

УДК 537.87+535.012+533.9

ВОЛНОВЫЕ ПУЧКИ В ПЛАВНО НЕОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ: КВАЗИОПТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ (ЧАСТЬ 2)

А. А. Балажин

Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород, Россия

В данном цикле работ предложен метод построения приближённого решения уравнений Максвелла в плавно неоднородных анизотропных гиротропных средах с учётом аббераций, пространственной дисперсии и поглощения. Получены эволюционные уравнения для волновых пучков и разработана методика их численного решения. Показана их связь с уравнениями безабберационного приближения. Во второй части проведён вывод эволюционного квазиоптического уравнения для волновых пучков и предложена методика его численного решения.

ВВЕДЕНИЕ

Целью настоящего цикла работ является обобщение квазиоптики на плавно неоднородные анизотропные и гиротропные среды с диссипацией. Одним из важнейших примеров таких сред является магнитоактивная плазма ионосферы и магнитосферы Земли, а также плазма в установках управляемого термоядерного синтеза. Распространение волновых пучков в поглощающих средах относится в настоящее время к одной из немногих «недоисследованных» областей в физике линейных волновых процессов. Вместе с тем актуальность этой задачи очевидна для целого ряда направлений практической деятельности и, в частности, для осуществления управляемого термоядерного синтеза [1–3].

Существующие методы численного моделирования распространения микроволнового излучения в плазме, в лучшем случае, ограничены расчётом системы геометрооптических лучей [4, 5] или квазиоптикой гауссовых пучков с определением поглощения по центральному лучу [6, 7]. Хотя и было проведено тщательно сравнение этих кодов друг с другом [8], ни один из них не способен правильно описать распространение пучка в средах с сильной пространственной дисперсией, характерной для области электронно-циклотронного резонанса [9]. При этом либо не учитываются дифракционные эффекты и пространственная дисперсия среды, либо исключается из рассмотрения влияние неоднородности и нелокальности поглощения на распространение волнового пучка.

В данной работе предложено новое эволюционное уравнение, описывающее распространение квазиоптических волновых пучков в анизотропных плавно неоднородных средах с пространственной дисперсией. Оно определяет комплексную амплитуду скалярного поля и получается разложением скалярного уравнения [10] в приближении медленности изменения комплексной амплитуды скалярного поля вдоль некоторого опорного луча. Предложен метод его численного решения.

1. МЕТОД ПЛАВНОЙ ОГИБАЮЩЕЙ

В оптике и радиофизике часто используется подход, основанный на разложении уравнения Гельмгольца

$$\Delta U + k_0^2 \varepsilon(\mathbf{r})U = 0, \quad (1)$$

где $k_0 = \omega/c$, для плавной огибающей, называемый методом Леонтовича [11, 12]. Граничные условия для амплитуды U и её производной по нормали, $\mathbf{n} \nabla U$, считаются заданными на некоторой

плоскости $\ell(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$ и равными нулю на бесконечности. Начнём со случая однородной среды с $\varepsilon = 1$. Тогда, представляя поле в виде $U = u(\mathbf{r}) \exp(ik_0 z)$, получаем

$$\underbrace{\left[\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right]}_{1/\Lambda_{\parallel}^2} + \underbrace{2ik_0 \frac{\partial u}{\partial z}}_{1/\lambda \Lambda_{\parallel}} + \underbrace{\Delta_{\perp} u}_{1/\Lambda_{\perp}^2} = 0. \quad (2)$$

Соотношение (2) полностью эквивалентно уравнению Гельмгольца. Однако для волновых пучков, вытянутых вдоль z ($\Lambda_{\parallel} \gg \Lambda_{\perp} \gg \lambda$), можно пренебречь членом, заключённым в квадратные скобки. Здесь Λ_{\parallel} и Λ_{\perp} — характерные масштабы пучка вдоль и поперёк направления распространения, $\lambda = 2\pi/k_0$ — длина волны. В результате получается параболическое уравнение с мнимым коэффициентом диффузии:

$$2ik_0 \frac{\partial u}{\partial z} = -\Delta_{\perp} u. \quad (3)$$

Из (3) следует, что продольные и поперечные масштабы огибающей пучка согласованы друг с другом. Для них выполняется соотношение, которое принято называть френелевским: $\Lambda_{\perp}^2 \sim \sim \lambda \Lambda_{\parallel}$. Отметим, что Λ_{\perp} и Λ_{\parallel} определяются не только распределением интенсивности в пучке, но и его фазовой структурой. Например, вдали от фокальных перетяжек одним из продольных масштабов является радиус кривизны фазового фронта R_u и $\Lambda_{\parallel} \sim R_u$. При этом поперечный масштаб фазовой структуры равен $\Lambda_{\perp} \sim \sqrt{\lambda R_u}$.

