

УДК 537.87+535.012+533.9

ВОЛНОВЫЕ ПУЧКИ В ПЛАВНО НЕОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ: БЕЗАБЕРРАЦИОННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ (ЧАСТЬ 3)

А. А. Балакин

Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород, Россия

В данном цикле работ предложен метод построения приближённого решения уравнений Максвелла в плавно неоднородных анизотропных гиротропных средах с учётом аббераций, пространственной дисперсии и поглощения. Получены эволюционные уравнения для волновых пучков и разработана методика их численного решения. Показана связь эволюционного квазиоптического уравнения с безабберационным уравнением для волновых пучков и найдено общее решение последнего. Явно описаны условия применимости безабберационного уравнения. Описаны способы учёта диссипативных абберационных эффектов в рамках безабберационного приближения.

ВВЕДЕНИЕ

Целью настоящей работы является обобщение квазиоптического приближения для описания распространения излучения в плавно неоднородных анизотропных и гиротропных средах с диссипацией. Одним из важнейших примеров таких сред является магнитоактивная плазма ионосферы и магнитосферы Земли, а также плазма в установках управляемого термоядерного синтеза. Распространение волновых пучков в поглощающих средах относится в настоящее время к одной из немногих недостаточно исследованных областей в физике линейных волновых процессов. Вместе с тем актуальность этой задачи очевидна для целого ряда направлений практической деятельности и, в частности, для управляемого термоядерного синтеза [1–3].

Существующие методы численного моделирования распространения микроволнового излучения в плазме в лучшем случае позволяют рассчитывать систему геометрооптических лучей [4, 5] или квазиоптических гауссовых пучков с определением поглощения по центральному лучу [6, 7]. Хотя было проведено тщательное сравнение этих методов друг с другом [8], но ни один из них не способен правильно описать распространение пучка в средах с сильной пространственной дисперсией, характерной для пространственной области вблизи электронно-циклотронного резонанса [9]. При этом либо не учитываются дифракционные эффекты и пространственная дисперсия среды, либо исключается из рассмотрения влияние неоднородности и нелокальности поглощения на распространение волнового пучка. Более того, сами условия используемых приближений не сформулированы в явном виде.

В данной работе показана связь эволюционного квазиоптического уравнения с безабберационным (т. е. сохраняющим неизменной форму гауссового пучка) уравнением для волновых пучков. Для последнего написано общее решение, пригодное и для сред с диссипацией, и условия его применимости. Также описаны способы учёта диссипативных абберационных эффектов в рамках безабберационного приближения.

Необходимо отметить, что термином «безабберационное уравнение» называют целый класс линейных и нелинейных уравнений. В данной работе рассматривается частный случай линейного безабберационного уравнения, важный для описания волн, распространяющихся в термоядерной плазме.

1. КВАЗИОПТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

В первой части работ настоящего цикла [10] было показано, что приближённое решение уравнений Максвелла можно искать в виде

$$E_j = \hat{e}_j[U], \quad (1)$$

где $\hat{H}[U] = 0$ и $\hat{H}$ и $\hat{e}_j$ — операторы, соответствующие собственному значению $H^{(n)} = e_i^{(n)*} L_{ij} e_j^{(n)}$ и собственному вектору $e^{(n)}$ матрицы $L_{ij} = \delta_{ij} p^2 - p_i p_j + \varepsilon_{ij}$ для данной моды n , U — скалярная комплексная амплитуда волнового пучка.

В плавно неоднородных средах вдали от особых точек или точек трансформации одних мод в другие распространение волновых пучков можно считать одномодовым и использовать только это уравнение. В дальнейшем ограничимся именно такой ситуацией и рассмотрим эволюцию широких в масштабе длины волны пучков, набранных из мод одного типа поляризации, в рамках скалярного уравнения (1), которое во многих случаях проще векторных уравнений Максвелла.

Зависимость оператора $\hat{H}$ от параметров в уравнении (1) представлена в самом общем виде. Операторы $\hat{\mathbf{r}}$ и $\hat{\mathbf{p}} = \nabla/(ik_0)$ не коммутируют, но они, очевидно, должны входить в оператор $\hat{H}$ в комбинации, обеспечивающей его эрмитовость в среде без поглощения.

