УДК 537.87

О МЕТОДЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПОЛЯ В ФОРМЕ ДВОЙНОГО ВЗВЕШЕННОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ В ЗАДАЧАХ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

А. В. Кулижский, М. В. Тинин

Иркутский госуниверситет, г. Иркутск, Россия

На основе строгого континуального представления для функции Грина параболического уравнения определены границы применимости метода интегрального представления поля в виде двойного взвешенного преобразования Фурье. Из полученных оценок следует, что исследуемый метод учитывает дифракционные эффекты на неоднородностях с масштабом порядка и меньше радиуса первой зоны Френеля плоской волны и может быть использован для решения обратных задач по восстановлению параметров неоднородной среды на основе измеренных данных в плоскостях источника и приёмника.

ВВЕДЕНИЕ

Волновые методы диагностики неоднородностей лабораторной и природной плазмы в настоящее время играют важную роль. Одним из основных сдерживающих их развитие факторов является ограниченность приближённых методов описания распространения волн в неоднородных средах. Так, например, применимость метода геометрической оптики ограничена малостью дифракционных эффектов. Метод плавных возмущений, который широко используется для интерпретации наблюдений по мерцаниям, не применим в области сильных флуктуаций [1]. Метод фазового экрана удовлетворительно описывает эффекты дифракции и применим в области сильных флуктуаций, однако вопрос о местоположении экрана в случае протяжённой неоднородной среды не имеет удовлетворительного решения.

В работах [2, 3] был предложен новый метод, позволяющий получить интегральное представление для поля в виде двойного взвешенного преобразования Фурье по координатам источников и приёмников (сокращённо будем называть его, следуя [2], метод ДВПФ). При этом оказалось, что при малых вариациях фазы из него можно получить метод малых возмущений, а в случае, когда слой с неоднородностями можно считать достаточно тонким, это интегральное представление переходит в пределе в выражение для поля в методе фазового экрана. Таким образом, предложенный метод содержит в себе в качестве частных случаев как метод фазового экрана, так и метод малых возмущений. Кроме того, в случае, когда размеры неоднородностей много больше размера первой зоны Френеля, предложенное интегральное представление переходит в геометрооптическое выражение для поля.

Ещё одной важной особенностью метода является то, что полученное интегральное представление для поля допускает применение обратного двойного взвешенного преобразования Фурье, в результате которого получается простое по форме геометрооптическое выражение для поля парциальной волны. Это обстоятельство может быть использовано для решения обратных задач, т. к. позволяет свести волновую задачу диагностики для падающего поля к хорошо разработанным методам решения томографических задач для представления поля парциальной волны в приближении геометрической оптики [3].

Целью данной статьи является установление границ применимости рассматриваемого метода и, таким образом, обоснование его использования в волновых задачах диагностики неоднородностей лабораторной и природной плазмы. Для этой цели мы используем строгое представление для

поля в малоугловом приближении в виде континуального интеграла, с помощью которого получаем точное интегральное представление для поля парциальной волны. Это строгое интегральное представление является отправной точкой для получения сходящегося ряда, первым членом которого является рассматриваемое приближение. Исследование поправочных членов разложения и даст нам искомые границы применимости.

Следует также отметить, что мы получим условия применимости метода двойного взвешенного преобразования Фурье в общем случае многомасштабной и протяжённой среды распространения с неоднородностями. Для некоторых частных случаев границы применимости могут оказаться заметно шире полученных в статье.

1. СТРОГОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ ПОЛЯ ПАРЦИАЛЬНОЙ ВОЛНЫ

Как известно, процесс распространения волн в малоугловом приближении вдоль оси z описывается параболическим уравнением [1]:

$$2ik\,\frac{\partial G}{\partial z} + \Delta_\rho G + k^2\varepsilon(z,\boldsymbol{\rho})G(z,\boldsymbol{\rho};z_0,\boldsymbol{\rho}_0) = 0. \tag{1}$$

Здесь $1+\varepsilon(z,\boldsymbol{\rho})$ — функция диэлектрической проницаемости среды, учитывающая плазменные неоднородности, $k=2\pi/\lambda$ — волновое число в свободном пространстве, λ — длина волны, $\Delta_\rho = \partial^2/(\partial x^2) + \partial^2/(\partial y^2)$ — оператор Лапласа по поперечным координатам. В качестве граничного (начального) условия возьмём условие $\lim_{z\to z_0} G(z,\boldsymbol{\rho};z_0,\boldsymbol{\rho}_0) = \delta(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_0)$, которое соответствует функции Грина для параболического уравнения, исследованием которой мы и ограничимся, т. к. общий случай произвольного источника поля сводится к этому частному случаю (здесь $\delta(x)$ — дельта-функция).

В работах [2, 3] было получено следующее приближённое решение уравнения (1) в виде двойного взвешенного преобразования Фурье:

$$\bar{G}(z_t,\boldsymbol{\rho};z_0,\boldsymbol{\rho}_0) = \frac{k}{2\pi i Z}\left(\frac{k}{\pi Z}\right)^2 \exp\left[\frac{ik}{2}\,\frac{(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_0)^2}{Z}\right]\times$$
$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}^2\boldsymbol{\zeta}\,\mathrm{d}^2\boldsymbol{\zeta}_0\,\exp\left[2ik\,\frac{(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\zeta})\,(\boldsymbol{\rho}_0-\boldsymbol{\zeta}_0)}{Z}\right]\exp\left[\frac{ik}{2}\int\limits_{z_0}^{z_t}\varepsilon[z,\mathbf{s}(z,\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\zeta}_0)]\,\mathrm{d}z\right]. \tag{2}$$

Здесь предполагается, что точечный источник поля расположен в точке с координатами $\mathbf{r}_0 = (z_0,x_0,y_0) = (z_0,\boldsymbol{\rho}_0)$ на плоскости $z=z_0$ и поле измеряется в точке приёма с координатами $\mathbf{r} = (z_t,x,y) = (z_t,\boldsymbol{\rho})$ на плоскости $z=z_t$ (рис. 1). Интегрирование выполняется по плоскости как источника, так и приёмника. Кроме того, мы обозначили $Z = z_t - z_0$, а также $\mathbf{s}(z,\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\zeta}_0) = \boldsymbol{\zeta}\,(z-z_0)/Z + \boldsymbol{\zeta}_0\,(z_t-z)/Z$.

