

УДК 537.87+535.012+533.9

## ВОЛНОВЫЕ ПУЧКИ В ПЛАВНО НЕОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ: ОДНОМОДОВОЕ ОПИСАНИЕ (ЧАСТЬ 1)

*А. А. Балакин*

Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород, Россия

В данном цикле работ предложен метод построения приближённого решения уравнений Максвелла в плавно неоднородных анизотропных гиротропных средах с учётом аббераций, пространственной дисперсии и поглощения. Получены эволюционные уравнения для волновых пучков и разработана методика их численного решения. Показана связь с уравнениями безабберационного приближения. В первой части цикла предложена процедура построения приближённого скалярного волнового уравнения для описания одномодового распространения волновых пучков.

### ВВЕДЕНИЕ

Целью настоящего цикла работ является обобщение квазиоптического приближения для описания распространения электромагнитного излучения в плавно неоднородных анизотропных и гиротропных средах с диссипацией. Одним из важнейших примеров таких сред является магнитоактивная плазма ионосферы и магнитосферы Земли, а также плазма в установках управляемого термоядерного синтеза. Распространение волновых пучков в поглощающих средах относится в настоящее время к одной из немногих «недоисследованных» областей в физике линейных волновых процессов. Вместе с тем актуальность этой задачи очевидна для целого ряда направлений практической деятельности и, в частности, для осуществления управляемого термоядерного синтеза. В настоящее время большие усилия учёных из разных стран прилагаются для завершения проекта системы электронно-циклотронного нагрева в ИТЭР [1–3]. Для реализации этой системы важным является контроль и подавление неклассических тиринг-мод и пилообразных колебаний. Для решения этой задачи требуется оптимизация системы ввода электронно-циклотронного излучения для достижения минимальной возможной области энерговыклада [1, 4]. Локализация достигается за счёт использования резонансного электронно-циклотронного поглощения, имеющего резкую зависимость от координат и волновых векторов излучения, обусловленную его сильной пространственной неоднородностью и дисперсией. Поэтому для реализации данного проекта необходимо проведение расчётов распространения волновых пучков различными методами.

Существующие методы численного моделирования распространения микроволнового излучения в плазме, в лучшем случае, ограничены рассмотрением системы геометрикооптических лучей [5, 6] или квазиоптикой гауссовых пучков с вычислением поглощения по центральному лучу [7, 8]. Хотя было проведено тщательное сравнение этих методов друг с другом [9], но ни один из них не способен правильно описать распространение пучка в средах с сильной пространственной дисперсией, характерной для области электронно-циклотронного резонанса [10]. В ряде случаев такие приближения не оправданы и приводят к несоответствию численных расчётов с реальным поведением волнового поля. Так, например, даже незначительное, на первый взгляд, расхождение в определении области энерговыклада (буквально в несколько сантиметров) может оказаться весьма существенным в экспериментах по стабилизации тиринг-мод посредством локального нагрева потенциально опасного для развития неустойчивости «магнитного острова» [11].

# 1. ОБОБЩЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ ДЛЯ ВОЛНОВЫХ ПУЧКОВ

Существуют различные способы поиска комплексной амплитуды монохроматического (т.е. с временной зависимостью, определяемой множителем  $\exp(i\omega t)$ ) электрического поля волнового пучка, распространяющегося в неоднородной среде. Среди них можно выделить три группы: методы, обобщающие геометрическую оптику (см. [12] и цитируемую там литературу); методы, использующие разложение по плоским волнам [13]; методы для плавной огибающей (метод Леонтовича [14]). Продемонстрируем достоинства и недостатки этих подходов на примере уравнения Гельмгольца ( $k_0 = \omega/c$ )

$$\Delta U + k_0^2 \varepsilon(\mathbf{r})U = 0 \quad (1)$$

с граничными условиями для амплитуды  $U$  и её нормальной производной  $\mathbf{n}\nabla U$ , заданными на некоторой плоскости, определяемой уравнениями  $\ell(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$ , и равными нулю на бесконечности.

Одним из наиболее популярных методов его решения для широких в масштабе длины волны волновых пучков (т.е. пучков с поперечными масштабами  $\Lambda_\perp \gg \lambda$ ) является геометрическая оптика. В этом случае поле ищется в виде  $U = A \exp(i\varphi)$ , и в первом порядке малости по  $1/(k_0 \Lambda_\perp)$  получается система уравнений [15]

$$(\nabla\varphi)^2 = k_0^2 \varepsilon, \quad \text{div}(A^2 \nabla\varphi) = 0. \quad (2)$$

Первое уравнение (уравнение эйконала) задаёт перенос фазы вдоль лучей  $\mathbf{r}(\tau)$ ,  $\mathbf{p}(\tau)$ , подчиняющихся уравнениям Гамильтона

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}, \quad H \equiv p^2 - \varepsilon(\mathbf{r}) = 0. \quad (3)$$

В результате решение для фазы записывается в виде интеграла вдоль лучей

$$\varphi = k_0 \int \ell \chi \mathbf{p}(\mathbf{r}_{0\perp}; \tau) d\tau, \quad (4)$$

где  $\ell = \dot{\mathbf{r}}/|\dot{\mathbf{r}}|$ ,  $\chi = |\dot{\mathbf{r}}|$ .

