УДК 537.876

О ЛИНЕЙНОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ ВОЛН В ДВУМЕРНО-НЕОДНОРОДНОЙ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ СО СТОЛКНОВИТЕЛЬНЫМ ПОГЛОЩЕНИЕМ

Е. Д. Господчиков, А. Г. Шалашов

Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород, Россия

Рассмотрен процесс линейного взаимодействия волн электронно-циклотронного диапазона частот в неодномерно-неоднородной магнитоактивной плазме вблизи поверхности критической концентрации с учётом их столкновительной диссипации. Сформулированы и аналитически решены модельные уравнения, описывающие взаимодействие нормальных мод в такой ситуации. Исследовано влияние анизотропии поглощения, характерной для магнитоактивной плазмы, на процесс линейной трансформации волн в двумерно-неоднородной геометрии.

ВВЕДЕНИЕ

Проблема линейного взаимодействия электромагнитных волн электронно-циклотронного диапазона частот, распространяющихся в плавно неоднородной магнитоактивной плазме, имеет давнюю историю. Начало исследованиям этого круга вопросов было положено в работах В. Л. Гинзбурга в связи с изучением эффекта «утраивания» радиосигналов в ионосфере [1–3]. В астрофизических условиях линейное взаимодействие волн имеет существенное значение, например, для описания механизма выхода излучения из плотной плазмы, в частности из солнечной короны [4–6]. В последние годы интерес к изучению этой проблемы заметно усилился в связи с задачами нагрева и диагностики плотной плазмы в установках управляемого термоядерного синтеза с магнитным удержанием плазмы, токамаках и стеллараторах [7, 8].

Большинство теоретических результатов, относящихся к процессам линейной трансформации волн в электронно-циклотронном диапазоне, были получены в рамках одномерного плоскослоистого приближения, в котором считалось, что все параметры среды изменяются вдоль одного выделенного направления [1, 9–11]. В последнее время было обращено внимание на то, что одномерное приближение может оказаться недостаточным для описания процесса линейной трансформации в условиях лабораторного эксперимента [12–17]. В работах [13, 14] были получены и детально исследованы укороченные эталонные волновые уравнения, описывающие распределение волнового поля в области линейной трансформации электромагнитных волн с учётом двумерной неоднородности магнитоактивной плазмы, когда градиенты плотности плазмы и модуля магнитного поля не сонаправлены. Позднее в работах [18–20] были исследованы и некоторые трёхмерные эффекты, связанные с неоднородностью направления магнитного поля, характерной для тороидальных ловушек.

Влияние столкновительного поглощения в магнитоактивной плазме на процессы линейной трансформации электромагнитных волн исследовалось в одномерном приближении, в частности в работе [10]. В ней было показано, что в плоскослоистом приближении влияние поглощения ограничивается экспоненциальным ослаблением отражённой и прошедшей волн в соответствии с пройденными ими оптическими путями. В настоящей работе проанализировано влияние столкновительного поглощения на процесс линейной трансформации электромагнитных волн в двумерно-неоднородной магнитоактивной плазме.

2. УРАВНЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩИЕ ЛИНЕЙНУЮ ТРАНСФОРМАЦИЮ ВОЛН В ДВУМЕРНО-НЕОДНОРОДНОЙ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ С УЧЁТОМ ЗАТУХАНИЯ, И ИХ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим простейшую двумерную конфигурацию магнитоактивной плазмы, которая отвечает, например, области линейного взаимодействия нормальных волн в классических токамаках. Пусть магнитное поле имеет постоянное направление, совпадающее с осью z, а его модуль и плотность плазмы меняются в плоскости xy. В приближении «холодной» плазмы с учётом слабого столкновительного поглощения такая среда может быть описана тремя комплексными функциями $\varepsilon_+(x,y)$, $\varepsilon_-(x,y)$ и $\varepsilon_\|(x,y)$, отвечающими компонентам диагонализованного тензора диэлектрической проницаемости для стиксового представления электрического поля [21]. Поскольку мы рассматриваем стационарную и однородную вдоль оси z среду, то распределение волнового поля можно искать в виде фурье-гармоник, отвечающих определенному продольному волновому числу, т. е. в форме

$$\mathbf{E}(x,y,z,t) = \mathbf{F}(x,y,N_\|,\omega)\exp(ik_0N_\|z - i\omega t),$$

где $k_0 = \omega/c$, c — скорость света в вакууме. Любое решение уравнений Максвелла в рассматриваемой среде представляется в виде суперпозиции таких гармоник.

