Delta p = p(r) - \tilde{p}(r)$  имеем аналогично

$$\begin{aligned} p_1(r + \delta r) &= p_1(r) + \dot{p}_1 \delta r = p(r) - 2N_z [N_r \sqrt{n^2 - p^2(r)} + p(r)N_z] + \frac{n'_z}{t_{1r}} \delta r, \\ \tilde{p}_1(r + \delta r) &= \tilde{p}(r + \delta r) - 2N_z [N_r \sqrt{n^2(r + \delta r, z + \delta z)} - \tilde{p}^2(r + \delta r) + \tilde{p}(r + \delta r)N_z], \\ \tilde{p}(r + \delta r) &= \tilde{p}(r) + \dot{\tilde{p}} \delta r = \tilde{p}(r) + \frac{n'_z}{\tilde{t}_r} \delta r, \\ \Delta p_1 &\equiv p_1(r + \delta r) - \tilde{p}_1(r + \delta r) \approx \Delta p - 2N_z N_r [\sqrt{n^2 - p^2(r)} - \sqrt{n^2(r + \delta r, z + \delta z)} - \tilde{p}^2(r + \delta r)] - \\ &\quad - 2N_z [p(r) - \tilde{p}(r + \delta r)] N_z + (\dot{p}_1 - \dot{\tilde{p}}) \delta r = \Delta p \left( 1 - 2N_z^2 + 2N_z N_r \frac{t_z}{t_r} \right) + \\ &\quad + \left[ \dot{p}_1 - \dot{\tilde{p}} \left( 1 - 2N_z^2 + 2N_z N_r \frac{t_z}{t_r} \right) \right] \delta r + 2N_z N_r \frac{n}{\sqrt{n^2 - p^2(r)}} (n'_r \delta r + n'_z \delta z) = \end{aligned}$$

$$= -\frac{t_{1r}}{t_r} \Delta p + \left[ \left( \frac{t_r}{t_{1r}} + \frac{t_{1r}}{t_r} - 2N_r^2 \right) n'_z + 2N_r N_z n'_r \right] \frac{N_z}{N_t} \Delta z. \quad (6)$$

Здесь были использованы тождества

$$1 - 2N_z^2 + 2N_z N_r \frac{t_z}{t_r} \equiv -\frac{t_{1r}}{t_r}, \quad 1 + \frac{t_r N_z}{N_t} \left( \frac{t_{1z}}{t_{1r}} - \frac{t_z}{t_r} \right) \equiv -\frac{t_r}{t_{1r}}.$$

Далее учтём, как влияет кривизна поверхности в точке отражения на приращение импульса  $\Delta p$ , пренебрегая при этом вариациями  $\mathbf{t}$  и  $n$ . Пусть кривизна поверхности в точке отражения луча равна  $\mathfrak{R}$ . Имеем

$$dN_z = d \sin \alpha = N_r d\alpha, \quad dN_r = d \cos \alpha = -N_z d\alpha.$$

Дифференцируя по  $\alpha$  уравнение

$$t_{1z} = t_z - 2N_z \mathbf{tN},$$

получаем

$$\begin{aligned} -dt_{1z}/2 &= dN_z \mathbf{N} + N_z \mathbf{t} d\mathbf{N} = dN_z (\mathbf{tN} + t_z N_z) + N_z t_r dN_r = \\ &= [N_r (2t_z N_z + t_r N_r) - N_z^2 t_r] d\alpha = -t_{1r} d\alpha. \end{aligned}$$

При этом (см. рис. 1б)

$$d\alpha \approx -\mathfrak{R} dl = -\mathfrak{R} \frac{\delta r}{N_z} = -\mathfrak{R} \frac{t_r}{N_t} \Delta z,$$

поэтому после умножения на показатель преломления  $n$  получаем

$$\Delta p_1 = 2nt_{1r} d\alpha \approx -2\mathfrak{R}n \frac{t_1 t_r}{N_t} \Delta z. \quad (7)$$