У этого подхода есть свои достоинства и недостатки. Во-первых, уравнение для комплексной огибающей волнового пучка u получилось не привязанным к его «центру масс». Во-вторых, уравнение (3) позволяет учесть диссипацию в среде, наличие аббераций формы пучка, каустик и пр. Тем самым исключаются проблемы поиска траектории центра масс геометрикооптического волнового пучка (луча) в сложных диссипативных средах. Вся информация для определения огибающей содержится непосредственно в уравнении (3). Кроме того, его обобщение на случай анизотропных сред и нелинейных сред с дисперсией не представляет сложности [13, 14].

Однако уравнение (3) обладает довольно существенным недостатком. Оно хорошо описывает поле только в приосевой области, а на периферии приводит к значительным амплитудно-фазовым погрешностям. Этот недостаток можно исправить, если модифицировать метод Леонтовича и представить дифференциальный оператор (2) в факторизованном виде [15] как произведение операторов, соответствующих волнам, распространяющимся вдоль оси z в прямом и в обратном направлениях:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2ik_0 \frac{\partial}{\partial z} + \Delta_{\perp} = \left(\frac{\partial}{\partial z} + ik_0 + i\sqrt{k_0^2 + \Delta_{\perp}} \right) \left(\frac{\partial}{\partial z} + ik_0 - i\sqrt{k_0^2 + \Delta_{\perp}} \right).$$

Если учитывать волны, распространяющиеся только вправо, то получается наиболее общая для (1) форма уравнения для огибающей:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + ik_0 - i\sqrt{k_0^2 + \Delta_{\perp}} \right) u = 0. \quad (4)$$

Соотношение (4) содержит так называемый псевдодифференциальный оператор. Смысл имеет только его разложение в ряд Тейлора,¹ которое с точностью до членов четвёртого порядка ма-

¹ В фурье-пространстве действие этого оператора сводится к умножению спектра огибающей на функцию $f(\mathbf{k}) = \sqrt{k_0^2 - k^2}$. Однако эта процедура корректна только в области аналитичности функции $f(\mathbf{k})$, т. е. в области существования ряда Тейлора этой функции. Такой подход в случае однородной среды близок к используемому в [16].

лости по λ/Λ_{\perp} приводит к уравнению

$$2ik_0 \frac{\partial u}{\partial z} = -\Delta_{\perp} u + \frac{1}{4k_0^2} \Delta_{\perp}^2 u + \dots \quad (5)$$

В квазиоптике уравнение (3) принято называть уравнением безабберационного приближения, поскольку оно допускает преобразования координат и поля идеальной тонкой линзой [17]. Уравнение (5) позволяет учесть сферические aberrации. В принципе, можно учесть и aberrации более высокого порядка, удерживая следующие члены разложения корня в (4). Однако при этом надо соблюдать определённую осторожность, т. к. эта процедура по своей сути является асимптотической.

Уравнение (5) можно получить и другим способом, более удобным при рассмотрении распространения пучков в сложных (анизотропных или неоднородных) средах. Действительно, считая член $\partial^2 u / \partial z^2$ в уравнении (2) малым, можно представить его в виде производной от членов в правой части квазиоптического уравнения (от $\Delta_{\perp} u$ в случае (3)). В последнем можно вновь использовать квазиоптическое уравнение для исключения явной производной $\partial u / \partial z$. В результате получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \approx \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{i}{2k_0} \Delta_{\perp} u \right) = -\frac{1}{4k_0^2} \Delta_{\perp}^2 u, \quad (6)$$

что вновь приводит нас к уравнению (5).

В неоднородной среде всё ещё можно пользоваться разложением (2) вдоль заданной оси z , если степень неоднородности слабая, т. е. $\varepsilon(\mathbf{r}) - 1 \ll 1$. Однако часто имеет место отклонение пучка как целого, что с некоторого момента приводит к нарушению приближения $\Lambda_{\parallel} \gg \lambda$. В этом случае удобно переписать уравнение в криволинейной системе координат, привязанной к некоторому лучу. Такая ситуация имеет место, например, в плавно неоднородных средах [18], когда волновые пучки локализованы вблизи некоторой опорной кривой $\mathbf{r}_0(\tau)$, где τ — параметр, зависящий от длины дуги. В бездиссипативной среде в качестве такой кривой естественно выбрать центральный геометрооптический луч пучка.