Начальными условиями для семейства геометро-оптических лучей, удовлетворяющих уравнениям (3), обычно является координата  $\mathbf{r}_\perp$  на плоскости начальных условий для уравнения (1) и соответствующие ей амплитуда  $A = |U(\mathbf{r}_\perp)|$  и значение волнового вектора  $\mathbf{p}(\mathbf{r}_\perp) = [U^* (\ell \nabla U)/(ik_0) + \text{к.с.}]/|U|^2 = \ell \nabla \varphi/k_0$  в данной точке. В реальных расчётах число геометро-оптических лучей выбирают конечным, а в ряде случаев ограничиваются вообще только центральным лучом, стартовающим из положения центра масс волнового пучка с центральным значением волнового вектора  $\mathbf{p}_0 \equiv \mathbf{p}(\tau = 0)$ . Отметим, что величина гамильтониана  $H$ , в силу выбора начальных условий для геометро-оптического луча, равна нулю в начальной точке и остаётся равной нулю на всём геометро-оптическом луче.

Метод геометрической оптики встречает большие трудности вблизи точек пересечения лучей (фокусов и каустик) и в неоднородных средах с анизотропией или с пространственной дисперсией, когда на распространение лучей влияет не только неоднородность среды (рефракция), но различие их волновых векторов (дисперсия). Частично обойти данные трудности позволяет включение в приближение геометрической оптики дифракционных эффектов.

В рамках уравнения эйконала (2) для среды без диссипации, когда  $\varepsilon$  — действительная функция, можно продвинуться дальше и учесть дифракцию пучка, вводя «мнимую» компоненту фазы, отвечающую неоднородности амплитуды пучка. Это можно сделать двумя способами.

Во-первых, можно искать решение в виде  $U = A \exp[S_I(\mathbf{r})] \exp(i\varphi)$ , что соответствует замене вектора  $\mathbf{p} = \nabla\varphi \rightarrow \mathbf{p} + i\nabla S_I$ , и записать для него уравнения, аналогичные (3) [6, 16]:

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = -\frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}}, \quad F = H - \frac{1}{2} \frac{\partial S_I}{\partial \mathbf{r}_i} \frac{\partial S_I}{\partial \mathbf{r}_j}, \quad (5)$$

дополнив их уравнением для «мнимой» части эйконала  $S_I$

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}_i} \frac{\partial S_I}{\partial \mathbf{r}_i} = 0.$$

Последнее уравнение означает, что вдоль геометрико-оптических лучей величина  $S_I$  остаётся неизменной и задаётся на плоскости начальных условий формулой  $S_I = \ln[A(\mathbf{r}_\perp)/A(\mathbf{r}_{0\perp})]$ , играя роль амплитуды пучка. Аппроксимируя реальный профиль пучка набором лучей (и тем самым определяя значения  $S_I$  на лучах), можно учесть его дифракцию при численном интегрировании уравнений (5).

Второй способ состоит в введении комплексной «ширины» волнового пучка  $\sigma_{ij}$ , являющейся коэффициентом перед квадратичным членом разложения «комплексного» эйконала  $\varphi = -i \ln[U(\mathbf{r})/U(\mathbf{r}_0)]$  вблизи центрального геометрико-оптического луча [8]:

$$\varphi \rightarrow \varphi(\tau) + \kappa_i \xi_i + \frac{1}{2} \sigma_{ij}(\tau) \xi_i \xi_j, \quad \xi_i = [r_j - r_j(\tau)] (\delta_{ij} - l_i l_j).$$

Здесь  $\xi_i$  — координата поперёк луча, задаваемого функциями  $r_j(\tau)$ . Фактически это соответствует параболической зависимости  $S_I = \text{Im} \sigma_{ij}(\tau) \xi_i \xi_j / 2$  в уравнении (5).

Уравнение для  $\sigma_{ij}$  получается из приравнивания нулю полной второй производной по координатам от уравнения эйконала:

$$\frac{d\sigma_{ij}}{d\tau} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} + \sigma_{jk} \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial p_k} + \sigma_{ik} \frac{\partial^2 H}{\partial x_j \partial p_k} + \sigma_{ik} \sigma_{lj} \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial p_l} \right). \quad (6)$$

Производные берутся на центральном геометрико-оптическом луче  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\tau)$ . Начальными условиями служат начальная ширина и кривизна фазового фронта волнового пучка  $\sigma_{ij}(\tau = 0) = 1/[2U(\mathbf{r}_0)] \partial^2 U / (\partial \xi_i \partial \xi_j)$ . Параболическое разложение фазы позволяет описывать распространение и дифракцию гауссовых пучков, основываясь на решении системы обыкновенных дифференциальных уравнений (6). В англоязычной литературе данный метод называют beam tracing.

Очевидно, что оба приближённых метода построения решения (5) и (6) справедливы только для плавных волновых пучков, распространяющихся в плавных на масштабе пучка средах с размерами неоднородностей  $L \gg \Lambda_\perp \gg \lambda$ . Кроме того, они не описывают влияние пространственной дисперсии волновой моды или среды на профиль волнового пучка. Действительно, оба метода ограничены использованием только лишь второго (параболического) члена в эйконалах. Более того, учёт абберраций, т. е. более высоких членов разложения эйконала, встречает значительные сложности уже на этапе вывода уравнений.