Эффективная линейная трансформация волн возможна в области, где сближаются дисперсионные кривые для обыкновенной и необыкновенных волн. Эта область может быть определена следующими неравенствами, см., например [13]:

$$|\varepsilon_\|| \ll 1, \qquad |\varepsilon_+ - N_\|^2| \ll 1. \tag{1}$$

Если дополнительно предположить, что выполняется условие плавной неоднородности среды

$$1/(k_0L) \ll 1, \tag{2}$$

где L — характерный масштаб неоднородности, и разложить уравнения Максвелла по малым параметрам (1) и (2) до первого неисчезающего порядка, то можно получить следующую систему укороченных уравнений, описывающую распределение волнового поля в области эффективной линейной трансформации [13]:

$$N_\|\left(i\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)F_\| = \sqrt{2}\;k_0\,(\varepsilon_+ - N_\|^2)\,F_+, \qquad N_\|\left(i\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)F_+ = \sqrt{2}\;k_0\varepsilon_\|F_\|, \qquad F_- = 0. \tag{3}$$

Здесь F_+, F_- и $F_\|$ — комплексные амплитуды поля в так называемом стиксовом представлении, $F_+ = (F_x + iF_y)/\sqrt{2}$ и $F_- = (F_x - iF_y)/\sqrt{2}$ соответствуют лево- и правополяризованным циркулярным компонентам поля, поперечным по отношению к внешнему магнитному полю, $F_\| = F_z$ отвечает продольной по отношению к внешнему магнитному полю компоненте, поляризованной линейно.

Система (3) ранее подробно исследовалась в бездиссипативном случае, когда компоненты тензора диэлектрической проницаемости действительны [13–15]. Главной особенностью этой системы при наличии слабого, например столкновительного, поглощения будет наличие у коэффициентов в левой части уравнений мнимой части. Компоненты тензора диэлектрической проницаемости удобно представить в виде

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon'_\alpha + i\varepsilon''_\alpha,$$

где индекс α принимает значения $+$, $-$ и $\|$. Компоненты эрмитовой части тензора диэлектрической проницаемости для волны с частотой ω имеют вид

$$\varepsilon'_+ = 1 - \frac{\omega_{\rm pe}^2}{\omega\,(\omega + \omega_{\rm ce})}\,, \qquad \varepsilon'_- = 1 - \frac{\omega_{\rm pe}^2}{\omega\,(\omega - \omega_{\rm ce})}\,, \qquad \varepsilon'_\| = 1 - \frac{\omega_{\rm pe}^2}{\omega^2}\,,$$

где $\omega_{\rm ce}$ и $\omega_{\rm pe}$ — электронная циклотронная и ленгмюровская частоты соответственно. Мы будем считать, что поглощение мало́, т. е. выполняется неравенство $|\varepsilon''_\alpha| \ll 1$. Выберем начало координат в точке, в которой обращаются в нуль действительные части коэффициентов в правой части системы (3), т. е. где

$$\varepsilon'_\parallel = 0 \quad \text{и} \quad \varepsilon'_+ - N_\parallel^2 = 0.$$

Эта точка отвечает точке поляризационного вырождения в пренебрежении поглощением [13]. В её окрестности разложим $\varepsilon'_\parallel$ и ε'_+ в ряд по координатам x и y до линейных членов, а координатной зависимостью $\varepsilon''_\parallel$ и ε''_+ в случае слабого поглощения пренебрежём. Тогда, после процедуры обезразмеривания, мы получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} -(i\,\partial/\partial x' - \partial/\partial y')\,A_\parallel &= (\cos(\alpha)x' + \sin(\alpha)y' - i\delta_+)\,A_+, \\ -(i\,\partial/\partial x' + \partial/\partial y')\,A_+ &= (\cos(\alpha)x' - \sin(\alpha)y' - i\delta_\parallel)\,A_\parallel, \end{aligned} \qquad (4)$$