Введём некоторые базовые свойства криволинейной ортогональной системы координат (рис. 1), связанной с кривой $\mathbf{r}_0(\tau)$:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(\tau) + \mathbf{g}_1 \xi_1 + \mathbf{g}_2 \xi_2, \quad (7)$$

где единичные орты $\mathbf{g}_i(\tau)$ ($i = 1, 2$) перпендикулярны опорному лучу $\mathbf{r}_0(\tau)$ и переносятся вдоль него параллельно сами себе (в смысле Леви—Чевита: $\dot{g}_i g_j = 0$), т. е. подчиняются уравнению

$$\dot{\mathbf{g}}_i = -(\mathbf{g}_i \dot{\boldsymbol{\ell}}) \boldsymbol{\ell}, \quad \boldsymbol{\ell} = \dot{\mathbf{r}}_0 / |\dot{\mathbf{r}}_0|,$$

где $\boldsymbol{\ell}$ — единичный вектор касательной к кривой $\mathbf{r}_0(\tau)$. Коэффициенты Ламэ такой криволинейной системы координат

$$h_{ij} = \delta_{ij}, \quad h_{\tau} = h \equiv \chi(1 - \Theta_i \xi_i), \quad \Theta_i = (\mathbf{g}_i \dot{\boldsymbol{\ell}}) / \chi, \quad (8)$$

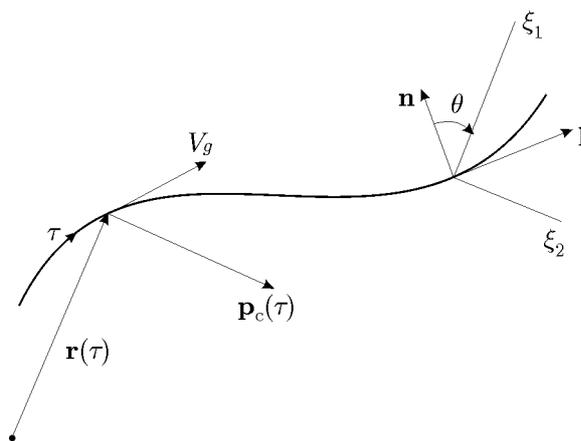


Рис. 1. Опорный луч и сопутствующая пучку система координат (τ, ξ_1, ξ_2)

где $\chi = |\dot{\mathbf{r}}_0|$, Θ — вектор кривизны. Из формул (8), в частности, следует, что сопутствующая система координат однозначно описывает точки пространства только при

$$\Theta \xi < 1, \quad (9)$$

т. е. на расстояниях, меньших локального радиуса кривизны $R = 1/|\Theta|$.

Особо отметим, что переход в криволинейную систему координат обоснован только для малой окрестности опорной кривой, на расстояниях, много меньших её радиуса кривизны. В противном случае возникают сложности, связанные с неоднозначностью определения координат точки в пространстве.

Перед переходом в связанную с кривой $\mathbf{r}_0(\tau)$ криволинейную ортогональную систему координат введём комплексную огибающую поля волнового пучка U , выделив в нём быстро осциллирующий множитель:

$$U = u(\boldsymbol{\xi}, \tau) \exp(ik_0\Psi), \quad \Psi = \int \chi(\tau)f(\tau) d\tau. \quad (10)$$

В результате уравнение (1) в сопутствующей системе координат примет вид

$$\frac{2ik_0\chi f}{h^2} \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i \partial \xi_i} + k_0^2 \left(\varepsilon - \frac{\chi^2}{h^2} f^2 \right) u + \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \left[\frac{1}{h^3} \frac{\partial h}{\partial \tau} \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{ik_0\chi f u}{h^3} \frac{\partial h}{\partial \tau} + \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial \xi_i} \frac{\partial u}{\partial \xi_i} \right] = 0.$$

Члены в квадратных скобках малы, если рассматривается область пространства $|\Theta_i \xi_i| \ll 1$, т. е. выбранный опорный луч достаточно плавный. Полагая изменение поля вдоль луча плавным, можно пренебречь² членом $\partial^2 u / \partial \tau^2$. Наконец, выбирая $f^2 = \varepsilon[\mathbf{r}_0(\tau)]$, можно минимизировать влияние члена $(\varepsilon - f^2)u$. В результате получаем следующее уравнение

$$\frac{2ik_0 \sqrt{\varepsilon(\mathbf{r}_0)}}{1 - \Theta_i \xi_i} \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i^2} + k_0^2 \left[\varepsilon(\mathbf{r}) - \frac{\varepsilon(\mathbf{r}_0)}{1 - \Theta_i \xi_i} \right] u = 0. \quad (11)$$

Отметим, что при выводе (11) не налагалось никаких ограничений на вид опорного луча, кроме требований его плавности (для обеспечения большого радиуса кривизны) и «близости» к волновому пучку (для возможности пренебрежения членом $\partial^2 u / \partial \tau^2$).