Наконец, можно использовать (4) при построении решения для сколь угодно узких волновых пучков, основываясь на разложении в ряд Фурье. Действительно, для каждой пространственной гармоники начального (при  $\tau = 0$ ) фурье-спектра пучка можно построить свой геометрико-оптический луч с начальным импульсом  $\mathbf{p}_0 + \mathbf{q}$  ( $\mathbf{p}_0$  — импульс «центрального» луча) и начальной координатой в центре масс пучка, каждому лучу сопоставить решение вида (4) для квазиплоской волны и свернуть их обратно с помощью процедуры, аналогичной обратному преобразованию Фурье. Именно такой подход был реализован в [13].

Фактически, этот метод близок к разложению по плоским волнам в однородной среде. Его достоинством является возможность точного описания дифракции и дисперсии волнового пучка в однородной среде. Однако, в неоднородной среде, когда нарушается применимость (4), точность получающегося решения падает на расстоянии порядка минимального радиуса кривизны используемых геометро-оптических лучей. Другими словами, метод ограничен трассами с  $\chi\tau \ll \ll R = |\dot{\mathbf{r}}|^2/|\ddot{\mathbf{r}}|$ .

## 2. ВЕКТОРНОЕ УРАВНЕНИЕ

Переход от скалярного уравнения Гельмгольца (1) к векторному уравнению (уравнению Максвелла)

$$[\nabla, [\nabla, \mathbf{E}]] + k_0^2 \mathbf{D} = 0, \quad D_i = \varepsilon_{ij} E_j \quad (7)$$

порождает новое ограничение — необходимость найти не одно скалярное решение, а одновременно три скалярных функции  $E_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ), являющихся решениями векторного уравнения (7).

Известно, что в рамках геометро-оптического приближения для выбранного типа волны такое решение строится в виде [15]

$$E_j = e_j U, \quad (8)$$

где скалярная амплитуда  $U$  находится с помощью уравнений геометрической оптики с гамильтонианом  $H$ . Здесь  $e_j$  и  $H$  — собственный вектор и собственное значение матрицы

$$L_{ij} = p^2 \delta_{ij} - p_i p_j - \varepsilon_{ij}, \quad L_{ij} e_j = e_i H. \quad (9)$$

Вектор  $e_j$  также называют вектором поляризации. В силу линейности уравнения без потери общности можно считать, что  $e_j$  нормирован на 1:

$$e_i^* e_i = 1. \quad (10)$$

В случае изотропной среды (т. е. при  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon \delta_{ij}$ ) имеет место поляризационное вырождение и для определения изменения поляризации вдоль луча необходимо привлекать дополнительные соображения (например, закон Рытова [15, 17]).

Наконец, необходимо сделать несколько замечаний о геометро-оптическом гамильтониане и соответствующем ему уравнении эйконала

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = H(\mathbf{r}, \nabla\varphi) = 0. \quad (11)$$

Очевидно, что и в этом случае можно, в соответствии с (3), построить геометро-оптические лучи, развить комплексную геометрическую оптику [5, 6], аналогичную (5), и найти уравнение для комплексной ширины гауссова пучка [8], аналогичное (6).

Более того, в среде без диссипации в качестве геометро-оптического гамильтониана можно брать не собственное значение матрицы  $L_{ij}$  (которое достаточно трудно найти численно), а её детерминант,  $\det \|L_{ij}\|$ . Однако в диссипативной среде эта свобода пропадает. Поскольку существуют ситуации, например, в области электронно-циклотронного резонанса, когда, несмотря на относительно слабое поглощение  $G = \text{Im } H \ll 1$ , величины производных  $\partial G/\partial \xi$ ,  $\partial G/\partial q$  могут быть велики [18, 19] и приводить к появлению заметной ошибки в положении геометро-оптического луча и, соответственно, во всех зависящих от него формулах.

К сожалению, использование решений скалярной задачи, даже найденных с достаточно высокой точностью (5), (6), не позволяет найти с такой же точностью решение векторного уравнения (7), если использовать только лишь связь (8). Дело в том, что выражение (8) навязывает

единственное направление электрического поля для всего пучка, хотя в действительности оно может и отличаться в соседних с геометро-оптическим лучом точках.

В работе [20] было показано, что для сохранения точности определения электрического поля пучка необходимо определять его направление с той же точностью, что и амплитуду волнового пучка. Так, используя разложение уравнения (7) по параметру  $k_0\Lambda \gg k_0w \gg 1$ , где  $\Lambda$  — характерный масштаб,  $w$  — ширина пучка, было получено, что для первого порядка (аналог уравнения эйконала (2))

$$E_j = e_j u + \frac{1}{ik_0} \frac{\partial e_j}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial e_j}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{x} u,$$

для второго порядка (аналог (6))

$$E_j = e_j u + \frac{1}{ik_0} \frac{\partial e_j}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial e_j}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{x} u + \frac{1}{2} \frac{\partial e_j}{\partial \mathbf{x}^2} \mathbf{x}^2 u - \frac{1}{2k_0^2} \frac{\partial e_j}{\partial \mathbf{p}^2} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}^2}$$

и т. д.