Как было показано в [2, 3] интегральное представление поля в виде (2) хорошо согласуется с другими известными приближёнными методами решения уравнения (1). В частности, формула (2) переходит в выражение для поля в методе фазового экрана при условии стремления к нулю толщины слоя с неоднородностями $L = |z_r - z_l|$ (см. рис. 1). Представление (2) переходит в геометрооптическое выражение для функции Грина в случае, когда размеры неоднородностей много больше радиуса первой зоны Френеля. Кроме того, в условиях слабых флуктуаций фазы парциальных волн (показатель последней экспоненты в (2) по модулю много меньше единицы)

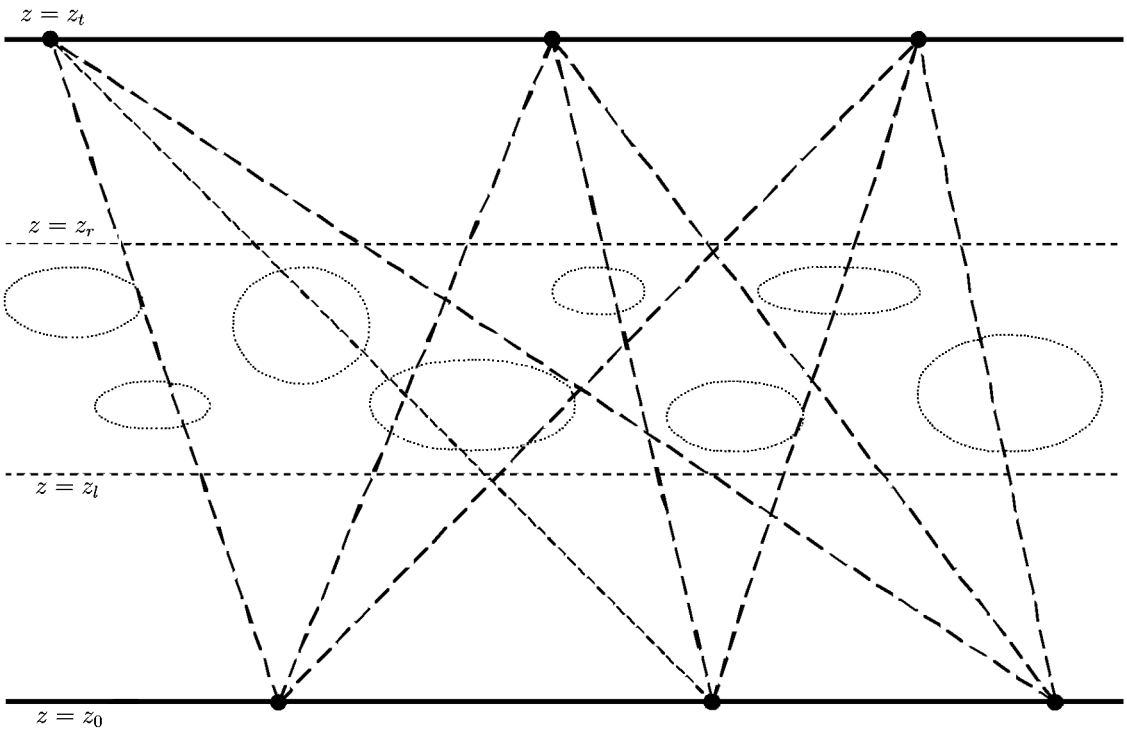

Рис. 1. Геометрия задачи распространения парциальных волн, соответствующих интегральному представлению (2)

формула (2) переходит в результаты метода малых возмущений для уравнения (1). Таким образом, выражение (2) включает в себя ряд известных приближённых методов представления функции Грина параболического уравнения (1), используемых при анализе процесса распространения волн в средах с неоднородностями.

Приближённое представление для функции Грина уравнения (1) в форме (2) получено с использованием ряда эвристических предположений, таких, как применение метода геометрической оптики и теории возмущений для поля парциальной волны (подробнее см. [2, 3]). Поэтому для установления границ его применимости необходимо получить выражение (2) из строгого представления решения параболического уравнения (1), а затем оценить остаточные члены.

В работе [4] авторами было предложено следующее точное представление для решения уравнения (1) в виде континуального интеграла:

$$G(z_t,\boldsymbol{\rho};z_0,\boldsymbol{\rho}_0)=\exp\left[\frac{ik}{2}\,\frac{(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_0)^2}{Z}\right]\int\prod_t \mathrm{d}\mathbf{v}(t)\,\delta\left(\int\limits_{z_0}^{z_t}\mathbf{v}(t)\,\mathrm{d}t\right)\exp\left[\frac{ik}{2}\int\limits_{z_0}^{z_t}\mathbf{v}^2(t)\,\mathrm{d}t\right]\times$$
$$\times\exp\left[\frac{ik}{2}\int\limits_{z_0}^{z_t}\varepsilon\left(z,\boldsymbol{\rho}\,\frac{z-z_0}{Z}+\boldsymbol{\rho}_0\,\frac{z_t-z}{Z}+\int\limits_{z}^{z_t}\mathbf{v}(t)\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}z\right]. \quad (3)$$