В среде без диссипации выбор опорного луча соответствующим геометрикооптическому лучу центра масс пучка приводит к обращению в ноль выражения $(\partial \varepsilon / \partial \boldsymbol{\xi} - \Theta \varepsilon)|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} = 0$ на луче, что позволяет исключить отклонение пучка как целого от опорного луча. Более того, можно заметить, что в изотропной среде на геометрикооптическом луче

$$\chi f = \chi \sqrt{\varepsilon} \equiv \chi p_0 \equiv \mathbf{p}_0 \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}},$$

где $H \equiv p^2 - \varepsilon(\mathbf{r})$ — геометрикооптический гамильтониан среды. При этом последнее выражение сохраняет свой вид и в случае анизотропной среды [19]. Более того, при таком определении выражение (10) формально совпадает с геометрикооптическим решением [20].

Надо отметить, что фаза в (10) всё ещё остаётся функцией только продольной координаты τ . В общем случае ничего не мешает включить в неё линейные, квадратичные и т. д. члены от поперечных координат:

$$\Psi = \chi f + q_i(\tau) \xi_i + \sigma_{ij} \xi_i \xi_j + \dots$$

² Возможность учёта его влияния аналогична учёту члена $\partial^2 u / \partial z^2$ в (6).

Такая замена приводит к появлению в уравнении (11) членов

$$-\frac{2uk_0\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r}_0)}}{1-\Theta_i\xi_i}(\dot{q}_i\xi_i+\dot{\sigma}_{ij}\xi_i\xi_j)u+2i(q_i+\sigma_{ij}\xi_j)\frac{\partial u}{\partial\xi_i}+iu\sigma_{ii}-(q_i+\sigma_{ij}\xi_j)^2u,$$

отклоняющих пучок как целое (члены с q_i), фокусирующие пучок (члены с σ_{ij}) и т. д. Более того, выбор геометрооптического луча в качестве опорного и коэффициентов σ_{ij} в соответствии с формулой

$$\frac{d\sigma_{ij}}{d\tau}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_i\partial x_j}+\sigma_{jk}\frac{\partial^2 H}{\partial x_i\partial p_k}+\sigma_{ik}\frac{\partial^2 H}{\partial x_j\partial p_k}+\sigma_{ik}\sigma_{lj}\frac{\partial^2 H}{\partial p_k\partial p_l}\right) \quad (12)$$

позволяет полностью занулить линейные и квадратичные по ξ члены в разложении уравнения по поперечным координатам [18, 19]. Параболическое разложение фазы позволяет описывать распространение и дифракцию гауссовых пучков, основываясь на решении системы обыкновенных дифференциальных уравнений (12). В англоязычной литературе данный метод называют beam tracing [7].

2. КВАЗИОПТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

В первой части цикла [10] было показано, что приближённое решение уравнений Максвелла можно искать в виде

$$E_j = \hat{e}_j[U], \quad (13)$$

где $\hat{H}[U] = 0$, \hat{H} и \hat{e}_j — операторы, соответствующие собственному значению $H^{(n)} = e_i^{(n)*} L_{ij} e_j^{(n)}$ и собственному вектору $\mathbf{e}^{(n)}$ матрицы $L_{ij} = \delta_{ij} p^2 - p_i p_j + \varepsilon_{ij}$ для данной моды n .

В плавно неоднородных средах вдали от особых точек или точек трансформации одних мод в другие распространение волновых пучков можно считать одномодовым и использовать только это уравнение. В дальнейшем ограничимся именно такой ситуацией и рассмотрим эволюцию широких в масштабе длины волны пучков, набранных из мод одного типа поляризации, в рамках скалярного уравнения (13), которое во многих случаях проще векторных уравнений Максвелла.

Зависимость оператора \hat{H} от параметров в уравнении (13) представлена в самом общем виде. Операторы $\hat{\mathbf{r}}$ и $\hat{\mathbf{p}} = \nabla/(ik_0)$ не коммутируют, но они, очевидно, должны входить в комбинации, обеспечивающей эрмитовость оператора \hat{H} в среде без поглощения. Подробнее этот вопрос обсуждается в следующем разделе.