В плавно неоднородных средах волновые пучки локализованы вблизи некоторой опорной кривой — траектории центра масс $\mathbf{r}_0(\tau)$. В бездиссипативной среде в качестве такой кривой естественно выбрать центральный геометрооптический луч пучка [11]. Поэтому разумно рассматривать решение уравнения (1) не во всём пространстве, а в некоторой малой окрестности этой траектории $\mathbf{r}_0(\tau)$. Однако, в отличие от [11], опорный луч не обязан быть геометрооптическим, хотя обычно и должен быть близок к нему [12].

Укажем некоторые базовые свойства криволинейной ортогональной системы координат, связанной с кривой $\mathbf{r}_0(\tau)$:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(\tau) + \mathbf{g}_1 \xi_1 + \mathbf{g}_2 \xi_2, \quad (2)$$

где единичные орты $\mathbf{g}_i(\tau)$ ($i = 1, 2$) перпендикулярны опорному лучу $\mathbf{r}_0(\tau)$ и переносятся вдоль него параллельно сами себе (в смысле Леви—Чевиты: $\dot{g}_i g_j = 0$), т. е. подчиняются уравнению

$$\dot{\mathbf{g}}_i = -(\mathbf{g}_i \dot{\boldsymbol{\ell}}) \boldsymbol{\ell}, \quad \boldsymbol{\ell} = \dot{\mathbf{r}}_0/|\dot{\mathbf{r}}_0|,$$

$\boldsymbol{\ell}$ — единичный вектор касательной к кривой $\mathbf{r}_0(\tau)$. Коэффициенты Ламэ такой криволинейной системы координат есть

$$h_{ij} = \delta_{ij}, \quad h_\tau = h \equiv \chi(1 - \Theta_i \xi_i), \quad \Theta_i = (\mathbf{g}_i \dot{\boldsymbol{\ell}})/\chi, \quad (3)$$

где $\chi = |\dot{\mathbf{r}}_0|$, $\boldsymbol{\Theta}$ — вектор кривизны. Из формул (3), в частности, следует, что сопутствующая система координат однозначно описывает точки пространства только при

$$\boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{\xi} < 1, \quad (4)$$

т. е. на расстояниях, меньших локального радиуса кривизны $R = 1/|\boldsymbol{\Theta}|$.

Особо отметим, что переход в криволинейную систему координат обоснован только для малой окрестности опорной кривой, т. е. на расстояниях, много меньших её радиуса кривизны. В противном случае возникают сложности, связанные с неоднозначностью определения координат точки в пространстве.

Во второй части [13] настоящего цикла работ был дан вывод эволюционного квазиоптического уравнения в предположении, что волновой пучок локализован вблизи некоторой опорной кривой $\mathbf{r}_0(\tau)$:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = h \left(\frac{\partial \hat{H}_0}{\partial p_\tau} \right)^{-1} \left[ik_0 \hat{H}_0[u] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{H}_0}{\partial p_\tau \partial \tau} [u] \right], \quad (5)$$

где

$$\hat{H}_0 = \hat{H} \left(\mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\xi}, \frac{(\chi p_\tau + \dot{\mathbf{q}} \boldsymbol{\xi})}{h} \boldsymbol{\ell}, \mathbf{q} + \frac{1}{ik_0} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right).$$

Часто изменение групповой скорости мало в поперечном сечении пучка и, проводя замену $u \rightarrow u/\sqrt{\chi}$, можно пользоваться значительно более простым уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = ik_0 \hat{H}_0[u]. \quad (6)$$

Заметим, что в рамках уравнения (6) в бездиссипативной среде сохраняется интеграл $W = \int |u|^2 d^2 \xi = \text{const}$, который, по существу, является полным потоком энергии в волновом пучке: $dW/d\tau = 0$. Вид интеграла такой же, как и в случае холодной плазмы [11].

2. БЕЗАБЕРРАЦИОННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В СРЕДАХ С ДИССИПАЦИЕЙ

Уравнение (5) имеет весьма общий характер и является достаточно сложным. Для его упрощения можно воспользоваться разложением оператора $\hat{H}$, предложенным в [10]:

$$\hat{H} = \sum_{m,n} \frac{1}{n!m!} \frac{\partial^{m+n} H}{\partial x^m \partial p^n} \{ \hat{x}^m, \hat{p}^n \}, \quad (7)$$

где $\{ \hat{x}^m, \hat{p}^n \} = (\hat{x}^m \hat{p}^n + \hat{p}^n \hat{x}^m)/2$ — эрмитова комбинация операторов $\hat{x}$ и $\hat{p}$. Здесь для краткости под $\hat{x}$ понимаются декартовы координаты, а под $\hat{p} = (ik_0)^{-1} \partial/\partial x$ — соответствующие импульсы. Символом H обозначен гамильтониан, понимаемый как функция.

Раскладывая оператор $\hat{H}$ в (5) в ряд Тейлора (7) и сохраняя члены до второго порядка малости по ξ и $\partial u/\partial \xi$ включительно, можно свести (5) к уравнению параболического типа [11]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{ik_0} \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{1}{2k_0^2} \frac{d^2 \mathcal{H}}{dq_i dq_j} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \frac{1}{2} \frac{d^2 \mathcal{H}}{d\xi_i d\xi_j} \xi_i \xi_j u + \frac{1}{ik_0} \frac{d^2 \mathcal{H}}{d\xi_i dq_j} \left(\xi_i \frac{\partial u}{\partial \xi_j} + \delta_{ij} \frac{u}{2} \right) + \\ + \mathcal{H} u + \frac{d\mathcal{H}}{d\xi_i} \xi_i u + \frac{1}{ik_0} \frac{d\mathcal{H}}{dq_i} \frac{\partial u}{\partial \xi_i} = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где полные производные есть

$$\frac{d\mathcal{H}}{dq_i} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}, \quad \frac{d\mathcal{H}}{d\xi_i} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi_i} - \frac{1}{\chi} \frac{\partial H}{\partial \xi_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\tau}, \quad (9)$$

$$\frac{d^2 \mathcal{H}}{dq_i dq_j} = \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q_i \partial q_j}, \quad \frac{d^2 \mathcal{H}}{d\xi_i dq_j} = \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \xi_i \partial q_j} - \frac{1}{\chi} \frac{\partial H}{\partial \xi_i} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_\tau \partial q_j}, \quad (10)$$

$$\frac{d^2 \mathcal{H}}{d\xi_i d\xi_j} = \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \frac{1}{\chi^2} \frac{\partial H}{\partial \xi_i} \frac{\partial H}{\partial \xi_j} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_\tau^2} - \frac{\partial H}{\partial \xi_i} \left(\frac{2}{\chi} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \xi_j \partial p_\tau} - 2\Theta_j \right). \quad (11)$$

Здесь символом $\mathcal{H} = H + iG$ обозначен комплексный геометрооптический гамильтониан, понимаемый как комплексная функция координат и импульсов в отличие от H — обычного действительного геометрооптического гамильтониана, используемого в средах без диссипации. Все производные берутся на опорном луче.

В бездиссипативной среде ($G = 0$) последние три слагаемых в уравнении (8) на геометрикооптическом луче равны нулю в силу обращения в нуль первых полных производных $d\mathcal{H}/dq_i$ (благодаря выбору системы координат) и $d\mathcal{H}/d\xi_i$ (из-за отсутствия антиэрмитовой части в $\mathcal{H} = H \equiv 0$).

Уравнение (8) называют безабберационным, поскольку оно сохраняет неизменной форму гауссового пучка, т. е. не вносит аббераций. Оно привлекательно с позиций численного моделирования, т. к. его решение может быть сведено к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений с вычислением последующей интегральной свёртки для пучков с произвольной формой.