Суммируем формулы (6) и (7) и после деления правой и левой частей полученных таким образом уравнений на  $\Delta p_0$  или  $\Delta z_0$  переходим к пределу  $\Delta p_0 \rightarrow 0$  или  $\Delta z_0 \rightarrow 0$ . Аналогично поступаем с формулой (5). В результате приходим к следующему закону преобразования матрицы стабильности при отражении луча [6]:

$$q \rightarrow \kappa^{(1)} \mathbf{q}, \quad (8)$$

где

$$\kappa^{(1)} = \begin{pmatrix} \kappa_{11}^{(1)} & \kappa_{12}^{(1)} \\ \kappa_{21}^{(1)} & \kappa_{22}^{(1)} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \kappa_{11}^{(1)} &= -\frac{t_{1r}}{t_r}, & \kappa_{12}^{(1)} &= \left\{ -\mathfrak{R} n t_{1r} t_r + N_z \left[ \left( \frac{t_r^2 + t_{1r}^2}{2t_r t_{1r}} - N_r^2 \right) n'_z + N_r N_z n'_r \right] \right\} \frac{2}{N_t}, \\ \kappa_{21}^{(1)} &= 0, & \kappa_{22}^{(1)} &= -\frac{t_r}{t_{1r}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Как и следовало ожидать, в отличие от описывающей отражение лучей матрицы (3), в которой фигурирует только наклон границы, соответствующая матрица преобразования (9) для пучков зависит также и от кривизны границы. Заметим, что в силу теоремы Лиувилля [2] детерминант матрицы стабильности всегда должен равняться единице; преобразование (8) не нарушает этого свойства.

Формулы (10) в действительности получены в предположении положительной проекции нормали на ось  $z$ ; в общем случае

$$\kappa_{12}^{(1)} = \left\{ -\Re n t_{1r} t_r \operatorname{sgn} N_z + N_z \left[ \left( \frac{t_r^2 + t_{1r}^2}{2t_r t_{1r}} - N_r^2 \right) n'_z + N_r N_z n'_r \right] \right\} \frac{2}{N_t}.$$

При отражении пучка от горизонтальной плоской площадки, когда  $N_r = 0$ ,  $t_r = t_{1r}$ ,  $\Re = 0$ , в однородной среде имеем  $\kappa^{(1)} = -E$ . Однако, если среда неоднородна, то это не верно:

$$\kappa^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 & 2n'_z/t_z \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

— и компоненты матрицы стабильности изменяются при отражениях не только по знаку, но и по абсолютной величине.

При отражениях от наклонных и/или криволинейных поверхностей элементы матрицы  $\kappa^{(1)}$  отличны в общем случае по модулю от 1 даже и в однородной среде, где

$$\kappa^{(1)} = \begin{pmatrix} -t_{1r}/t_r & \pm 2\Re t_{1r} t_r / N_t \\ 0 & -t_r/t_{1r} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу (9) более подробно. Легко видеть, что

$$|\cos \vartheta_1| \leq |\kappa_{11}^{(1)}| \leq \sec \vartheta.$$

В случае вертикального отражения луча, когда  $\cos \vartheta_1 = 0$ , коэффициент  $\kappa_{11}^{(1)} = 0$ , а для всех не заворачивающих при отражении лучей  $\kappa_{11}^{(1)} < 0$ . Для таких лучей

$$-\sec \vartheta \leq \kappa_{11}^{(1)} \leq -\cos \vartheta_1.$$

Для заданного угла скольжения луча  $\vartheta$  в точке его падения существуют два предельных угла поворота отражающей плоскости:

$$\frac{\pi}{2} + \vartheta = \alpha_1(\vartheta) \leq \alpha \leq \alpha_2(\vartheta) = \frac{3\pi}{4} + \frac{\vartheta}{2}.$$

При повороте плоскости на угол  $\alpha = \alpha_1$  луч касается плоскости, при повороте на  $\alpha_2$  — отражается от неё вертикально, при  $\alpha > \alpha_2$  — заворачивает.

При отрицательных углах  $\vartheta$  скольжения луча, когда  $\alpha_1(\vartheta) < \pi/2$ , имеем табл. 1 значений коэффициента  $\kappa_{11}^{(1)}$ .

При положительных  $\vartheta$ , когда  $\alpha_1(\vartheta) > \pi/2$ , коэффициенты  $\kappa_{11}^{(1)}$  иные (табл. 2).