В плавно неоднородных средах волновые пучки локализованы вблизи некоторой опорной кривой — траектории центра масс $\mathbf{r}_0(\tau)$. В бездиссипативной среде в качестве такой кривой естественно выбрать центральный геометрооптический луч пучка [19]. Поэтому разумно рассматривать решение уравнения (13) не во всём пространстве, а в некоторой малой окрестности этой траектории $\mathbf{r}_0(\tau)$. Однако в отличие от [19] опорный луч не обязан быть геометрооптическим, хотя обычно и должен быть близок к нему [21].

Введём комплексную огибающую поля волнового пучка u , выделив в нём быстро осциллирующий множитель:

$$U = u(\boldsymbol{\xi}, \tau) \exp(ik_0\Psi), \quad \Psi = \int p_\tau \chi ds + \mathbf{q}\boldsymbol{\xi}, \quad (14)$$

где функции $p_\tau(\tau)$, $\mathbf{q}(\tau) = \mathbf{g}_1 q_1 + \mathbf{g}_2 q_2$ — продольная и поперечные по отношению к опорной кривой проекции нормированного волнового вектора в точке $\mathbf{r}_0(\tau)$. В отличие от изотропных

сред (10), в анизотропных средах из-за различия направлений групповой и фазовой скоростей в выражении (14) введена явная зависимость от поперечных координат (величина \mathbf{q} отлична от нуля).

В результате уравнение (13) в сопутствующей системе координат с учётом замены (14) примет вид

$$\hat{H}\left(\mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\xi}, \frac{(\chi p_\tau + \dot{\mathbf{q}}\boldsymbol{\xi})}{h} \boldsymbol{\ell} + \frac{\boldsymbol{\ell}}{ik_0 h} \frac{\partial}{\partial \tau}, \mathbf{q} + \frac{1}{ik_0} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}}\right) [u] = 0. \quad (15)$$

Напомним, что переход в криволинейную систему координат в (15) обоснован только для малой окрестности опорной кривой на расстояниях, много меньших её радиуса кривизны. В противном случае возникают сложности, связанные с неоднозначностью определения координат точки в пространстве (8).

Сосредоточимся только на волновых пучках, медленно эволюционирующих вдоль опорного луча. Эта медленность изменения позволяет существенно упростить уравнение (15), исключив из рассмотрения высшие продольные производные от амплитуды u , т. е. $\partial^2 u / \partial \tau^2$ и т. д. Фактически рассматриваются волновые пучки с относительно узкими угловыми спектрами в средах с плавными неоднородностями, для которых выполняются неравенства $1 \ll k_0 L$ и $1 \ll k_0 \Lambda$, где Λ и L — характерные масштабы неоднородности среды и поля в пучке. При этом малость ширины пучка по сравнению с масштабом неоднородности среды не требуется.

Разложим уравнение (15) в ряд по $\partial / \partial \tau$ в соответствии с процедурой, аналогичной разложению в ряд Тейлора, ограничиваясь только членами с первой производной:

$$\begin{aligned} \hat{H}[u] &= \hat{H}_0[u] + \frac{1}{2ik_0} \left\{ \frac{\partial \hat{H}_0}{\partial p} \left[\frac{\partial u}{\partial \tau} \right] + \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \hat{H}_0}{\partial p} [u] \right) \right\} + \dots \approx \\ &\approx \hat{H}_0[u] + \frac{1}{ik_0 h} \frac{\partial \hat{H}_0}{\partial p_\tau} \left[\frac{\partial u}{\partial \tau} \right] + \frac{1}{2ik_0 h} \frac{\partial^2 \hat{H}_0}{\partial p_\tau \partial \tau} [u] = 0, \quad (16) \end{aligned}$$

где

$$\hat{H}_0 = \hat{H}\left(\mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\xi}, \frac{(\chi p_\tau + \dot{\mathbf{q}}\boldsymbol{\xi})}{h} \boldsymbol{\ell}, \mathbf{q} + \frac{1}{ik_0} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}}\right)$$

представляет собой оператор \hat{H} , в котором опущена производная $\partial / \partial \tau$.