Уравнение (8) удобно также и своей наглядностью: оно представляет собой «традиционное» параболическое уравнение, все члены которого имеют простой физический смысл: $\partial_\tau u$ отражает медленные изменения волнового пучка вдоль луча¹; $d^2\mathcal{H}/(dq_i dq_j) \partial_{\xi_i \xi_j}^2 u$ описывает анизотропную дифракцию; слагаемое при коэффициенте $d^2\mathcal{H}/(d\xi_i d\xi_j)$ отвечает за растяжение и/или сжатие и скос пучка, $d^2\mathcal{H}/(d\xi_i d\xi_j) \xi_i \xi_j u$ учитывает влияние неоднородности параметров среды, т. е. рефракцию.

В диссипативной среде последние три слагаемых в уравнении (8) уже не будут равны нулю. Они определяются антиэрмитовой частью гамильтониана и её производными на геометрикооптическом луче и имеют следующий вид:

$$\dots + iGu + i\xi_i u \left(\frac{\partial G}{\partial \xi_i} - \frac{1}{\chi} \frac{\partial H}{\partial \xi_i} \frac{\partial G}{\partial p_\tau} \right) + \frac{1}{k_0} \frac{\partial G}{\partial q_i} \frac{\partial u}{\partial \xi_i}. \quad (12)$$

Физический смысл этих диссипативных членов ясен: слагаемое $iG(\tau)u$ описывает однородное в поперечном направлении поглощение, определённое на опорном луче, $i\xi (\partial G/\partial \xi) u$ и $i(\partial G/\partial p) \times (\partial u/\partial \xi)$ учитывают неоднородность поглощения по пространственным координатам и волновым векторам соответственно. Влияние последних двух слагаемых, в отличие от поглощения по центральному лучу [6, 7, 14], до сих пор при описании распространения пучков в диссипативной среде не рассматривалось. В то же время существуют ситуации, например, в области электронно-циклотронного резонанса, когда, несмотря на относительно слабое поглощение ($G \ll 1$), величины производных $\partial G/\partial \xi$ и $\partial G/\partial q$ могут быть велики [15, 16].

Член $\xi_i (\partial G/\partial \xi) u$ приводит к более сильному затуханию пучка, с одной стороны, и, как следствие, к смещению его «центра масс». Член $(\partial G/\partial p) (\partial u/\partial \xi)$ делает то же самое, но в спектральной области. В координатном пространстве это приводит к отклонению пучка от опорной (геометрооптической) кривой за счёт смещения «центра масс» в спектральной области. В магнитоактивной плазме присутствуют оба эти члена и, следовательно, динамика распространения пучка будет существенно зависеть от его ширины. Для широких пучков преобладающим является член $\xi \partial G/\partial \xi$ и, как следствие, будет превалировать сдвиг «центра масс» пучка. Наоборот, для узких пучков доминирующий член — это $(\partial G/\partial q) (\partial u/\partial \xi)$, отклоняющий (отворачивающий) траекторию «центра масс» пучка от опорной кривой.

2.1. Гауссов пучок

Проиллюстрируем сказанное выше на примере гауссова пучка

$$u = A \exp(-ik_0 \sigma_{ij} \xi_i \xi_j / 2 + ik_0 \kappa_i \xi_i) \quad (13)$$

¹ Напомню, что везде зависимость от продольной переменной τ более слабая в сравнении с зависимостью от поперечных координат ξ .

с комплексной амплитудой $A(\tau)$ и комплексной шириной $\sigma_{ij}(\tau) = \sigma_{ji}(\tau)$. Величина $\kappa_i(\tau)$ характеризует смещения «центра масс» пучка $\delta\xi_i = (\text{Im } \sigma_{ij})^{-1} \text{Im } \kappa_j$ и его «центрального» волнового вектора $\delta q_i = \text{Re } \kappa_i$ от опорной геометрооптической кривой.

Отмечу, что в диссипативной среде, в отличие от бездиссипативной [17, 18], функции Эрмита, т. е. произведение полиномов Эрмита на гауссов профиль, уже не являются решениями безаберрационного уравнения. Из-за неоднородного поглощения уравнения для полиномов n -й степени связаны с уравнениями для полиномов меньших степеней. Исключением является полином нулевой степени, описывающий гауссов пучок. Точнее говоря, это верно для полиномов Эрмита от действительного аргумента. Аналитическое продолжение полиномов Эрмита на случай комплексного аргумента может быть решением уравнения (8).