### 3. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ДИСПЕРСИЯ

В общем случае среда может обладать пространственной дисперсией (далее для краткости будем называть её просто дисперсией), т. е. связь векторов  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  в уравнении (7) может оказаться более сложной:

$$D_i = \hat{\varepsilon}_{ij}[E_j] \equiv \int \tilde{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r} - \mathbf{r}') E_j(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \equiv \iint \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \exp[ik_0 \mathbf{p}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] E_j(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' d\mathbf{p}. \quad (12)$$

Зависимость ядра оператора от разности  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$  отвечает дисперсии среды, когда электрическая индукция  $\mathbf{D}(\mathbf{r})$  зависит от электрического поля не только в точке  $\mathbf{r}$ , но и в соседних точках. Явная зависимость ядра от  $\mathbf{r}$  отражает неоднородность среды. Здесь и далее символом « $\hat{\phantom{x}}$ » будет обозначаться оператор, действующий на поле, а соответствующие ядра операторов будут обозначаться таким же символом без « $\hat{\phantom{x}}$ ». Тензор  $\varepsilon_{ij}$  находится, вообще говоря, из рассмотрения микропроцессов, проходящих в среде под действием электромагнитного поля. Если вид оператора  $\varepsilon_{ij}$  известен, то можно развить метод построения приближённого решения уравнений Максвелла (см. раздел 5). В этом разделе будет получен ряд требований к виду оператора  $\varepsilon_{ij}$  и предложен его простейший операторный вид, удовлетворяющий этим требованиям.

Следует отметить, что нахождение этого оператора в общем случае неоднородных сред с пространственной дисперсией сопряжено со значительными трудностями. Для нахождения ядра  $\varepsilon_{ij}$  необходимо решить кинетические уравнения, описывающие отклик среды на электромагнитное поле, что эквивалентно решению самосогласованной задачи о поведении системы «поле—среда». Решение такой задачи существенно облегчается в плавно неоднородных средах, в которых  $k_0^{-1}(\mathbf{p} \partial \varepsilon_{ij} / \partial \mathbf{r}) \ll 1$ , когда среду можно считать почти однородной, а зависимость от координат является локально однородной, т. е. появляется благодаря зависимости от координат параметров  $\mathbf{v}$  среды:

$$\varepsilon_{ij}^0(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \varepsilon_{ij}^0[\mathbf{p}; \mathbf{v}(\mathbf{r})].$$

Реальный тензор  $\varepsilon_{ij}$  должен переходить в  $\varepsilon_{ij}^0$  в пределе  $k_0^{-1}(\mathbf{p} \partial \varepsilon_{ij} / \partial \mathbf{r}) \rightarrow 0$ .

Вторым условием может служить требование эрмитовости оператора  $\hat{\varepsilon}_{ij}$  в средах без поглощения. В общем случае неоднородной среды с пространственной дисперсией нельзя сделать вывод об отсутствии поглощения или усиления волны без привлечения сторонних соображений о микромоде среды или экспериментальных данных о распространении волн в ней. К настоящему

времени известно несколько случаев, когда неоднородность среды приводит к появлению новых типов волн, которых не было в однородной среде. Наиболее ярким примером могут служить дрейфово-диссипативные волны в неоднородной магнитоактивной плазме [21]. Такие волны часто оказываются неустойчивыми, что приводит к обмену энергией между ними и электромагнитной волной, распространяющейся в такой среде в определённых (резонансных) условиях.

Однако, если известно, что среда прозрачная (т. е. диссипации нет), требование эрмитовости оператора возникает естественным образом. Точнее, для выполнения закона сохранения энергии должна выполняться связь [22] «эрмитовой»  $\varepsilon^h$  и «антиэрмитовой»  $\varepsilon^a$  компонент тензора:

$$2i\varepsilon_{ij}^a = \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}^h}{\partial r_k \partial p_k}. \quad (13)$$

Это соответствует тому, что оператор  $\widehat{x\hat{p}}$  должен быть записан в эрмитовом виде  $\widehat{x\hat{p}}[U] = x \partial U / \partial x + U/2 \equiv (x \partial U / \partial x + \partial(xU) / \partial x) / 2$ . Здесь и далее подразумевается суммирование по повторяющимся индексам.

Дополнительно можно наложить условие симметрии  $r \leftrightarrow p$ : вид операторов, построенных по функциям  $g(\mathbf{p}, \mathbf{r})$  и  $g(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ , должен быть одинаковым с точностью до замены  $\hat{r} \leftrightarrow \hat{p}$ . К сожалению, я не знаю физических причин для выполнения симметрии  $r \leftrightarrow p$ . Однако уравнение, полученное в [20] для холодной магнитоактивной плазмы, этой симметрии удовлетворяет.

Эти три требования позволяют однозначно определить вид оператора  $\hat{\varepsilon}_{ij}$  с точностью до членов, пропорциональных  $r^2 p^2 \leftrightarrow r^2 \partial^2 / \partial r^2$ . Однозначное выражение для более высоких членов разложения невозможно без привлечения информации о микромоде среды. Эта ситуация аналогична квантовой механике, когда одному классическому гамильтониану соответствует бесконечное множество квантовомеханических уравнений [23]. Очевидно, что на достаточно длинных трассах в много дифракционных длин, когда  $\tau \geq k_0 / [\partial^4 \varepsilon / (\partial x^2 \partial p^2)]$ , влияние неучтённых членов разложения может исказить профиль пучка. Однако в экспериментах обычно ограничиваются относительно короткими трассами в несколько дифракционных длин из-за больших технологических трудностей в создании фокусирующих систем большой апертуры.