Здесь выражение $\int\prod_t \mathrm{d}\mathbf{v}(t)$ соответствует континуальному интегрированию по угловым переменным, определяемым соотношением $\boldsymbol{\rho}(z)=\boldsymbol{\rho}+\int_z^{z_t}\mathbf{v}(t)\,\mathrm{d}t$. При этом сам континуальный интеграл в (3) определяется следующим образом [4]:

$$\int\prod_t \mathrm{d}\mathbf{v}(t)=\lim_{N\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{k\,\Delta z}{2\pi i}\,\mathrm{d}^2v_{N-1}\,\ldots\int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{k\,\Delta z}{2\pi i}\,\mathrm{d}^2v_0,$$

где $\Delta z = Z/N$, т. е как интегрирование по бесконечному набору фазовых экранов. Используя такое определение континуального интеграла, легко показать, что выполняется следующее равенство:

$$\int \prod_t \mathrm{d}\mathbf{v}(t)\,\delta\left[\int_{z_0}^{z_t}\mathbf{v}(t)\,\mathrm{d}t\right]\exp\left[\frac{ik}{2}\int_{z_0}^{z_t}\mathbf{v}^2(t)\,\mathrm{d}t\right] = \frac{k}{2\pi i Z}\,. \tag{4}$$

Из этой формулы видно, что в случае $\varepsilon \equiv 0$ выражение (3) переходит в формулу для функции Грина параболического уравнения в свободном пространстве.

Для дальнейшего определим обратное и прямое взвешенные преобразования Фурье (ДВПФ) следующим образом:

$$u^*(\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\zeta}_0) = \mathrm{DWF}^{-1}[u](\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\zeta}_0) = \\ = \left(\frac{k}{\pi Z}\right)^2 \int\limits_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}^2\rho\,\mathrm{d}^2\rho_0\,u(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_0)\exp\left[-\frac{ik}{2}\,\frac{(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_0)^2}{Z}\right]\exp\left[-2ik\,\frac{(\boldsymbol{\zeta}-\boldsymbol{\rho})\,(\boldsymbol{\zeta}_0-\boldsymbol{\rho}_0)}{Z}\right], \tag{5}$$

$$u(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_0) = \mathrm{DWF}[u^*](\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_0) = \left(\frac{k}{\pi Z}\right)^2 \exp\left[\frac{ik}{2}\,\frac{(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_0)^2}{Z}\right]\times \\ \times \int\limits_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}^2\boldsymbol{\zeta}\,\mathrm{d}^2\boldsymbol{\zeta}_0\,u^*(\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\zeta}_0)\exp\left[2ik\,\frac{(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\zeta})\,(\boldsymbol{\rho}_0-\boldsymbol{\zeta}_0)}{Z}\right]. \tag{6}$$

Как легко следует из прямых вычислений, эти операторы взаимно обратные: $\mathrm{DWF}^{-1}[\mathrm{DWF}(u^*)] = u^*$, $\mathrm{DWF}[\mathrm{DWF}^{-1}(u)] = u$. При этом функцию u^* из (5) мы будем называть образом функции u или парциальной волной в интегральном представлении (6).

Применим теперь обратное двойное взвешенное преобразование Фурье (5) к выражению (3). В результате получим выражение для образа поля:

$$G^*(z_t,\boldsymbol{\zeta};z_0,\boldsymbol{\zeta}_0) = \mathrm{DWF}^{-1}[G](\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\zeta}_0) = \left(\frac{k}{\pi Z}\right)^2 \int\limits_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}^2\rho\,\mathrm{d}^2\rho_0\exp\left[-2ik\,\frac{(\boldsymbol{\zeta}-\boldsymbol{\rho})\,(\boldsymbol{\zeta}_0-\boldsymbol{\rho}_0)}{Z}\right]\times \\ \times \int \prod_t \mathrm{d}\mathbf{v}(t)\,\delta\left[\int_{z_0}^{z_t}\mathbf{v}(t)\,\mathrm{d}t\right]\exp\left[\frac{ik}{2}\int_{z_0}^{z_t}\mathbf{v}^2(t)\,\mathrm{d}t\right]\exp\left\{\frac{ik}{2}\int_{z_0}^{z_t}\varepsilon\left[z,\mathbf{s}(z,\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_0)+\int_z^{z_t}\mathbf{v}(t)\,\mathrm{d}t\right]\,\mathrm{d}z\right\}.$$

Эту формулу мы можем записать и так:

$$G^*(z_t,\boldsymbol{\zeta};z_0,\boldsymbol{\zeta}_0) = \left(\frac{k}{\pi Z}\right)^2 \exp\left[\frac{ik}{2}\int_{z_0}^{z_t}\varepsilon[z,\mathbf{s}(z,\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\zeta}_0)]\,\mathrm{d}z\right]\times \\ \times \int\limits_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}^2\rho\,\mathrm{d}^2\rho_0\exp\left[-2ik\,\frac{(\boldsymbol{\zeta}-\boldsymbol{\rho})\,(\boldsymbol{\zeta}_0-\boldsymbol{\rho}_0)}{Z}\right]\int\prod_t \mathrm{d}\mathbf{v}(t)\,\delta\left[\int_{z_0}^{z_t}\mathbf{v}(t)\,\mathrm{d}t\right]\exp\left[\frac{ik}{2}\int_{z_0}^{z_t}\mathbf{v}^2(t)\,\mathrm{d}t\right]\times \\ \times \exp\left\{\frac{ik}{2}\int_{z_0}^{z_t}\varepsilon\left[z,\mathbf{s}(z,\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_0)+\int_z^{z_t}\mathbf{v}(t)\,\mathrm{d}t\right]\,\mathrm{d}z - \frac{ik}{2}\int_{z_0}^{z_t}\varepsilon[z,\mathbf{s}(z,\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\zeta}_0)]\,\mathrm{d}z\right\}. \tag{7}$$