Подставляя (13) в (8), нетрудно получить систему обыкновенных дифференциальных уравнений для параметров гауссового пучка:

$$\frac{d\sigma_{ij}}{d\tau} = \frac{d^2\mathcal{H}}{d\xi_i d\xi_j} - \frac{d^2\mathcal{H}}{dq_m dq_n} \sigma_{im} \sigma_{jn} + \frac{d^2\mathcal{H}}{d\xi_i dq_m} \sigma_{mj}, \quad (14)$$

$$\frac{d\kappa_i}{d\tau} = \frac{1}{2} \frac{d^2\mathcal{H}}{dq_m dq_n} (\kappa_m \sigma_{ni} + \kappa_n \sigma_{mi}) - \frac{d^2\mathcal{H}}{d\xi_i dq_m} \kappa_m + \frac{d\mathcal{H}}{dq_m} \sigma_{mi} - \frac{d\mathcal{H}}{d\xi_i}, \quad (15)$$

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{d\tau} = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\mathcal{H}}{dq_m dq_n} \sigma_{mn} - \frac{d^2\mathcal{H}}{d\xi_m dq_m} \right) + ik_0 \left(\mathcal{H} + \frac{d\mathcal{H}}{dq_m} \kappa_m + \frac{1}{2} \frac{d^2\mathcal{H}}{dq_m dq_n} \kappa_m \kappa_n \right). \quad (16)$$

Как и в средах без поглощения [17, 18], уравнение (16) для амплитуды A отделяется в силу линейности (8). Как и следовало ожидать, член, учитывающий однородное поглощение по опорному лучу, т. е. $ik_0\mathcal{H} = -k_0G$, вошёл только в уравнение (16) для амплитуды A . Слагаемые $\partial\mathcal{H}/\partial\xi_i$ и $\partial\mathcal{H}/\partial q_i$ приводят к смещению пучка, т. е. изменению величины κ_i и входят в уравнение (15) в различном виде. Член с $\partial\mathcal{H}/\partial\xi_i = i\partial G/\partial\xi_i$ (чисто мнимое слагаемое) отвечает за сдвиг пучка в координатном пространстве. Член с $\partial\mathcal{H}/\partial q_m$ (комплексный из-за умножения на σ_{mi}) определяет, в первую очередь, поворот пучка, т. е. «спектральный» сдвиг.

Заметим, что первые производные от диссипативных членов не влияют на ширину пучка σ_{ij} , т. е. не входят в (14). Однако квадратичные по ξ и q производные от $G(\xi, q)$ приводят и к изменению ширины пучка. При этом пространственная неоднородность (член с $d^2\mathcal{H}/(d\xi_i d\xi_j)$) обычно² вызывает возрастание мнимой части σ_{ij} , т. е. обужение пучка. Спектральная же неоднородность (член с $d^2\mathcal{H}/(dq_m dq_n)$), как правило, ведёт к обужению пространственного спектра, т. е. к дополнительному пространственному уширению пучка.

2.2. Общее решение

Аналогичным образом можно написать решение для произвольного граничного распределения поля при $\tau = 0$. Действительно, уравнение (8) не вносит в пучок фазовых коррекций выше квадратичной. Поэтому его общее решение имеет смысл искать в виде

$$u(\xi, \tau) = A \int u_{\kappa} \exp \left[ik_0 (\kappa_i \xi_i + \zeta_i \kappa_i) - \frac{ik_0}{2} (\sigma_{ij} \xi_i \xi_j + 2\beta_{ij} \xi_i \kappa_j + \alpha_{ij} \kappa_i \kappa_j) \right] d^3\kappa, \quad (17)$$

где $u_{\kappa} = \int u(\xi, 0) \exp(ik_0\kappa\xi) d^3\xi$ — фурье-спектр начального распределения поля по поперечным координатам. Коэффициенты A , σ_{ij} и κ_i подчиняются полученным ранее уравнениям (14)–(16).

² В применении к плазме токамаков и стеллараторов.