Необходимо заметить, что в ряде случаев неопределённость построения оператора  $\varepsilon_{ij}$  отсутствует или достаточно мала. Например, в магнитоактивной плазме токамаков параметры плазмы однородны вдоль магнитного поля, а пространственная дисперсия связана с направлением волнового вектора вдоль магнитного поля. В результате, поворотом системы координат оператор  $\varepsilon_{ij}$  можно привести к виду  $\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\parallel + \mu_B \mathbf{p}_\perp)$ , зависящему в основном только от коммутирующих переменных  $\mathbf{r}_\perp$  и  $\mathbf{p}_\parallel$ . Малый параметр  $\mu_B$  связан с отклонением линии магнитного поля от торoidalного направления.

Определим оператор  $\hat{\varepsilon}_{ij}$  через разложение в ряд Тейлора по аналогии с разложением обычной функции от нескольких переменных:

$$\hat{\varepsilon}_{ij} = \sum_{m,n} \frac{1}{n! m!} \frac{\partial^{m+n} \varepsilon_{ij}}{\partial x^m \partial p^n} \{\hat{x}^m, \hat{p}^n\}, \quad (14)$$

где  $\{\hat{x}^m, \hat{p}^n\} = (\hat{x}^m \hat{p}^n + \hat{p}^n \hat{x}^m) / 2$  — эрмитова комбинация операторов  $\hat{x}$  и  $\hat{p}$ . Здесь для краткости под  $\hat{x}$  понимаются декартовы координаты, а под  $\hat{p} = \nabla / (ik_0)$  — соответствующие импульсы. Символом  $\varepsilon_{ij}$  обозначен тензор, понимаемый как функция. Отмечу, что разложение (14) удовлетворяет требованиям, описанным выше.

Использование представления (14) возможно, но достаточно неудобно. Несколько улучшить ситуацию может перегруппировка членов в двойной сумме. Выполним эту процедуру для оператора  $\hat{\varepsilon}_{ij}$ , зависящего для простоты только от двух переменных  $\hat{x}$  и  $\hat{p}$ . Выделим отдельно члены с

индексами  $m = 0$  и  $n = 0$ :

$$\hat{\varepsilon}_{ij} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \varepsilon_{ij}}{\partial x^m} \hat{x}^m + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \varepsilon_{ij}}{\partial p^n} \hat{p}^n - \varepsilon_{ij} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m! n!} \frac{\partial^{m+n} \varepsilon_{ij}}{\partial x^m \partial p^n} \{\hat{x}^m, \hat{p}^n\}, \quad (15)$$

и свернём их обратно с помощью ряда Тейлора

$$\hat{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij}(\hat{x}, 0) + \varepsilon_{ij}(0, \hat{p}) - \varepsilon_{ij} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m! n!} \frac{\partial^{m+n} \varepsilon_{ij}}{\partial x^m \partial p^n} \{\hat{x}^m, \hat{p}^n\}, \quad (16)$$

где  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(0, 0)$ . Мы получили, что первые три члена зависят только от координат или только от импульсов. Вычисление таких операторов не представляет сложности и сводится к умножению на функцию  $\varepsilon_{ij}(x, 0)$  в координатном пространстве или на  $\varepsilon_{ij}(0, p)$  в импульсном пространстве.

Аналогично, если мы выделим члены с индексами  $m = 1$  или  $n = 1$ , то получим разложение для первых производных

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij}(\hat{x}, 0) + \varepsilon_{ij}(0, \hat{p}) - \varepsilon_{ij} + & \left[ \left\{ \frac{\partial[\varepsilon_{ij}(\hat{x}, 0) - \varepsilon_{ij}]}{\partial p}, \hat{p} \right\} + \left\{ \frac{\partial[\varepsilon_{ij}(0, \hat{p}) - \varepsilon_{ij}]}{\partial x}, \hat{x} \right\} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial p \partial x} \{\hat{x}, \hat{p}\} \right] + \\ & + \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{m! n!} \frac{\partial^{m+n} \varepsilon_{ij}}{\partial x^m \partial p^n} \{\hat{x}^m, \hat{p}^n\}. \quad (17) \end{aligned}$$

В этом случае операторы в квадратных скобках снова могут быть относительно легко вычислены. Процедуру можно продолжать и далее с учётом производных всё более и более высоких порядков. Однако это не имеет смысла в силу отсутствия общих для всех сред физических соображений о виде членов  $\{\hat{x}^2, \hat{p}^2\}$  и членов более высоких порядков.

Остановимся и проанализируем получившиеся представления (16) и (17). Эти представления обладают тем замечательным свойством, что все абберационные члены, включающие в себя только «чистые» зависимости от координат или импульсов (пространственная дисперсия волн), уже содержатся в первых трёх членах формулы (16)! В формулу (17) (без члена с суммой) включены дополнительно и все абберационные члены, пропорциональные первой степени координат или импульсов и произвольной степени по импульсам или координатам соответственно. Более того, можно утверждать, что формула (17) включает в себя все члены для кубических аббераций и аббераций четвёртой степени за исключением члена  $\partial^4 \varepsilon_{ij} / (\partial x^2 \partial p^2) \{\hat{x}^2, \hat{p}^2\}$ . В частности, если среда обладает какой-либо симметрией, так что смешанные производные малы (например изотропная среда, однородное магнитное поле и т. д.), то представления (16) или (17) без членов с суммированием вполне достаточно. Более того, именно на этом этапе стоит остановиться, поскольку, во-первых, нет физических соображений в пользу конкретного вида члена  $\partial^4 \varepsilon_{ij} / (\partial x^2 \partial p^2) \{\hat{x}^2, \hat{p}^2\}$  в общем случае и, во-вторых, точность самого уравнения ограничена именно членами такого же порядка (см. раздел 5, формула (31)).