Формула (7) даёт искомое строгое представление для образа поля в виде континуального интеграла. Если пренебречь значением выражения, стоящего в показателе последней экспоненты, и вычислить интегралы по $\boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{\rho}_0$ и континуальный интеграл по переменным $\mathrm{d}\mathbf{v}(t)$, воспользовавшись формулой (4), то мы получим формулу для поля парциальной волны, соответствующую представлению (2):

$$\bar{G}^*(z_t,\boldsymbol{\zeta};z_0,\boldsymbol{\zeta}_0)=\frac{k}{2\pi iZ}\exp\left\{\frac{ik}{2}\int\limits_{z_0}^{z_t}\varepsilon[z,\mathbf{s}(z,\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\zeta}_0)]\,\mathrm{d}z\right\}. \tag{8}$$

В работах [5, 6] отмечалась связь метода ДВПФ и строгого представления для поля в форме континуального интеграла. Здесь мы, используя эту связь, исследуем условия применимости формулы (8) в смысле малости по абсолютной величине добавочных членов, появляющихся из-за отличия значения последней экспоненты в (7) от единицы.

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛЯ ПАРЦИАЛЬНОЙ ВОЛНЫ В ВИДЕ СХОДЯЩЕГОСЯ РЯДА

С учётом легко проверяемой формулы

$$\left(\frac{k}{\pi Z}\right)^2\int\limits_{\mathbb{R}^4}\mathrm{d}^2\rho\,\mathrm{d}^2\rho_0\exp\left[-2ik\,\frac{(\boldsymbol{\zeta}-\boldsymbol{\rho})\,(\boldsymbol{\zeta}_0-\boldsymbol{\rho}_0)}{Z}\right]=1,$$

а также формулы (4), выражение (7) для образа функции Грина можно переписать в следующем виде:

$$G^*(z_t,\boldsymbol{\zeta};z_0,\boldsymbol{\zeta}_0)=\bar{G}^*(z_t,\boldsymbol{\zeta};z_0,\boldsymbol{\zeta}_0)\,[1+U(z_t,\boldsymbol{\zeta};z_0,\boldsymbol{\zeta}_0)]. \tag{9}$$

В выражении (9)

$$\begin{aligned}U(z_t,\boldsymbol{\zeta};z_0,\boldsymbol{\zeta}_0)=&\left(\frac{k}{\pi Z}\right)^2\frac{2\pi iZ}{k}\times\\ &\times\int\limits_{\mathbb{R}^4}\mathrm{d}^2\rho\,\mathrm{d}^2\rho_0\exp\Big(-2ik\,\frac{\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\rho}_0}{Z}\Big)\int\prod_t\mathrm{d}\mathbf{v}(t)\,\delta\left[\int\limits_{z_0}^{z_t}\mathbf{v}(t)\,\mathrm{d}t\right]\exp\left[\frac{ik}{2}\int\limits_{z_0}^{z_t}\mathbf{v}^2(t)\,\mathrm{d}t\right]\times\\ \times&\left(\exp\left\{\frac{ik}{2}\int\limits_{z_0}^{z_t}\varepsilon\left[z,\mathbf{s}(z,\boldsymbol{\zeta}+\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\zeta}_0+\boldsymbol{\rho}_0)+\int\limits_{z}^{z_t}\mathbf{v}(t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}z-\frac{ik}{2}\int\limits_{z_0}^{z_t}\varepsilon[z,\mathbf{s}(z,\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\zeta}_0)]\,\mathrm{d}z\right\}-1\right).\end{aligned} \tag{10}$$

Здесь мы провели замену переменных: $\boldsymbol{\rho}\to\boldsymbol{\rho}+\boldsymbol{\zeta}$, $\boldsymbol{\rho}_0\to\boldsymbol{\rho}_0+\boldsymbol{\zeta}_0$. Разложим последнюю экспоненту, стоящую под знаком континуального интеграла, в ряд Тейлора и учтём, что полученный ряд сходится равномерно. Кроме этого, определим фурье-образ от функции $\varepsilon(z,\boldsymbol{\rho})$ по координатам $\boldsymbol{\rho}=(x,y)$, поперечным направлению распространения:

$$\tilde{\varepsilon}(z,\boldsymbol{\chi})=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\varepsilon(z,\boldsymbol{\rho})\exp(-i\boldsymbol{\chi}\boldsymbol{\rho})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}. \tag{11}$$

Теперь мы можем записать получившееся выражение в следующем виде, удобном для анализа:

$$U(z_t,\boldsymbol{\zeta};z_0,\boldsymbol{\zeta}_0)=\left(\frac{k}{\pi Z}\right)^2\frac{2\pi iZ}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{ik}{4\pi}\right)^n\int\limits_{\mathbb{R}^4}\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}\,\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}_0\exp\Big(-2ik\,\frac{\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\rho}_0}{Z}\Big)\times$$
$$\times\int\prod_t\mathrm{d}\mathbf{v}(t)\,\delta\left[\int\limits_{z_0}^{z_t}\mathbf{v}(t)\,\mathrm{d}t\right]\exp\left[\frac{ik}{2}\int\limits_{z_0}^{z_t}\mathbf{v}^2(t)\,\mathrm{d}t\right]\times$$
$$\times\prod_{m=1}^{n}\int\limits_{z_0}^{z_t}\mathrm{d}z_m\int\limits_{\mathbb{R}^2}\mathrm{d}^2\chi_m\,\tilde{\varepsilon}(z_m,\boldsymbol{\chi}_m)\exp\{i\boldsymbol{\chi}_m\mathbf{s}(z_m,\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\zeta}_0)\}\times$$
$$\times\left\{\exp\left[i\boldsymbol{\chi}_m\mathbf{s}(z_m,\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_0)+i\boldsymbol{\chi}_m\int\limits_{z_m}^{z_t}\mathbf{v}(t)\,\mathrm{d}t\right]-1\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n!}\,. \quad (12)$$