Физический смысл членов, входящих в уравнение (16), понятен. Первое слагаемое представляет собой «фазовый корректор», учитывающий в малоугловом приближении рефракцию и пространственную дисперсию среды. Второе слагаемое — член, задающий эволюцию амплитуды волнового пучка. Причём «скорость» эволюции зависит как от местоположения точки в пространстве, так и от формы импульса. Этот факт отражает то, что на эволюционный член $\partial u / \partial \tau$ действует оператор $\partial \hat{H} / \partial p_\tau$. Последнее слагаемое в пределе геометрической оптики даёт предэкспоненциальный множитель, ответственный за изменение амплитуды в зависимости от «локальной» групповой скорости — хорошо известный фактор $1 / \sqrt{\chi}$, обратно пропорциональный групповой скорости луча $v_{gr} = \chi$. Для изотропных сред он равен $1 / \sqrt[4]{n}$, где n — показатель преломления среды.

Приведём уравнение (16) к классическому виду параболического уравнения. Это можно сделать, если существует обратный оператор $(\partial \hat{H}_0 / \partial p_\tau)^{-1}$. Подействовав им на уравнение (16), получим

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = h \left(\frac{\partial \hat{H}_0}{\partial p_\tau} \right)^{-1} \left\{ ik_0 \hat{H}_0[u] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{H}_0}{\partial p_\tau \partial \tau} [u] \right\}. \quad (17)$$

Однако часто изменение групповой скорости в поперечном сечении пучка мало и, выполнив замену $u \rightarrow u/\sqrt{\chi}$, достаточно использовать значительно более простое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = ik_0 \hat{H}_0[u]. \quad (18)$$

Заметим, что в рамках уравнения (18) в бездиссипативной среде сохраняется интеграл $W = \int |u|^2 d^2\xi = \text{const}$, который, по существу, является полным потоком энергии в волновом пучке ($dW/d\tau = 0$). Вид этого интеграла такой же, как и в случае холодной плазмы [19].

В действительности ничто не мешает нам сохранить и более высокие члены при разложении (15) и учесть их как соответствующие поправки, оставаясь в рамках однонаправленного распространения. Подробнее это описано в работе [22].

3. МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ КВАЗИОПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Для численного решения уравнения (17) можно воспользоваться различными методами, например, методом Эйлера:

$$u(\tau + \Delta\tau) = u(\tau) + h \Delta\tau \left(\frac{\partial \hat{H}_0}{\partial p_\tau} \right)^{-1} \left\{ ik_0 \hat{H}_0[u] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{H}_0}{\partial p_\tau \partial \tau} [u] \right\},$$

устойчивым только при очень малом временном шаге $\Delta\tau \rightarrow 0$. Более предпочтителен метод, обобщающий метод операторной экспоненты [23] (аналога split-step метода) и позволяющий выбирать больший шаг расчёта $\Delta\tau$, определяемый характерными масштабами задачи, а не параметрами численной схемы.

Этот метод основан на том, что для достаточно малого шага по времени $\Delta\tau$ решение эволюционного уравнения, состоящего из нескольких слагаемых, можно представить как последовательность решений эволюционных уравнений, состоящих только из одного слагаемого. При этом начальными условиями для нахождения каждого следующего решения будет распределение поля, полученное в предыдущем решении. Другими словами, решение (17) можно представить как последовательность решений уравнений

$$\frac{\partial u_1}{\partial \tau} = h \left(\frac{\partial \hat{H}_0}{\partial p_\tau} \right)^{-1} ik_0 \hat{H}_0[u_1], \quad \frac{\partial u_2}{\partial \tau} = -h \left(\frac{\partial \hat{H}_0}{\partial p_\tau} \right)^{-1} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{H}_0}{\partial p_\tau \partial \tau} [u_2]. \quad (19)$$

Решения $\hat{S}_1[u]$, $\hat{S}_2[u]$ каждого из уравнений (19) легко найти. В результате решение уравнения (16) можно условно представить в «операторном» виде

$$u(\tau + \Delta\tau) \approx \hat{S}_2[\hat{S}_1[u(\tau)]] = \sqrt{\frac{\partial_{p_\tau} \hat{H}_0(0)}{\partial_{p_\tau} \hat{H}_0(\Delta\tau)}} \exp \left[ik_0 \int_0^{\Delta\tau} \hat{H}_0(\tau) d\tau \right] [u(\xi, \tau)]. \quad (20)$$

Аналогично, решение уравнения (18) записывается в виде

$$u(\Delta\tau) \approx \exp \left[ik_0 \int_0^{\Delta\tau} \hat{H}_0(\tau) d\tau \right] [u(\xi, \tau = 0)]. \quad (21)$$

Конечно, такая запись слишком вольна и справедлива только для коммутирующих операторов \hat{H}_0 и $\partial_{p_\tau} \hat{H}_0$ (например, для случая однородной среды или среды без дисперсии и т. д.). Однако