#### 4. СКАЛЯРНОЕ УРАВНЕНИЕ В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Для линейных однородных сред с пространственной дисперсией, когда диэлектрическая проницаемость имеет вид  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\mathbf{p})$ , является естественным метод построения решения для фурье-образа. А именно, стартуя с уравнений Максвелла для  $\exp(i\omega t)$ -полей:

$$[\nabla, [\nabla, \mathbf{E}]] + k_0^2 \hat{\varepsilon}[\mathbf{E}] = 0,$$

и переходя к фурье-образу, мы вместо системы дифференциальных уравнений в частных производных получим систему алгебраических уравнений вида

$$L_{ij}(\mathbf{p})[E_j(\mathbf{p})] = 0, \quad L_{ij} = \delta_{ij}p^2 - p_i p_j + \varepsilon_{ij}(\mathbf{p}). \quad (18)$$

Решение этой системы легко записывается через собственные значения и векторы матрицы  $L_{ij}$ :

$$E_j(\mathbf{p}) = e_j^{(n)}(\mathbf{p})U^{(n)}(\mathbf{p}), \quad H^{(n)}(\mathbf{p})U^{(n)}(\mathbf{p}) = 0, \quad (19)$$

где  $H^{(n)} = e_i^{(n)*} L_{ij} e_j^{(n)}$  и  $e^{(n)}$  — соответственно собственное значение и нормированный собственный вектор ( $e_j^{(n)} e_j^{(n)*} = 1$ ) матрицы  $L_{ij}(\mathbf{p})$  порядка  $n$ .

Возвращаясь от (19) в координатное пространство (т.е. выполняя обратное преобразование Фурье), мы приходим к операторному виду уравнений Максвелла:

$$\hat{L}_{ij} \frac{\nabla}{ik_0} [E_j(\mathbf{r})] = 0, \quad (20)$$

и к уравнению для скалярной комплексной амплитуды поля  $U$ :

$$\hat{H} \frac{\nabla}{ik_0} [U(\mathbf{r})] = 0, \quad (21)$$

через которую с помощью оператора поляризации  $e_j^{(n)} [\nabla/(ik_0)]$  выражается распределение векторного электрического поля:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{e}} \frac{\nabla}{ik_0} [U(\mathbf{r})]. \quad (22)$$

Здесь и далее значок « $\hat{\phantom{x}}$ » обозначает, что  $\hat{\mathbf{e}}$  и  $\hat{H}$  — операторы, действующие на функцию, стоящую в квадратных скобках.

Формально, уравнение (21) соответствует «одноمودовому» волновому уравнению

$$\hat{\mathcal{L}}_{ij} [E_j(\mathbf{r})] = 0, \quad \mathcal{L}_{ij} = e_i^* e_k L_{kj}. \quad (23)$$

В однородной среде различные волновые моды не взаимодействуют друг с другом (т.е. операторы  $\hat{L}_{ij}$  и  $\hat{e}_j$  коммутативны), и уравнения (20) и (23) эквивалентны друг другу для рассматриваемого класса решений (22). Очевидно, то же самое имеет место в изотропной среде в силу поляризационного вырождения. В неоднородной анизотропной среде эквивалентность уравнений (20) и (23) нарушается, поскольку появляется взаимное влияние различных мод среды из-за перераспределения на её неоднородностях. Особенно сильно перераспределение вблизи различных резонансов. Однако вдали от резонансов перекачка энергии из одной моды в другую экспоненциально слаба, что позволяет говорить о квазиодноمودовом распространении и обобщить соответствующую технику на неоднородные среды.

## 5. СКАЛЯРНОЕ УРАВНЕНИЕ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Запишем оператор  $\hat{L}_{ij}$  в максимально общем интегральном виде для неоднородной среды:

$$\hat{L}_{ij} [E_j] = \int L_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) E_j(\mathbf{r}') \exp[ik_0 \mathbf{p}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] d\mathbf{p} d\mathbf{r}' = 0, \quad (24)$$

где  $L_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  играет роль ядра оператора  $\hat{L}_{ij}$ . В геометро-оптическом приближении это будет обычный тензор (18), в котором  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  зависит и от координат. Будем считать, что ядро  $L_{ij}$  имеет собственное значение  $H$  и собственный вектор  $e_j$ , которым можно сопоставить определённые аналогично (24) операторы  $\hat{H}$  и  $\hat{e}_j$ .

Тогда приближённое решение уравнения (24) можно искать по аналогии с однородной средой (21), (22):

$$E_j = \hat{e}_j[U], \quad (25)$$

где  $\hat{H}[U] = 0$ . Очевидно, что (25) не является точным решением уравнения (24) в общем случае. Однако хочется надеяться, что отличие между ним и точным решением будет невелико. Для её оценки заметим, что для решений (25) имеет место соотношение

$$\hat{L}_{ij}[\hat{e}_j[U]] = \hat{e}_i[\hat{H}[U]] + \hat{d}_i[U] = \hat{d}_i[U], \quad (26)$$

где оператор

$$\hat{d}_i[U(\mathbf{r})] = \int d_i U(\mathbf{r}') \exp[ik_0 \mathbf{p}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] d\mathbf{p} d\mathbf{r}' \quad (27)$$

мал в средах с медленно меняющейся поляризацией волновой моды. Здесь

$$d_i \approx \frac{1}{ik_0} \left( \frac{\partial L_{ij}}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial e_j}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial e_i}{\partial \mathbf{p}} \right) + \dots$$

Этот оператор равен нулю в изотропных средах или в однородных средах и близок к нулю в токамаках в силу однородности плазмы вдоль магнитного поля.