Таблица 1

$\alpha = \alpha_1(\vartheta)$	$\kappa_{11}^{(1)} = -1$
$\alpha_1(\vartheta) < \alpha < \pi/2$	$\kappa_{11}^{(1)} < -1$
$\alpha = \pi/2$	$\kappa_{11}^{(1)} = -1$
$\pi/2 < \alpha < \alpha_2(\vartheta)$	$-1 < \kappa_{11}^{(1)} < 0$
$\alpha = \alpha_2(\vartheta)$	$\kappa_{11}^{(1)} = 0$

Таблица 2

$\alpha$	$\kappa_{11}^{(1)}$
$\alpha = \alpha_1(\vartheta)$	$\kappa_{11}^{(1)} = -1$
$\alpha_1(\vartheta) < \alpha < \alpha_2(\vartheta)$	$-1 < \kappa_{11}^{(1)} < 0$
$\alpha = \alpha_2(\vartheta)$	$\kappa_{11}^{(1)} = 0$

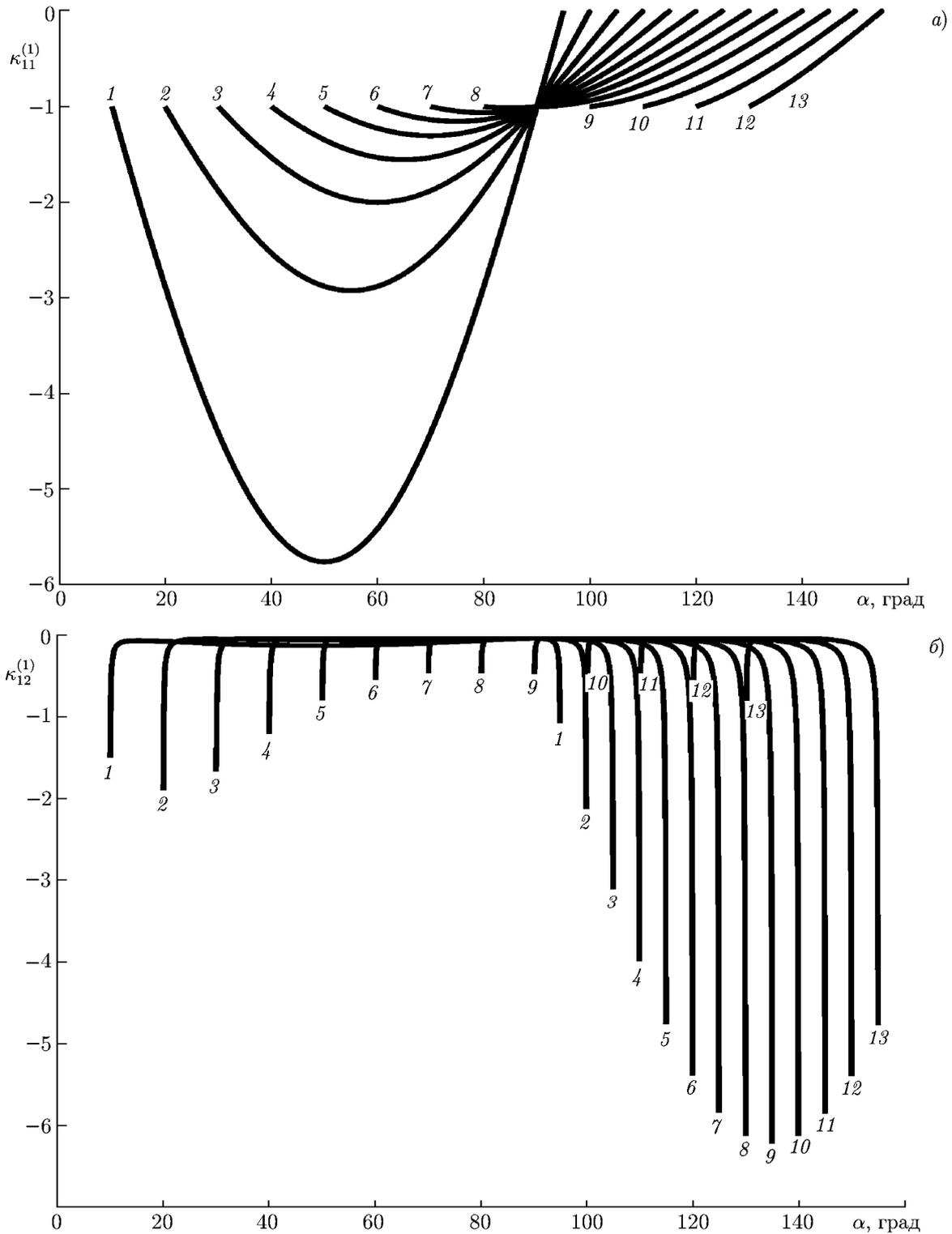


Рис. 2. Графики зависимостей коэффициентов  $\kappa_{11}^{(1)}$  (а), и  $\kappa_{12}^{(1)}$  (б) для различных углов  $\vartheta$  падения луча; кривая с номером  $k$  соответствует углу  $\vartheta = -90^\circ + 10^\circ k$  и определена на интервале  $\alpha \in [\alpha_1(\vartheta), \alpha_2(\vartheta)]$ ; кривизна поверхности в точке отражения луча  $\mathfrak{K} = 0,02$ , производные  $n'_z = 0,01$ ,  $n'_r = 0$