на малых временах $\Delta\tau$ при специальном представлении операторов вновь можно воспользоваться методом операторной экспоненты. Например, представляя оператор \hat{H} в виде

$$\hat{H} = H(\hat{x}, p_0) + H(x_0, \hat{p}) - H(x_0, p_0) + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial p} \{\hat{x}, \hat{p}\}, \quad (22)$$

где $\{\hat{x}, \hat{p}\} = (\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x})/2$, экспоненту в (21) можно записать в виде

$$\exp \left[ik_0 \int_0^{\Delta\tau} \hat{H}_0(\tau) d\tau \right] [u(x, \tau)] = \hat{S}_2 \left[S_p(\hat{p}) \left[S_x(\hat{x}) [u(x, \tau)] \right] \right], \quad (23)$$

где $S_p(\hat{p})$, $S_x(\hat{x})$ и \hat{S}_2 — решения соответствующих частей уравнения, определяемые формулами

$$S_p(\hat{p}) = \exp \left(ik_0 \int_0^{\Delta\tau} H(x_0, \hat{p}) d\tau \right), \quad S_x[\hat{x}] = \exp \left(ik_0 \int_0^{\Delta\tau} \left(H(\hat{x}, p_0) - H(x_0, p_0) \right) d\tau \right).$$

Вычисление каждого из введённых выше операторов не представляет сложности. Они сводятся к умножению на соответствующую экспоненту в координатном (для $S_x(\hat{x})$) или в импульсном (для $S_p(\hat{p})$) пространствах. Оператор \hat{S}_2 представляет собой растяжение или сжатие решения в направлении x :

$$\hat{S}_2[u(x)] = \frac{u[x \exp(\alpha \Delta\tau)]}{\exp(\alpha \Delta\tau/2)}, \quad \alpha = \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial p}.$$

Похожим образом можно записать разложением оператора \hat{H} и решение соответствующего квазиоптического уравнения и для более высоких порядков разложения.

Формула (22) наиболее хорошо подходит для одномерной зависимости от координаты x . В случае распространения волновых пучков в реальной среде все операторы могут зависеть от двух пространственных (ξ_1, ξ_2) и двух импульсных (q_1, q_2) координат. В этом случае также можно выполнить аналогичное разложение, более корректно учитывающее пространственную дисперсию среды, но оно становится более громоздким. Приведём здесь в качестве примера только двумерный аналог представления (22):

$$\begin{aligned} \hat{H} = & H(\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, 0, 0) + H(0, 0, \hat{q}_1, \hat{q}_2) - H(0, 0) + \\ & + [H(\hat{\xi}_1, 0, 0, \hat{q}_2) - H(0, 0, 0, \hat{q}_2) - H(\hat{\xi}_1, 0, 0, 0)] + [H(0, \hat{\xi}_2, \hat{q}_1, 0) - H(0, 0, \hat{q}_1, 0) - H(0, \hat{\xi}_2, 0, 0)] + \\ & + \frac{\partial^2 H}{\partial \xi_1 \partial p_1} \{\hat{\xi}_1, \hat{p}_1\} + \frac{\partial^2 H}{\partial \xi_2 \partial p_2} \{\hat{\xi}_2, \hat{p}_2\}. \quad (24) \end{aligned}$$

Видно, что, как и в (22), представление (24) содержит очевидные члены $H(\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, 0, 0)$, $H(0, 0, \hat{q}_1, \hat{q}_2)$, вычисление которых не представляет сложности, т.к. операторы в их аргументах коммутативны ($\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2$ и \hat{q}_1, \hat{q}_2 соответственно). В дополнение к ним явно выписаны «перекрёстные» члены координата—импульс $H(\hat{\xi}_1, 0, 0, \hat{q}_2)$ и $H(0, \hat{\xi}_2, \hat{q}_1, 0)$, поскольку операторы $\hat{\xi}_1, \hat{q}_2$ (и $\hat{q}_1, \hat{\xi}_2$) также коммутативны и соответствующие члены легко вычисляются. Аналогичным образом можно получить выражения и для разложений более высокого порядка, но в силу громоздкости формул мы их здесь не приводим.

С точки зрения численного моделирования на этом можно было бы и остановиться. Уравнение (17) является эволюционным, способы его решения, вообще говоря, известны: различные сеточные методы или метод операторной экспоненты на основе формулы (20). Последний более

удобен, т. к. позволяет использовать относительно большой временной шаг, не зависящий от числа точек сетки (как в сеточном методе) и определяемый только особенностями задачи и амплитудой пучка, т. е. дифракционным и рефракционным масштабами.