В действительности, первый порядок разложения оператора  $\hat{d}_i$  (27) можно обратить в нуль точно, если вспомнить, что у нас остаётся ещё несколько свободных функций. А именно, оператор  $\hat{H}$  можно построить по сумме собственного значения  $H$  и малой добавки  $\delta H \sim 1/(k_0 \Lambda)$ , где  $\Lambda$  — масштаб неоднородности вектора поляризации:

$$H \rightarrow \mathcal{H} = H + \delta H.$$

Кроме того, необходимо учесть линейное взаимодействие мод друг с другом, т. е. искать решение в виде суммы по различным модам:

$$E_j = \sum_n \hat{e}_j^{(n)}[U_n], \quad \hat{H}_n[U_n] = \sum_{m \neq n} \hat{W}_{nm}[U_m]. \quad (28)$$

Здесь  $\hat{e}_j^{(n)}$ ,  $\hat{H}_n = \hat{e}_i^{*(n)} \hat{L}_{ij} \hat{e}_j^{(n)}$  — операторы, соответствующие собственным векторам и значениям матрицы  $L_{ij}$ ,  $\hat{W}_{nm} = \hat{e}_i^{*(n)} \hat{L}_{ij} \hat{e}_j^{(m)}$ . Отметим, что в геометро-оптическом приближении ядра операторов  $W_{nm} \equiv 0$  всюду, кроме особых точек.

Вводя малые поправки  $\delta \hat{H}_n$  к операторам  $\hat{H}_n$  в соответствии с формулами

$$\begin{bmatrix} \delta H_1 \\ \delta H_2 \\ \delta H_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e_i^{*(1)} e_i^{(2)} & e_i^{*(1)} e_i^{(3)} \\ e_i^{*(2)} e_i^{(1)} & 1 & e_i^{*(2)} e_i^{(3)} \\ e_i^{*(3)} e_i^{(1)} & e_i^{*(3)} e_i^{(2)} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} d_i e_i^{*(1)} \\ d_i e_i^{*(2)} \\ d_i e_i^{*(3)} \end{bmatrix}, \quad (29)$$

легко получить обращение в нуль члена первого порядка в разложении оператора  $\hat{d}_i$ . В принципе эту процедуру можно продолжить и для обращения в нуль членов более высоких порядков в

разложении оператора  $\hat{d}_i$ . Однако практического смысла это не имеет, т. к. вид оператора  $L_{ij}$  для реальных сред с такой точностью не известен (см. раздел 3).

В результате приходим к уравнению

$$\hat{H}_1[U_1] + \delta\hat{H}_1[U_1, U_2, U_3] \equiv \hat{\mathcal{H}}_1[U_1] + \hat{W}_{12}[U_2] + \hat{W}_{13}[U_3] = 0. \quad (30)$$

В однородной среде, где  $|\nabla e_j| = 0$ , оператор  $\hat{\mathcal{H}}$  с ядром

$$\mathcal{H} = H + \frac{H}{ik_0} \frac{\partial e_i^*}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial e_i}{\partial \mathbf{r}}$$

тождественно равен оператору  $\hat{H}$ , как и следовало ожидать. Более того, во многих физически важных приложениях поляризационные эффекты малы и эти операторы тоже можно считать тождественными без потери точности. Поэтому в дальнейшем для простоты будем обозначать оба оператора одной буквой  $\hat{H}$ , понимая, что при необходимости в него включены и поляризационные эффекты.

В плавно неоднородных средах вдали от особых точек или точек трансформации одних мод в другие слагаемые  $W_{nm}[U_m]$  также малы и могут быть опущены. Формальное условие этого есть условие плавности среды на масштабе длины волны биений, т. е.  $|p_n - p_m| k_0 \Lambda \gg 1$ , где  $\Lambda$  — характерный масштаб неоднородности среды,  $p_n$  и  $p_m$  — волновые числа попутно распространяющихся мод. В дальнейшем ограничимся именно такой ситуацией и рассмотрим эволюцию широких в масштабе длины волны пучков, набранных из мод одного типа поляризации, в рамках скалярного уравнения (30), которое во многих случаях проще векторных уравнений Максвелла.

Итак, найденное электрическое поле будет отличаться от точного решения уравнений Максвелла только во втором порядке по малому параметру  $1/(k_0 \Lambda)$ :

$$d_i \approx \frac{1}{k_0^2} \left( \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{r}^2} \frac{\partial^2 e_i}{\partial \mathbf{p}^2} - \frac{\partial^2 L_{ij}}{\partial \mathbf{p}^2} \frac{\partial^2 e_j}{\partial \mathbf{r}^2} \right) + \dots \quad (31)$$

Отметим, что при выводе приближённого уравнения (30) не потребовалась диагонализация оператора  $\hat{L}_{ij}$ , которая в общем случае невозможна [24]. Единственное, что нам было необходимо — это существование хотя бы одной моды среды  $e_j$ , т. е. «отщепление» только одного уравнения от уравнений Максвелла. Кроме того, получившееся уравнение естественным образом включает в себя эффекты резонансного поглощения [18], требующие использования гамильтониана (собственного значения) именно выбранной моды для расчёта потока энергии в области резонансного электронно-циклотронного поглощения.