При  $\vartheta < 0$  и  $\alpha_1(\vartheta) < \alpha < \pi/2$  реализуется случай  $\kappa_{11}^{(1)} < -1$ , когда наклон плоскости увеличивает  $|\Delta p|$ . Максимальное значение коэффициента  $\kappa_{11}^{(1)} = -\sec \vartheta$  достигается при углах наклона плоскости  $\alpha = (\pi + \vartheta)/2$ ; при этом отражённый луч направлен горизонтально, т. е.  $\cos \vartheta_1 = 1$ . Во всех остальных случаях  $-1 < \kappa_{11}^{(1)} < 0$ .

Графики элементов матрицы  $\kappa^{(1)}$  как функций угла  $\alpha$  для различных заданных углов скольжения луча  $\vartheta$  приведены на рис. 2.

## 2. ПРИЛОЖЕНИЯ

В данном разделе мы рассмотрим два возможных применения полученных выше результатов. Первое связано с расчётом акустических волн, отражённых от границ океанических волноводов, второе — с вычислением коэффициента отражения высокочастотных волн от тела с большой кривизной.

### 2.1. Численное дифференцирование как альтернативный метод расчёта матрицы стабильности в акустике океана

Расчёт распространения волн в неоднородном волноводе с переменными координатами границ методом геометрической оптики является одной из основных численных задач акустики океана [1–3]. Океанические волноводы обычно неоднородны, поэтому, как следует из формулы (11), даже в случае идеально ровных дна и свободной поверхности преобразование матрицы стабильности при отражениях от границ не сводится просто к смене её знака. Впрочем, в акустике океана не часто прибегают к решению системы (4) для нахождения амплитуд полей, а обычно используют для этого метод численного дифференцирования [3]. Помимо традиций, на наш взгляд, это объясняется тем, что характерные для океанических задач параметры, в частности значения кривизны поверхностей и лучей, удовлетворяют условиям, гарантирующим достаточную точность подобных расчётов.

Для иллюстрации высказанных утверждений сравним между собой решения системы (4) и численные производные, т. е. конечные выражения  $\Delta z/\Delta p_0$ , получаемые при непосредственном расчёте распространения близких между собой лучей. Выберем для этого типичную модель океанического волновода с неровным дном и взволнованной поверхностью в форме синусоиды (табл. 3). Параметры модели следующие:  $a_s = -0,1$  км,  $\lambda_s = 10$  км,  $z_b = -3$  км,  $a_b = -0,9$  км,  $\lambda_b = 25$  км,  $r_0 = 0,1$  км,  $\varepsilon = 0,0057$ ,  $c_0 = 1,5$  км/с. На рис. 3 представлены траектория отдельного луча (верхние графики) и отвечающие данному лучу решение  $q_{12}$  системы (4) и производная  $\Delta z/\Delta p_0$  (нижние графики, сплошные и пунктирные кривые, соответственно). Видно, что игнорирование кривизны границ при вычислении матрицы стабильности в результате решения системы (4) приводит к значительным ошибкам, абсолютные величины которых растут пропорционально удалению от источника. И наоборот, с учётом кривизны оба метода расчёта дают практически

Таблица 3. Используемые при тестировании аналитические профили поверхностей и скорости звука

Профиль скорости звука (Манка)	$c(z) = c_0 [1 + \varepsilon (\exp(\eta) - 1 - \eta)]$ , $\eta = 2(z + 1)$
Профиль свободной поверхности	$z_b(r) = a_s [1 + \sin(2\pi r/\lambda_s)]$
Профиль дна	$z_s(r) = z_b + a_b \{1 + \sin[2\pi \sqrt{(r + r_0)/\lambda_b}]\}$