Однако, пока мы не дали ответов на ряд вопросов. К ним относятся, в частности, вопросы о выборе опорной кривой; о точности уравнений (13) и (17); о проведении перехода к геометрической оптике или к случаю распространения гауссовых пучков. Чтобы ответить на них, надо продолжить разложение уравнения (17) вблизи опорного луча, предполагая дополнительно плавность поперечного распределения пучка и малость его ширины: $1 \ll k_0 \Lambda_{\perp} \ll k_0 L$, где Λ_{\perp} — характерная ширина пучка.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В второй части настоящего цикла работ представлен новый метод построения приближённого решения уравнений Максвелла для волновых пучков, распространяющихся в анизотропных плавно неоднородных средах с пространственной дисперсией. Он основан на представлении векторного поля в виде результата действия оператора поляризации на скалярное поле, которое находится из решения соответствующего скалярного уравнения. Путём разложения скалярного уравнения в приближении медленности изменения скалярной амплитуды вдоль некоторого опорного луча, получено эволюционное уравнение для комплексной амплитуды скалярного поля и предложен метод его численного решения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 12-02-00648-а и 11-02-00403-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zohm H. // Proc. 13th Joint Workshop on Electron Cyclotron Emission and Electron Cyclotron Heating. 2005. P. 133.
2. Takahashi K., Kobayashi N., Kasugai A., Sakamoto K. // J. Phys. Conf. Ser. 2005. V. 25. P. 75.
3. Takahashi K., Kobayashi N., Ohmori J., et al. // Fusion Sci. Technol. 2007. V. 52. P. 266.
4. Mazzucato E. // Phys. Fluids B. 1989. V. 1. P. 1855.
5. Farina D. // Fusion Sci. Technol. 2007. V. 52. P. 154.
6. Pereverzev G. V. // Rev. Plasma Phys. 1996. V. 19. P. 1.
7. Pereverzev G. V. // Phys. Plasmas. 1998. V. 5. P. 3529.
8. Prater R., Farina D., Gribov Yu., et al. // Nucl. Fusion. 2008. V. 48. Art. no. 035006.
9. Maj O., Balakin A. A., Poli E. // Plasma Phys. Control. Fusion. 2010. V. 52. Art. no. 085006.
10. Балакин А. А. // Изв. вузов Радиофизика. 2012. Т. 55, № 7. С. 521.
11. Тимофеев А. В. // УФН. 2005. Т. 175. С. 637.
12. Леонтович М. А., Фок В. А. // ЖЭТФ. 1946. Т. 16. С. 557.
13. Бондаренко Н. Г., Таланов В. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1964. Т. 7. С. 313.
14. Литвак А. Г., Таланов В. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1967. Т. 10. С. 175.
15. Таланов В. И., Власов С. Н. Самофокусировка волн. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 1997.
16. Saveliev A. N. // Plasma Phys. Control. Fusion. 2009. V. 51. Art. no. 075004.
17. Таланов В. И. // Письма в ЖЭТФ. 1970. Т. 11. С. 303.
18. Пермитин Г. В., Смирнов А. И. // ЖЭТФ. 2001. Т. 119. С. 16.
19. Балакин А. А., Балакина М. А., Смирнов А. И., Пермитин Г. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 2007. Т. 50. С. 1058.

20. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика в неоднородных средах. М.: Наука, 1980.
21. Balakin A. A., Balakina M. A., Westerhof E. // Nuclear Fusion. 2008. V. 48. Art. no. 065003.
22. Балакин А. А., Балакина М. А., Смирнов А. И., Пермитин Г. В. // Физика плазмы. 2007. Т. 33. С. 337.
23. Fraiman G. M., Sher E. M., Yunakovsky A. D., Laedke W. // Physica D. 1995. V. 87. P. 325.

Поступила в редакцию 10 сентября 2012 г.; принята в печать 30 сентября 2012 г.

**WAVE BEAMS IN SMOOTHLY INHOMOGENEOUS ANISOTROPIC MEDIA:
QUASIOPTIC EQUATION (PART 2)**

A. A. Balakin

In this series of papers, we propose a method for development of an approximate solution of the Maxwell equations in smoothly inhomogeneous anisotropic gyrotropic media with allowance for aberrations, spatial dispersion, and absorption. Evolution equations for wave beams have been obtained, and a method for solving them numerically, developed. In the second part, we derive a quasi-optical evolution equation for wave beams and propose a method for its numerical solution. The connection with the aberration-free approximation equations is shown.