Уравнения для остальных коэффициентов имеют следующий вид:

$$\frac{d\beta_{ij}}{d\tau} = \frac{d^2\mathcal{H}}{dq_m dq_n} (\sigma_{mi}\beta_{nj} + \sigma_{ni}\beta_{mj}) - \frac{d^2\mathcal{H}}{d\xi_i dq_m} \beta_{mj}, \quad (18)$$

$$\frac{d\alpha_{ij}}{d\tau} = \frac{d^2\mathcal{H}}{dq_m dq_n} \beta_{mi}\beta_{nj}, \quad (19)$$

$$\frac{d\zeta_i}{d\tau} = \frac{1}{2} \frac{d^2\mathcal{H}}{dq_m dq_n} (\beta_{ni}\kappa_m + \beta_{mi}\kappa_n) + \frac{d\mathcal{H}}{dq_m} \beta_{mi}. \quad (20)$$

Уравнения (14)–(16) и (18)–(20) следует дополнить начальными условиями при $\tau = 0$, обеспечивающими в этой точке тождественное преобразование функции саму в себя:

$$\sigma_{ij} = 0, \quad \beta_{ij} = \delta_{ij}, \quad \alpha_{ij} = 0, \quad \kappa_i = 0, \quad \zeta_i = 0. \quad (21)$$

Формула (17) позволяет легко найти распределение поля в диссипативной среде для произвольного граничного распределения $u(\xi, 0)$. Однако, при практическом её использовании следует помнить об ограничениях исходного безабберационного приближения (8).

2.3. Ограничения

Введение диссипативных членов в форме разложения (12) налагает определённые ограничения, которые связаны с тем, что только достаточно плавная на поперечном пространственном масштабе пучка диссипация может быть аппроксимирована линейным или параболическим образом. В то же время в области электронно-циклотронного резонанса, часто используемой для дополнительного нагрева плазмы в установках управляемого термоядерного синтеза, напротив, характерно резкое нарастание коэффициента поглощения. В этом случае типична ситуация, изображённая на рис. 1. Из-за резких градиентов коэффициента поглощения G линейная аппроксимация, использованная в уравнении (12), оказывается неприменимой.

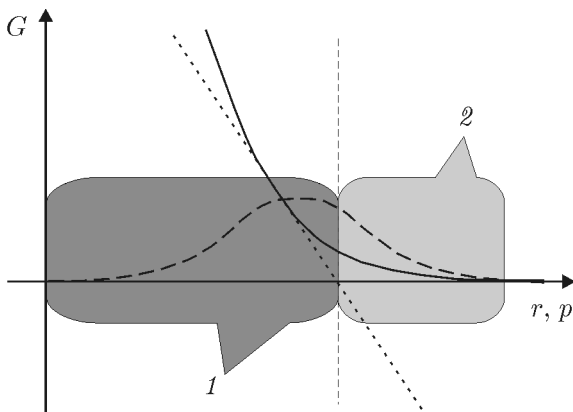


Рис. 1. Линейная аппроксимация поглощения: 1 — поглощение, 2 — усиление. Здесь сплошная линия соответствует реальному профилю поглощения, штриховая — линейной аппроксимации, пунктирная — профилю импульса

Действительно, в результате её применения в «левой» части пучка имеет место затухание ($G > 0$), а в правой, наоборот, происходит нефизический рост амплитуды пучка ($G < 0$). Малость изменения затухания на масштабе пучка может быть достигнута (по крайней мере, численно) за счёт уменьшения диаметра пучка. Однако, это приводит к увеличению спектральной ширины пучка, т. е. члена $(\partial G / \partial \xi) (\partial u / \partial p)$ в (12), что обычно вновь нарушает условия применимости.

Включение в параболическое уравнение следующих членов разложения оператора $\hat{G}$ приведёт к необходимости учёта членов того же порядка и в разложении действительной части $\hat{H}$, т. е. аббераций третьего и более высоких порядков. В этом случае целесообразнее вновь рассмотреть «исходное» уравнение (5).