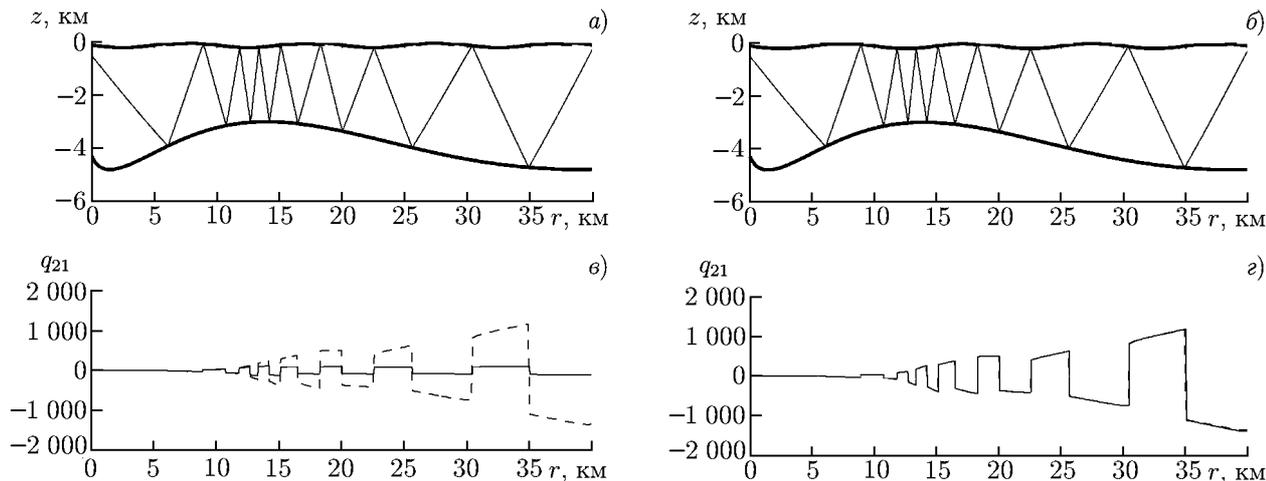


Рис. 3. Траектории луча (панели (а) и (б)), производные  $\partial z/\partial p_0$  (панели (в) и (з)), найденные с помощью решения системы (4) (сплошные линии) и численным дифференцированием (пунктир). Сплошные кривые на панелях (а) и (в) строились для  $\mathfrak{K} = 0$ , на панелях (б) и (з) — с учётом истинной кривизны поверхностей

совпадающие результаты при значительном числе отражений, что показывает правомерность применения численного дифференцирования в данной задаче. Следует, однако, заметить, что метод, основанный на решении системы (4) с использованием граничных условий (8), проще в реализации и требует меньшего объёма вычислений.

### 2.2. Асимптотическое решение задачи рассеяния лучей на малых телах

Пусть гладкое тело  $\mathbf{T}$  имеет в плоскости «источник—приёмник»  $\mathbf{SR}$  характерный размер  $l$ , который значительно превосходит длину волны  $\lambda$  и в то же время мал по сравнению с размерами волновода и характерными радиусами кривизны лучей (рис. 4). Для сохранения двумерности задачи данное тело следует считать плоскостным сечением трёхмерного тора, что сужает практическую ценность полученного решения. Для расширения сферы приложений можно предположить, однако, что трёхмерное физическое тело хорошо аппроксимируется тором лишь для малых азимутальных углов  $|\varphi| \lesssim \lambda/r_{ST}$ , где нулевой азимут  $\varphi = 0$  соответствует направлению на приёмник,  $r_{ST}$  — расстояние от источника до тела  $\mathbf{T}$  в горизонтальной плоскости.

В приближении геометрической теории дифракции [4, 5] рассеянное телом поле в точке наблюдения с радиус-вектором  $\mathbf{R}$  можно записать в виде ряда по степеням длины волны

$$u(\mathbf{R}) = \sum_{j_0} A_{j_0} \exp(ikS_{j_0}) + \frac{\lambda}{l} \sum_{j_1} A_{j_1} \exp(ikS_{j_1}) + \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 \sum_{j_2} A_{j_2} \exp(ikS_{j_2}) \dots,$$

члены которого описывают дифракционные поля различных типов. Амплитуда каждого из таких полей записывается в унифицированном виде

$$A = \frac{A_{in}S(\mathbf{t}, \mathbf{t}_1)}{\sqrt{|J|}},$$

где  $A_{in}$  — амплитуда падающей на тело волны,  $S(\mathbf{t}, \mathbf{t}_1)$  — коэффициент дифракции соответствующего типа,  $\mathbf{t}$  и  $\mathbf{t}_1$  — соответственно направления падающей и отражённой волн в точке рассеяния (рис. 4),  $J$  — якобиан лучевого преобразования на отрезке «тело—приёмник».