Вычисляя получившиеся континуальные интегралы, легко получить выражения для отдельных членов ряда в разложении (12):

$$u_1(z_t,\boldsymbol{\zeta};z_0,\boldsymbol{\zeta}_0)=0, \quad (13)$$

$$u_2(z_t,\boldsymbol{\zeta};z_0,\boldsymbol{\zeta}_0)=\left(\frac{ik}{4\pi}\right)^2\int\limits_{z_0}^{z_t}\int\limits_{z_0}^{z_t}\mathrm{d}z_1\,\mathrm{d}z_2\int\limits_{\mathbb{R}^4}\mathrm{d}^2\chi_1\,\mathrm{d}^2\chi_2\,\tilde{\varepsilon}(z_1,\boldsymbol{\chi}_1)\tilde{\varepsilon}(z_2,\boldsymbol{\chi}_2)\exp\left[i\sum_{m=1}^{2}\boldsymbol{\chi}_m\mathbf{s}(z_m,\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\zeta}_0)\right]\times$$
$$\times\left\{\exp\Big(i\,\frac{\boldsymbol{\chi}_1\boldsymbol{\chi}_2}{2k}\,|z_1-z_2|\Big)-1\right\}, \quad (14)$$

$$u_n(z_t,\boldsymbol{\zeta};z_0,\boldsymbol{\zeta}_0)=\left(\frac{ik}{4\pi}\right)^n\int\limits_{z_0}^{z_t}\mathrm{d}z_1\ldots\int\limits_{z_0}^{z_t}\mathrm{d}z_n\int\limits_{\mathbb{R}^{2n}}\mathrm{d}^2\chi_1\ldots\mathrm{d}^2\chi_n\,\tilde{\varepsilon}(z_1,\boldsymbol{\chi}_1)\ldots\tilde{\varepsilon}(z_n,\boldsymbol{\chi}_n)\times$$
$$\times\exp\left[i\sum_{m=1}^{n}\boldsymbol{\chi}_m\mathbf{s}(z_m,\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\zeta}_0)\right]\left[\exp\left(i\sum_{s=1}^{n-1}\sum_{t=s+1}^{n}\frac{\boldsymbol{\chi}_s\boldsymbol{\chi}_t}{2k}\,|z_s-z_t|\right)-\right.$$
$$-\sum_{m=1}^{n}\exp\left(i\sum_{\substack{s=1\\s\neq m}}^{n-1}\sum_{\substack{t=s+1\\t\neq m}}^{n}\frac{\boldsymbol{\chi}_s\boldsymbol{\chi}_t}{2k}\,|z_s-z_t|\right)+$$
$$\left.+\sum_{m=1}^{n-1}\sum_{l=m+1}^{n}\exp\left(i\sum_{\substack{s=1\\s\neq m,l}}^{n-1}\sum_{\substack{t=s+1\\t\neq m,l}}^{n}\frac{\boldsymbol{\chi}_s\boldsymbol{\chi}_t}{2k}\,|z_s-z_t|\right)+\ldots+(-1)^{n-1}n+(-1)^n\right]. \quad (15)$$

Из формулы (15) вытекает оценка для n-го члена разложения: $|u_n|\le(\mu_\varepsilon kL)^n$. Здесь $\mu_\varepsilon=\max|\varepsilon(z,\boldsymbol{\rho})|$ — амплитуда вариаций функции диэлектрической проницаемости, $L=|z_r-z_l|$ — размер слоя с неоднородностями вдоль направления распространения падающего поля (см. рис. 1), $k=2\pi/\lambda$ — волновое число в свободном пространстве. Теперь мы можем записать следующую цепочку неравенств:

$$|U(z_t,\boldsymbol{\zeta};z_0,\boldsymbol{\zeta}_0)|=\left|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{u_n}{n!}\right|\le\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|u_n|}{n!}\le\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\mu_\varepsilon kL)^n}{n!}<\exp(\mu_\varepsilon kL).$$

Отсюда вытекает, что ряд (12) для поля парциальной волны (9) сходится равномерно (по признаку Вейерштрасса). Поэтому (9) с учётом (12)–(15) является строгим разложением в ряд поля

парциальной волны. Кроме того, применяя прямое ДВПФ (6) к выражению (9), в силу равномерной сходимости ряда (12) мы можем интегрировать почленно, и тогда получаем строгое представление для функции Грина параболического уравнения (1) в виде сходящегося ряда. Это представление мы будем использовать для анализа границ применимости выражений (2) и (8).

3. АНАЛИЗ ПОПРАВОЧНЫХ ЧЛЕНОВ И ОЦЕНКА ГРАНИЦ ПРИМЕНИМОСТИ

Как следует из формулы (9), условие применения выражения (8) для поля парциальной волны заключается в малости поправочного члена $U(z_t, \boldsymbol{\zeta}; z_0, \boldsymbol{\zeta}_0)$ по сравнению с единицей. Для этого, с учётом структуры ряда (12), достаточно потребовать выполнения неравенства $u_n(z_t, \boldsymbol{\zeta}; z_0, \boldsymbol{\zeta}_0)| \ll \ll 1$ для любого $n \geq 1$. Если воспользоваться достаточно грубой оценкой $|u_n| \leq (\mu_\varepsilon kL)^n$ для общего члена ряда (15), то можно получить условие применимости формулы (8)

$$(\mu_\varepsilon kL)^2 \ll 1. \tag{16}$$

При этом условии ряд (12) становится асимптотическим с малым параметром разложения $\mu_\varepsilon kL \ll \ll 1$. Неравенство (16) совпадает с условием применимости первого приближения метода малых возмущений [1]. Действительно, оценка модуля фазы парциальной волны (8) имеет следующий вид:

$$\left| \frac{ik}{2} \int\limits_{z_0}^{z_t} \varepsilon[z, \mathbf{s}(z, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\zeta}_0)]\, \mathrm{d}z \right| \leq \mu_\varepsilon kL.$$