где

$$x' = x/L_\nabla, \qquad y' = y/L_\nabla, \qquad L_\nabla = \left(\frac{N_\parallel^2}{2k_0^2\,|\nabla\varepsilon'_+|\,|\nabla\varepsilon'_\parallel|}\right)^{1/4},$$

$$A_\parallel = F_\parallel\,|\nabla\varepsilon_\parallel|^{1/2}, \qquad A_+ = F_+\,|\nabla\varepsilon_+|^{1/2}, \qquad \delta_+ = \varepsilon''_+/(|\nabla\varepsilon'_+|\,L_\nabla), \qquad \delta_\parallel = \varepsilon''_\parallel/(|\nabla\varepsilon'_\parallel|\,L_\nabla),$$

а параметр 2α определяет угол между поверхностями, соответствующими $\varepsilon'_\parallel = 0$ и $\varepsilon'_+ = N_\parallel^2$. Оси x' и y' направлены, как показано на рис. 1, причём положительное направление x' соответствует возрастанию плотности плазмы. Характерный масштаб области взаимодействия задаётся величиной $L_\nabla \sim L/\sqrt{k_0 L} \ll L$, а относительная величина диссипации — безразмерным параметром $\delta_\alpha \sim \varepsilon''\,(k_0 L)^{1/2}$.

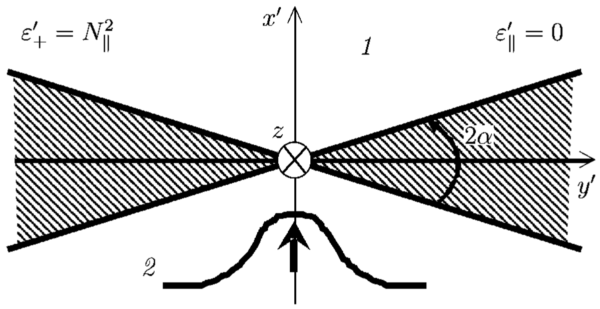

Рис. 1. Область линейного взаимодействия О- и Х-волн, образованная пересечением двух поверхностей отсечки. Область *1* соответствует Х-волне, *2* — О-волне, область непропускания заштрихована

Формальной заменой

$$\begin{aligned} x'' = x' - i\delta_x/\cos\alpha, \qquad y'' = y' + i\delta_y/\sin\alpha, \\ \delta_x = (\delta_\parallel + \delta_+)/2, \qquad \delta_y = (\delta_\parallel - \delta_+)/2 \end{aligned} \qquad (5)$$

система (4) может быть сведена к эталонной задаче, решённой в работах [13, 14]. В результате можно получить явные аналитические выражения для распределения компонент волнового поля. При этом выражения для амплитуд $A^{\rm t}$ и $A^{\rm r}$, отвечающих в области справедливости приближения Венцеля—Крамерса—Бриллюэна для системы (4) амплитудам волновых пучков, распространяющихся в положительном и отрицательном направлениях вдоль оси x', будут иметь вид

$$A^{\rm t}(x'',y'') = \sum_{n=0}^{\infty} A_n h_n \tilde D_{i\nu_n}, \qquad A^{\rm r}(x'',y'') = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} +A_{n+1}h_n, & \alpha>0 \\ -A_n h_{n+1}, & \alpha<0 \end{Bmatrix} \sqrt{i\nu_n^+}\;\tilde D_{i\nu_n^+-1}. \qquad (6)$$