Следует отметить, что ситуация, изображённая на рис. 1, конечно же не удовлетворяет условиям применимости уравнения (8). По сравнению с бездиссипативным случаем ошибка здесь

вносится не в фазу пучка (которая может быть скорректирована по трассе или специальными корректорами), а в его амплитуду. В результате ошибка решения нарастает экспоненциально быстро.

3. УЧЁТ НЕОДНОРОДНОСТИ И ДИСПЕРСИИ ПОГЛОЩЕНИЯ НА ОСНОВЕ БЕЗАБЕРРАЦИОННОГО РЕШЕНИЯ

Итак, для корректного учёта поглощения в рамках безабберрационного приближения следует использовать поглощение на опорном геометрооптическом луче, а не его разложения в поперечной плоскости. Как следствие, огибающая пучка при распространении в диссипативной среде принимает вид произведения огибающей пучка u_H , найденной в отсутствие поглощения, на некоторый множитель $\Gamma(\tau)$:

$$u = u_H(\boldsymbol{\xi}, \tau) \Gamma(\tau), \quad \Gamma(\tau) = \exp \left\{ -k_0 \int G[\mathbf{r}_0(\tau), \mathbf{p}_0(\tau)] d\tau \right\}. \quad (22)$$

Поскольку решение оказалось факторизованным, множитель Γ можно выбрать более точно. Например, можно учесть направление градиента поглощения $\mathbf{n} = \nabla G$, т. е. заменить

$$\Gamma(\tau) \rightarrow \Gamma[\mathbf{n}(\tau)\boldsymbol{\xi} + \mathbf{n}(\tau)\ell\tau].$$

Именно такой способ расчёта поглощения используется в классическом методе трассировки пучка (beam tracing, см. [7, 9]).

Однако можно пойти дальше и разрешить множителю Γ меняться в поперечном сечении, учитывая реальную неоднородность поглощения в среде, т. е. положить

$$\Gamma(\boldsymbol{\xi}, \tau) = \exp \left[-k_0 \int G(\mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\xi}, \mathbf{p}_0, \tau) d\tau \right]. \quad (23)$$

Тем самым автоматически решается и проблема правильной ориентации направления роста поглощения. Ценой этого является необходимость определения поглощения вдоль многих лучей, идущих параллельно опорному. В какой-то мере такой способ расчёта реализован в [5]. Следует отметить, что этот метод учёта поглощения не полностью описывает пространственные абберрации: например, в его рамках теряется эффект дифракционного затекания [19]. Причина в том, что в решении (22) не учитывается влияние неоднородного поглощения на распространение непоглощённой части пучка. Тем не менее приближение (23) заведомо выходит за рамки безабберрационного приближения и позволяет более точно учесть эффекты неоднородности.

Естественное обобщение (23) на случай сильной пространственной дисперсии поглощения состоит в введении множителя $\Gamma_{\mathbf{q}}$, зависящего от волновых векторов:

$$\Gamma_{\mathbf{q}}(\tau) = \exp \left\{ -k_0 \int G[\mathbf{r}_0(\tau), \mathbf{p}_0(\tau) + \mathbf{q}] d\tau \right\},$$

который действует на решение u_H в фурье-пространстве:

$$u = \frac{1}{4\pi^2} \int u_H(\boldsymbol{\xi}', \tau) \Gamma_{\mathbf{q}}(\tau) \exp[i\mathbf{q}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}')] d^2q d^2\xi'. \quad (24)$$

В ряде случаев пространственная дисперсия существенна только вдоль одного из направлений, например ξ_1 , в то время как вдоль другого направления преобладает неоднородность поглощения. В такой ситуации выражение (24) легко обобщается и принимает вид

$$u = \frac{1}{2\pi} \int u_H(\mathbf{g}_1\xi'_1 + \mathbf{g}_2\xi_2, \tau) \Gamma_{\text{EC}}(\xi_2, q_1, \tau) \exp[iq_1(\xi_1 - \xi'_1)] dq_1 d\xi'_1, \quad (25)$$

где $\Gamma_{\text{EC}}(\xi_2, q_1, \tau) = \exp\{-k_0 \int G[\mathbf{r}_0(\tau) + \mathbf{g}_2(\tau)\xi_2, \mathbf{p}_0 + \mathbf{g}_1(\tau)q_1] d\tau\}$. Именно такая ситуация имеет место в магнитоактивной плазме токамаков и стеллараторов в окрестности электронно-циклотронного резонанса.