Тогда из (16) следует условие малости флуктуаций фазы и наоборот. Поэтому при малых флуктуациях фазы парциальной волны метод ДВПФ эквивалентен первому приближению метода малых возмущений. Важно отметить, что условие (16) выполняется без привлечения дополнительных ограничительных соотношений между длиной волны падающего излучения λ, характерным размером неоднородностей l_ε и протяжённостью неоднородного слоя L, за исключением условия $\lambda/l_\varepsilon \ll 1$, которое выполняется в рамках малоуглового приближения [1]. Поэтому границы применимости метода ДВПФ могут быть только шире, чем границы применимости первого приближения метода малых возмущений.

Условие (16) налагает жёсткие ограничения на интенсивность неоднородностей, что существенно ограничивает применение метода ДВПФ на практике. Однако при некоторых дополнительных предположениях мы можем получить существенно менее жёсткие условия применимости рассматриваемого метода. Пусть соотношение между длиной волны, размерами неоднородностей и протяжённостью неоднородного слоя таково, что выражение в фигурных скобках в (14) близко к нулю во всей области интегрирования, т. е. выполняется условие

$$\lambda L/l_\varepsilon^2 \ll 1. \tag{17}$$

Здесь l_ε — характерный поперечный (в плоскости xy) масштаб неоднородностей.

В этом случае мы можем разложить последнюю экспоненту в формуле (14) в ряд Тейлора и, ограничившись первым ненулевым членом, получить

$$u_2(z_t, \boldsymbol{\zeta}; z_0, \boldsymbol{\zeta}_0) = \frac{ik}{8} \int\limits_{z_0}^{z_t} \mathrm{d}z_1 \int\limits_{z_0}^{z_t} \mathrm{d}z_2\, \nabla_{\boldsymbol{\rho}} \varepsilon[z_1, \mathbf{s}(z_1, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\zeta}_0)] \times$$

$$\times \nabla_{\boldsymbol{\rho}} \varepsilon[z_2, \mathbf{s}(z_2, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\zeta}_0)]\, |z_1 - z_2| + \mathrm{O}\left(\frac{\lambda^2 L^2}{l_\varepsilon^4}\right). \quad (18)$$

Тогда условие применимости выражения (8) $|u_2(z_t, \boldsymbol{\zeta}; z_0, \boldsymbol{\zeta}_0)| \ll 1$ запишется в следующем виде:

$$(\mu_\varepsilon k L)^2 \ll \frac{l_\varepsilon^2}{\lambda L}. \quad (19)$$

Если воспользоваться аналогичным разложением экспонент, стоящих в квадратных скобках под интегралом в формуле (15), то можно получить следующую оценку для общего члена ряда (12) при условии выполнения неравенства (17):

$$|u_n(z_t, \boldsymbol{\zeta}; z_0, \boldsymbol{\zeta}_0)| \le (\mu_\varepsilon k L)^n \, (\lambda L / l_\varepsilon^2)^{n-1}.$$

Тогда ряд (12) будет также асимптотическим, но малым параметром разложения будет

$$\mu_\varepsilon \, (L^2 / l_\varepsilon^2) \ll 1. \quad (20)$$

При этом условие (19) может быть записано также в следующем виде:

$$\mu_\varepsilon^2 \, (L^4 / l_\varepsilon^4) \ll \lambda L / l_\varepsilon^2.$$

Из полученного неравенства с учётом условия (17) следует, что условие (20) является следствием соотношения (19), так что в дальнейшем мы можем рассматривать только условие (19).

По сравнению с (16) условия (17) и (19) налагают более слабые ограничения на параметры неоднородностей. Неравенства (17) и (19) не содержат величины дальности распространения $Z \ge L$. Следовательно, они не налагают каких-либо условий на соотношение между масштабом неоднородностей и радиусом первой зоны Френеля плоской волны $l_{\mathrm{F}} = \sqrt{\lambda Z}$. Поэтому в наиболее интересном на практике случае, когда толщина слоя с неоднородностями представляет собой небольшую, но конечную величину (ситуация не сводится к случаю фазового экрана), условия (17), (19) будут выполняться, когда размеры неоднородностей сравнимы или даже меньше радиуса первой зоны Френеля. Такая ситуация возникает, когда источники и/или приёмники расположены вдали от неоднородного слоя (см. рис. 1).

Следует отметить, что, как было показано выше, в силу равномерной сходимости ряда (12) условия (16) и (19) справедливы также и для самого поля (2), поскольку строгое представление (3) получается применением прямого ДВПФ (6) к выражению (9) с последующим почленным интегрированием ряда.

Важным частным случаем условий (17) и (19) является ситуация, в которой $L \sim l_\varepsilon$, когда рассеяние происходит на отдельных неоднородностях. Тогда соотношение (17) переходит в неравенство $\lambda / l_\varepsilon \ll 1$, которое является одним из условий применимости метода параболического уравнения [1] и поэтому не даёт дополнительных ограничений применимости формул (2) и (8). Следовательно, остаётся только условие (19), которое в данном случае принимает вид

$$\mu_\varepsilon^2 \ll \lambda / l_\varepsilon, \quad (21)$$

т. е. интенсивность неоднородности должна быть много меньше величины угла рассеяния на этой неоднородности.