Покажем, как можно использовать формулы (10) для нахождения амплитуд отражённых телом волн. Для этого следует прежде всего решить задачу нацеливания: найти выходящие из источника энергонесущие лучи, попадающие в приёмник после их отражения от поверхности тела. Разумеется, для этого можно использовать всё тот же метод последовательного перебора лучей по углам их выхода из источника, что и при нахождении полей в волноводе. Однако, вследствие большой кривизны границы тела  $\mathcal{R} \sim l^{-1}$ , это потребует перебора значительно большего числа лучей, чем при нацеливании в конкретную точку волновода. Поэтому рассмотрим алгоритм нацеливания, не требующий расчётов распространения большого числа лучей [7]. Воспользуемся тем, что вдали от каустических областей направления лучей, приходящих от источника и приёмника к различным точкам малого тела, близки между собой. Выберем некоторую «центральную» точку тела и построим лучи, приходящие в неё от источника и приёмника. Направления этих лучей  $\mathbf{t}$  и  $-\mathbf{t}_1$  позволяют определить нормаль к поверхности тела

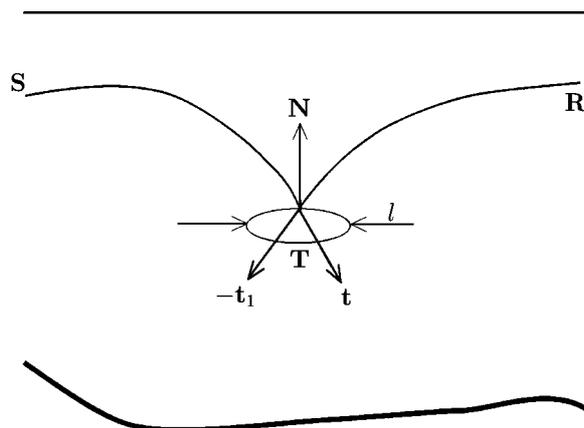


Рис. 4. Схема отражения луча от малого тела

$$\mathbf{N} = -\frac{\mathbf{t} - \mathbf{t}_1}{\sqrt{2(1 - \mathbf{t}\mathbf{t}_1)}}, \quad (12)$$

необходимую для того, чтобы пришедший от источника луч отразился в приёмник. Найдём точки поверхности, обладающие указанными нормалью, и лучи, приходящие в них из точек  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{R}$ . Направления лучей в точках поверхности в общем случае слегка отличаются от направлений в центральной точке тела. Используем эти направления лучей в точках поверхности в формуле (12) для уточнения требуемых нормалей и будем повторять процедуру далее. Скорость сходимости описанной процедуры геометрическая со знаменателем порядка  $l/\bar{r}$ , где  $\bar{r}$  — минимальное из расстояний  $r_{ST}$  и  $r_{TR}$  от точек  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{R}$  до тела соответственно.

После решения задачи нацеливания следует найти амплитуды отражённых волн. Для этого достаточно решить систему (4) вдоль траекторий найденных лучей, используя формулы отражения (10). Заметим, что численное дифференцирование, вполне пригодное при нахождении амплитуд поля в волноводе, в данном случае обычно требует регуляризации [8] вследствие высокой частоты осцилляций отражённых от поверхности лучей.

Используя (10), можно также получить асимптотическое выражение для коэффициента отражения волны, рассеянной телом с большой кривизной. Из закона сохранения потока энергии внутри лучевой трубки легко выводится следующая формула для интенсивности волны в точке наблюдения [1]:

$$I(\mathbf{R}) = \frac{W}{4\pi(r_{ST} + r_{TR})n^{(S)}t_r^{(R)}|q_{21}(\mathbf{R})|} |\hat{V}|^2. \quad (13)$$

Здесь  $W$  — мощность ненаправленного источника,  $n^{(S)}$  — показатель преломления в точке  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{t}^{(R)}$  — вектор луча в точке  $\mathbf{R}$ ,  $\hat{V}$  — коэффициент Френеля в точке  $\mathbf{T}$  отражения луча от тела.