Однако, численная сложность расчёта поглощения таким способом ничуть не меньше, чем сложность решения исходного квазиоптического уравнения (6).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе показана связь эволюционного квазиоптического уравнения с безабберационным, т. е. сохраняющим неизменной форму гауссова пучка, уравнением для волновых пучков. Для последнего написано общее решение, пригодное и для сред с диссипацией, и явно выписаны условия его применимости. Безабберационное уравнение привлекательно с позиций численного моделирования, поскольку его численное решение сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Описаны способы учёта диссипативных абберационных эффектов в рамках безабберационного приближения.

Работы выполнены при поддержке РФФИ (гранты 12-02-00648-а и 11-02-00403-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zohm H. // Proc. 13th Joint Workshop on Electron Cyclotron Emission and Electron Cyclotron Heating. 2005. P. 133.
2. Takahashi K., Kobayashi N., Kasugai A., Sakamoto K. // J. Phys. Conf. Ser. 2005. V. 25. P. 75.
3. Takahashi K., Kobayashi N., Ohmori J., et al. // Fusion Sci. Techn. 2007. V. 52. P. 266.
4. Mazzucato E. // Phys. Fluids B. 1989. V. 1. P. 1855.
5. Farina D. // Fusion Sci. Technol. 2007. V. 52. P. 154.
6. Pereverzev G. V. // Rev. Plasma Phys. 1996. V. 19. P. 1.
7. Pereverzev G. V. // Phys. Plasmas. 1998. V. 5. P. 3529.
8. Prater R., Farina D., Gribov Yu., et al. // Nucl. Fusion. 2008. V. 48. Art. no. 035006.
9. Maj O., Balakin A. A., Poli E. // Plasma Phys. Control. Fusion. 2010. V. 52. Art. no. 085006.
10. Балакин А. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 2012. Т. 55, № 7. С. 521.
11. Балакин А. А., Балакина М. А., Смирнов А. И., Пермитин Г. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 2007. Т. 50. С. 1058.
12. Balakin A. A., Balakina M. A., Westerhof E. // Nuclear Fusion. 2008. V. 48. Art. no. 065003.
13. Балакин А. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 2012. Т. 55. С. 555.
14. Тимофеев А. В. // УФН. 2005. Т. 175. С. 637.
15. Westerhof E., Tokman M. D., Gavrilova M. A. // Plasma Phys. Control. Fusion. 2000. V. 42. P. 91.
16. Westerhof E., Tokman M. D., Gavrilova M. A. // Fusion Engineering and Design. 2001. V. 53. P. 47.
17. Пермитин Г. В., Смирнов А. И. // ЖЭТФ. 1996. Т. 109. С. 736.
18. Пермитин Г. В., Смирнов А. И. // ЖЭТФ. 2001. Т. 119. С. 16.
19. Балакин А. А., Балакина М. А., Смирнов А. И., Пермитин Г. В. // Физика плазмы. 2008. Т. 34. С. 486.

Поступила в редакцию 10 сентября 2012 г.; принята в печать 30 сентября 2012 г.

**WAVE BEAMS IN SMOOTHLY INHOMOGENEOUS ANISOTROPIC MEDIA:
ABERRATION-FREE APPROXIMATION (PART III)***A. A. Balakin*

In this series of papers, we propose a method for development of an approximate solution of the Maxwell equations in smoothly inhomogeneous anisotropic gyrotropic media with allowance for aberrations, spatial dispersion, and absorption. Evolution equations for wave beams have been obtained, and a method for solving them numerically, developed. The connection of the quasi-optical evolution equation with the aberration-free equations for wave beams has been shown, and the general solution of the latter has been found. The applicability conditions for the aberration-free equation have been written explicitly. The methods of allowing for dissipative aberration effects in the framework of the aberration-free approximation are described.