Важным отличием соотношений (17) и (19) от неравенства (16) является их применимость в случае больши́х флуктуаций фазы парциальных волн (8), т. к. эти неравенства совместимы с условием $\mu_\varepsilon k L \ge 1$. Следовательно, формула (2) учитывает не только эффекты френелевской

дифракции на неоднородностях среды распространения, но и геометрооптические фокусировки поля, возникающие при значительных флуктуациях фазы парциальных волн, что и обеспечивает возможность использования метода ДВПФ в тех случаях, когда применимы метод геометрической оптики и/или метод фазового экрана [3].

Условие (19) может быть также получено и без использования разложения в ряд (12) поля парциальной волны (7). Для этого используем в формуле (10) следующее приближение, справедливое при условии выполнения неравенства (17):

$$\varepsilon\left[z, \mathbf{s}(z, \boldsymbol{\zeta}+\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\zeta}_0+\boldsymbol{\rho}_0) + \int\limits_z^{z_t} \mathbf{v}(t)\,\mathrm{d}t\right] - \varepsilon[z, \mathbf{s}(z, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\zeta}_0)] = \\ = \nabla_{\boldsymbol{\rho}}\varepsilon[z, \mathbf{s}(z, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\zeta}_0)]\left[\mathbf{s}(z, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_0) + \int\limits_z^{z_t} \mathbf{v}(t)\,\mathrm{d}t\right] + \mathrm{O}\left(\frac{\lambda^2 L^2}{l_\varepsilon^4}\right).$$

Здесь были использованы следующие соотношения, выполняющиеся в методе параболического уравнения [1]: $|\mathbf{v}(t)| = \theta = \mathrm{O}(\lambda/l_\varepsilon)$, $|\boldsymbol{\rho}| = \mathrm{O}(\lambda L/l_\varepsilon)$ и $\lambda/l_\varepsilon \ll 1$. Мы обозначили через θ величину угла рассеяния на отдельной неоднородности. Тогда, подставляя получившееся разложение в (10), получим выражение, подобное (9):

$$G^*(z_t, \boldsymbol{\zeta}; z_0, \boldsymbol{\zeta}_0) \approx \frac{k}{2\pi i Z}\exp\left\{\frac{ik}{2}\int\limits_{z_0}^{z_t}\varepsilon[z, \mathbf{s}(z, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\zeta}_0)]\,\mathrm{d}z\right\} \times \\ \times \exp\left\{\frac{ik}{16}\int\limits_{z_0}^{z_t}\mathrm{d}z_1\int\limits_{z_0}^{z_t}\mathrm{d}z_2\,\nabla_{\boldsymbol{\rho}}\varepsilon[z_1, \mathbf{s}(z_1, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\zeta}_0)]\,\nabla_{\boldsymbol{\rho}}\varepsilon[z_2, \mathbf{s}(z_2, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\zeta}_0)]\,|z_1 - z_2|\right\}.$$

Теперь условием применимости выражения (8) будет следующее неравенство:

$$\left|\frac{k}{16}\int\limits_{z_0}^{z_t}\mathrm{d}z_1\int\limits_{z_0}^{z_t}\mathrm{d}z_2\,\nabla_{\boldsymbol{\rho}}\varepsilon[z_1, \mathbf{s}(z_1, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\zeta}_0)]\,\nabla_{\boldsymbol{\rho}}\varepsilon[z_2, \mathbf{s}(z_2, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\zeta}_0)]\,|z_1 - z_2|\right| \ll 1.$$

Из этого неравенства получаем снова условие (19).

Следует отметить, что в соответствии с выражениями (13) и (14) поправки к методу ДВПФ имеют порядок $\mathrm{O}(\mu_\varepsilon^2)$. Это является заметным отличием от других известных эвристических методов интегрального представления поля, таких, как фазовые приближения методов интерференционного интеграла, Маслова [7] и Гюйгенса—Кирхгофа [8, 9], имеющих порядок поправок $\mathrm{O}(\mu_\varepsilon)$ [7, 8]. В данных методах используется теория возмущений для фазы парциальных волн, но не учитываются возмущения амплитуды, обусловленные наличием неоднородностей. Этот факт позволяет предположить, что область применимости метода ДВФП будет не меньше, чем у указанных выше эвристических методов.

Полезно привести численные оценки для параметров среды распространения и падающего излучения, при которых справедливы условия (19), а также (21). Так, например, для приземного слоя атмосферы (высоты до нескольких десятков метров) и оптического излучения ($\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см) характерные параметры турбулентности имеют следующие значения [1]: $\mu_\varepsilon = 10^{-5} \div 10^{-6}$, внутренний масштаб турбулентности $l_0 = 0{,}5 \div 10$ см, внешний масштаб турбулентности $L_0 = 1 \div 10$ м. Используя эти значения, получим, что неравенства (19) выполняются вплоть

до $L = 10$ м. В свою очередь, условие (21) выполняется для таких параметров с хорошим запасом, даже если считать, что $l_\varepsilon = L_0 = 10$ м. Поэтому имеется принципиальная возможность получить в качестве решения обратной дифракционной томографической задачи характерное пространственное распределение неоднородностей в приземном атмосферном слое.

Другим интересным и практически важным случаем является распространение GPS-сигнала через ионосферу Земли [10]. В качестве характерных параметров излучения и ионосферных неоднородностей можно принять следующие значения [9, 10]: $\lambda = 0{,}2$ м, $\mu_\varepsilon = 10^{-5} \div 10^{-6}$, $l_\varepsilon \approx 100$ м. Отсюда получаем, что условия (19) справедливы вплоть до $L = 100$ км, что сравнимо с вертикальным размером ионосферных слоёв [9]. Что касается неравенства (21), то оно также выполняется, даже если считать, что $l_\varepsilon \approx 100$ км. Таким образом, неравенства (19) и (21) выполняются во многих практически важных случаях, что позволяет рассматривать метод ДВПФ в качестве подходящего кандидата для решения задач дифракционной томографии [3, 11].