С учетом преобразования (8) запишем

$$\mathbf{q}(\mathbf{R}) = \Phi(\mathbf{R})\kappa^{(1)}\mathbf{q}(\mathbf{T}),$$

где  $\Phi$  — решение системы (4) на отрезке волновода между точками  $\mathbf{T}$  и  $\mathbf{R}$  с начальным условием  $\Phi(\mathbf{T}) = \mathbf{E}$ , т. е. фундаментальная матрица этой линейной системы. Отсюда при  $\Re \rightarrow \infty$  получаем асимптотическое выражение

$$|q_{21}(\mathbf{R})| = \left| \sum_{i,j} \Phi_{2i}(\mathbf{R}) \kappa_{ij}^{(1)} q_{j1}(\mathbf{T}) \right| \approx \left| \Phi_{21}(\mathbf{R}) \kappa_{12}^{(1)} q_{21}(\mathbf{T}) \right| \approx |q_{21}(\mathbf{T})| \left| \frac{2\Re n^{(T)} t_{1r} t_r}{N_t} \right| |\Phi_{21}(\mathbf{R})|, \quad (14)$$

где  $n^{(T)}$  — показатель преломления в точке  $\mathbf{T}$ .

Подставляя (14) в (13), получаем после простых преобразований

$$I(\mathbf{R}) \approx \frac{I_{\text{in}} \Re^2}{|J|},$$

где

$$I_{\text{in}} = \frac{W}{4\pi r_{\text{ST}} n^{(S)} t_r |q_{21}(\mathbf{T})|}$$

— интенсивность падающей на тело волны,

$$|J| = \frac{1}{r_{\text{TR}} n^{(T)} t_r^{(R)} |\Phi_{21}(\mathbf{R})|}$$

— якобиан преобразования лучевой трубки на отрезке от  $\mathbf{T}$  до  $\mathbf{R}$ ,

$$\Re^2 = \frac{|t_N/t_{1r}|}{r_{\text{ST}}^{-1} + r_{\text{TR}}^{-1}} \frac{|\hat{V}|^2}{2|\Re|} \quad (15)$$

— коэффициент отражения по интенсивности. Отсюда с учётом того, что квадрат амплитуды пропорционален интенсивности, получаем формулу для коэффициента отражения по амплитуде:

$$S(\mathbf{t}, \mathbf{t}_1) \approx \sqrt{\frac{n^{(T)}}{n^{(R)}}} \Re = \sqrt{\frac{n^{(T)}}{n^{(R)}} \frac{|t_N/t_{1r}|}{r_{\text{ST}}^{-1} + r_{\text{TR}}^{-1}} \frac{1}{2|\Re|}} \hat{V}.$$

В случае однородной среды формула (15) может быть получена из формулы Фока [5], а для стратифицированной среды с  $c = c(z)$  она была выведена другим способом в [7].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бреховских Л. М., Лысанов Ю. П. Теоретические основы акустики океана. М.: Наука, 2007. 370 с.
2. Вировлянский А. Л. Лучевая теория дальнего распространения звука в океане. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2006. 164 с.
3. Jensen F. V., Kuperman W. A., Porter M. B., Schmidt H. Computational ocean acoustics. Springer, 2011. 794 p.
4. Боровиков В. А., Кинбер Б. Е. Геометрическая теория дифракции. М.: Связь, 1978. 247 с.
5. Орлов Ю. И., Кравцов Ю. А. Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980. 306 с.
6. Smirnov I. P. ArXiv: 1212.6068v1 [math-ph], 25 December 2012.
7. Смирнов И. П., Хилько А. И. // Акуст. журн. 1995. Т. 41, № 1. С. 139.
8. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974. 288 с.

Поступила в редакцию 22 февраля 2012 г.; принята в печать 15 марта 2013 г.

**CALCULATION OF THE RAY-COORDINATE DERIVATIVES USING THE  
INITIAL PARAMETERS IN THE INHOMOGENEOUS TWO-DIMENSIONAL  
MEDIA**

*I. P. Smirnov*

In this work, the theory of numerical calculation of the fields in the inhomogeneous two-dimensional media is considered in the geometrical-optics approximation. Analytical formulas describing transformation of the matrix of the derivatives of the ray coordinates with respect to the initial parameters during the ray reflection from the curvilinear surfaces located in the medium are obtained in this work. The numerically obtained derivatives are compared with those obtained using the above formulas. Asymptotic expressions for the amplitudes of the fields reflected from the large-curvature bodies are derived.