Зависимость оператора  $\hat{H}$  от параметров в уравнении (30) представлена в самом общем виде. Операторы  $\hat{\mathbf{r}}$  и  $\hat{\mathbf{p}} = \nabla/(ik_0)$  не коммутируют, но они, очевидно, должны входить в комбинации, обеспечивающей эрмитовость оператора  $\hat{H}$  в среде без поглощения, например аналогично (14). Подробнее этот вопрос обсуждается в следующей части данного цикла статей.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В первой части цикла работ мы по существу ограничились выводом скалярного волнового уравнения для получения приближённого решения уравнений Максвелла. Данный вывод был выполнен для произвольных анизотропных и гиротропных плавно неоднородных сред с пространственной дисперсией. Метод получения приближённого решения уравнений Максвелла основан на представлении векторного поля в виде результата действия оператора поляризации на скалярное поле, которое находится из решения соответствующего скалярного уравнения. Получены

оценки точности решения и предложены пути её повышения. В дальнейшем (в следующей части) полученное скалярное уравнение будет использовано для вывода квазиоптического уравнения, описывающего однонаправленное распространение волнового пучка в одномодовом приближении.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 12-02-00648-а и 12-02-33043-мол-а-вед).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zohm H. // Proc. 13th Joint Workshop on Electron Cyclotron Emission and Electron Cyclotron Heating. 2005. P. 133.
2. Takahashi K., Kobayashi N., Kasugai A., Sakamoto K. // J. Phys. Conf. Ser. 2005. V. 25. P. 75.
3. Takahashi K., Kobayashi N., Ohmori J., et al. // Fusion Sci. Technol. 2007. V. 52. P. 266.
4. Ramponi G., Farina D., Henderson M. A., et al. // Fusion Sci. Technol. 2007. V. 52. P. 193.
5. Mazzucato E. // Phys. Fluids B. 1989. V. 1. P. 1855.
6. Farina D. // Fusion Sci. Technol. 2007. V. 52. P. 154.
7. Pereverzev G. V. // Rev. Plasma Phys. 1996. V. 19. P. 1.
8. Pereverzev G. V. // Phys. Plasmas. 1998. V. 5. P. 3529.
9. Prater R., Farina D., Gribov Yu., et al. // Nucl. Fusion. 2008. V. 48. Art. no. 035006.
10. Maj O., Balakin A. A., Poli E. // Plasma Phys. Control. Fusion. 2010. V. 52. Art. no. 085006.
11. Балакина М. А., Токман М. Д., Смолякова О. Б. // Физика плазмы. 2003. Т. 29. С. 60.
12. Тимофеев А. В. // УФН. 2005. Т. 175. С. 637.
13. Saveliev A. N. // Plasma Phys. Control. Fusion. 2009. V. 51. Art. no. 075004.
14. Леонтович М. А., Фок В. А. // ЖЭТФ. 1946. Т. 16. С. 557.
15. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика в неоднородных средах. М.: Наука, 1980.
16. Nowak S., Orefice A. // Phys. Fluids B. 1993. V. 5. P. 1945.
17. Рыгов С. М. // Докл. АН СССР. 1938. Т. 18. С. 263.
18. Westerhof E., Tokman M. D., Gavrilova M. A. // Plasma Phys. Control. Fusion. 2000. V. 42. P. 91.
19. Westerhof E., Tokman M. D., Gavrilova M. A. // Fusion Engineering and Design. 2001. V. 53. P. 47.
20. Балакин А. А., Балакина М. А., Смирнов А. И., Пермитин Г. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 2007. Т. 50. С. 1058.
21. Моисеев С. С., Сагдеев Р. З. // ЖЭТФ. 1963. Т. 44. С. 763.
22. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
23. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика (нерелятивистская теория). М.: Наука, 1989.
24. Littlejohn R. G., Flynn W. G. // Phys. Rev. A. 1991. V. 44. P. 5239.
25. Balakin A. A., Balakina M. A., Westerhof E. // Nucl. Fusion. 2008. V. 48. Art. no. 065003.
26. Балакин А. А., Балакина М. А., Смирнов А. И., Пермитин Г. В. // Физика плазмы. 2007. Т. 33. С. 337.
27. Fraiman G. M., Sher E. M., Yunakovsky A. D., Laedke W. // Physica D. 1995. V. 87. P. 325.
28. Пермитин Г. В., Смирнов А. И. // ЖЭТФ. 1996. Т. 109. С. 736.
29. Балакин А. А., Балакина М. А., Смирнов А. И., Пермитин Г. В. // Физика плазмы. 2008. Т. 34. С. 486.

Поступила в редакцию 10 сентября 2012 г.; принята в печать 30 сентября 2012 г.

**WAVE BEAMS IN SMOOTHLY INHOMOGENEOUS ANISOTROPIC MEDIA:  
A SINGLE-MODE DESCRIPTION (PART I)**

*A. A. Balakin*

In this series of papers, we propose a method for development of an approximate solution of the Maxwell equations in smoothly inhomogeneous anisotropic hyrotropic media with allowance for aberrations, spatial dispersion, and absorption. The connection with the aberration-free approximation equations is shown. In the first paper of the series, we propose a procedure for the development of an approximate scalar wave equation aimed at the description of single-mode propagation of wave beams.