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведённый анализ границ применимости метода ДВПФ показал, что в тех случаях, когда выполняется неравенство (17), область применимости метода ограничена условием (19). В этом случае размер слоя с неоднородностями вдоль направления распространения не очень большой по сравнению с характерным масштабом неоднородностей. При этом необходимые ограничения на амплитуду неоднородностей выполняются для ряда практически важных случаев. Следует также отметить, что условия (17) и (19) не налагают дополнительных ограничений на соотношение между пространственным масштабом неоднородностей l_ε и радиусом первой зоны Френеля $l_\mathrm{F} = \sqrt{\lambda Z}$ по отношению к известному условию применимости параболического уравнения [1]: $(l_\mathrm{F}/l_\varepsilon)^2 \ll (l_\varepsilon/\lambda)^2$, и поэтому представление (2) можно использовать для оценки поля в среде с неоднородностями, размеры которых равны или меньше радиуса первой зоны Френеля. Кроме того, неравенства (17) и (19) выполняются в таких условиях, когда возможны бо́льшие флуктуации фазы парциальных волн в представлении (2), и выражение (2) не сводится к формулам метода малых возмущений. Таким образом, при выполнении неравенств (17) и (19), представление для поля (2) учитывает эффекты френелевской дифракции на неоднородностях с характерными размерами порядка и меньше радиуса первой зоны Френеля, а также геометрооптическую фокусировку поля, обусловленную большими вариациями фаз парциальных волн. Это обстоятельство играет важную роль при решении обратных задач, т. к. позволяет восстанавливать параметры достаточно мелкомасштабных неоднородностей с размерами даже меньшими радиуса первой зоны Френеля l_F [11].

Ещё менее жёстким является условие (21), которое соответствует случаю рассеяния на отдельных неоднородностях. Приведённые в статье численные оценки допустимой толщины слоя с неоднородностями для ряда случаев, представляющих практический интерес, показали применимость метода ДВПФ для решения задач дифракционной томографии.

В тех случаях, когда неравенство (17) не выполняется, границы применимости метода ДВПФ описываются соотношением (16) и соответствуют условию применимости первого приближения метода малых возмущений. В этом случае флуктуации фазы парциальных волн в представлении (2) малы, и метод ДВПФ сводится к методу малых возмущений. Такая ситуация возможна, например, когда метод ДВФП применяется для расчёта поля в протяжённой среде: $L/l_\varepsilon \sim l_\varepsilon/\lambda$.

В статье, помимо условий применимости метода ДВПФ, также найдены поправки к формулам (2) и (8) в виде сходящегося ряда (12)–(15). В дальнейшем это может быть использовано для обобщения представления (2) с целью учёта вариаций траектории, которые используются в представлении поля парциальной волны (8) в приближении геометрической оптики и тем самым

повышения точности учёта влияния неоднородностей.

Следует также отметить, что полученные результаты дают достаточные условия для границ применимости рассматриваемого метода ДВПФ в динамических задачах. Очевидно, что в частных ситуациях область применимости метода может оказаться заметно шире, однако рассмотрение подобных случаев выходит за рамки данной статьи.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (проект 14.740.11.0078 федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант 12–02–00249).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. Случайные поля. М.: Наука, 1978.
2. Kravtsov Yu. A., Tinin M. V. // Radio Sci. 2000. V. 35. P. 1 315.
3. Tinin M. V., Kravtsov Yu. A. // Plasma Phys. Control. Fusion. 2008. V. 50. P. 1.
4. Charnotskii M. I., Gozani J., Tatarskii V. I., Zavorotny V. U. // Progr. Opt. 1993. V. 32. P. 205.
5. Kravtsov Yu. A., Tinin M. V., Knizhin S. I., Kulizhsky A. V. // 30th General Assembly and Scientific Symposium of International Union of Radio Science (URSIGASS-2011), Istanbul, Turkey, August 13–20, 2011: Symposium Proceedings.
6. Samelsohn G. // Proc. 5th European Conf. Antennas Propagat. 2011. P. 1 823.
7. Tinin M. V. // Waves in Random Media. 1998. V. 8. P. 329.
8. Banakh V. A., Mironov V. L. // Opt. Lett. 1977. V. 1. P. 172.
9. Кравцов Ю. А., Фейзулин З. И., Виноградов А. Г. Прохождение радиоволн через атмосферу Земли. М.: Радио и связь, 1983.
10. Kim B. C., Tinin M. V. // J. Geod. 2011. V. 85. P. 159.
11. Kravtsov Yu. A., Tinin M. V., Kulizhsky A. V. // Fusion Engineering and Design. 2009. V. 84. P. 1 113.

Поступила в редакцию 27 июля 2012 г.; принята в печать 30 августа 2012 г.

ABOUT THE METHOD OF INTEGRAL FIELD REPRESENTATION AS THE DOUBLE WEIGHTED FOURIER TRANSFORM IN THE PROBLEMS OF WAVE PROPAGATION IN INHOMOGENEOUS MEDIA

A. V. Kulizhsky and M. V. Tinin

An exact path representation for the parabolic equation Green function has been used in this paper to determine boundaries of validity of a method for integral field representation as the double weighted Fourier transform (DWFT). Estimates we have obtained imply that the DWFT method takes into account diffraction effects by inhomogeneities with a scale being equal and less than the radius of the first plane wave Fresnel zone and may be exploited to solve inverse problems of reconstructing inhomogeneous medium parameters from data measured in source and receiver planes.