Здесь A_n — произвольные постоянные, определяемые распределением поля в падающем на область трансформации волновом пучке,

$$h_n(y'') = \frac{\sin^{1/4}|\alpha|}{\pi^{1/4}\sqrt{2^n\,n!}}\exp(-\sin|\alpha|\,y''^2/2)H_n(\sqrt{\sin|\alpha|}\;y''), \quad \tilde D_{i\nu}(x'') = D_{i\nu}(\exp(i\pi/4)x''\,\sqrt{2\cos\alpha}),$$

H_n — полином Эрмита, $D_{i\nu}$ — одна из функций параболического цилиндра [22, 23] с мнимым индексом, определяемым следующими выражениями:

$$\nu_n = \begin{cases} n \operatorname{tg} \alpha, & \alpha > 0; \\ (n+1) \operatorname{tg} |\alpha|, & \alpha < 0, \end{cases} \qquad \nu_n^+ = (n+1) \operatorname{tg} |\alpha|.$$

Исходные волновые поля могут быть восстановлены с помощью формул

$$A_+ = A^{\mathrm{t}} + A^{\mathrm{r}}, \qquad A_\parallel = A^{\mathrm{r}} - A^{\mathrm{t}}.$$

Окончательный вид решения с учётом затухания может быть получен после использования подстановки (5):

$$A^{\mathrm{t}}(x', y') = \sum_{n=0}^{\infty} A_n g_n C_n,$$
$$A^{\mathrm{r}}(x', y') = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} +A_{n+1} g_n, & \alpha > 0; \\ -A_n g_{n+1}, & \alpha < 0 \end{Bmatrix} \sqrt{i\nu_n^+}\, C_n^+, \tag{7}$$

где

$$g_n(y') = h_n(y' + i\delta_y / \sin\alpha),$$
$$C_n(x') = \tilde{D}_{i\nu_n}(x' - i\delta_x / \cos\alpha), \qquad C_n^+(x') = \tilde{D}_{i\nu_n^+ - 1}(x' - i\delta_x / \cos\alpha). \tag{8}$$

Отметим, что полученное решение имеет разную структуру в зависимости от знака угла α. Это связано с присутствующей в исходной геометрии задачи асимметрией относительно перестановки поверхностей, отвечающих $\varepsilon'_\parallel = 0$ и $\varepsilon'_+ = N_\parallel^2$ [13].

Таким образом, задача о распределении поля в окрестности области трансформации с учётом малого поглощения формально полностью решена. Однако решение в форме (6)–(8) неудобно для анализа, например, коэффициента пропускания по энергии, для нахождения которого необходимо вычислить интеграл от квадрата модуля волнового поля в прошедшем пучке. Действительно, легко заметить, что моды $g_n(y')$ не являются ортогональными в смысле обычного скалярного произведения, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(y') \, [g_m(y')]^* \, \mathrm{d}y' = \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(y' + i\delta_y / \sin\alpha) h_m(y' - i\delta_y / \sin\alpha) \, \mathrm{d}y' \neq \delta_{nm},$$

где δ_{nm} — символ Кронекера. Более того, они не являются даже нормированными. С другой стороны, если записать произведение этих функций так, как если бы они были действительными, то можно найти, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(y') g_m(y') \, \mathrm{d}y' = \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(y'') h_m(y'') \, \mathrm{d}y'' = \delta_{nm}.$$

Умножив обе части формулы (6) на $g_m(y')$ и проинтегрировав их по y', получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A^{\mathrm{t}}(x', y') g_m(y') \, \mathrm{d}y' = C_m(x') A_m.$$

Подставив найденные таким образом коэффициенты A_m в выражение для прошедшего пучка $A^{\rm t}(x_2', y_2')$ в каком-либо другом сечении, получим

$$A^{\rm t}(x_2', y_2') = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} A^{\rm t}(x_1', y_1') g_n(y_1')\,{\rm d}y_1'\, \frac{C_n(x_2')}{C_n(x_1')}\, g_n(y_2'). \tag{9}$$

Это выражение позволяет связать прошедший и падающий пучки. В наиболее интересном с точки зрения приложений случае падающий пучок задаётся в области справедливости приближения Венцеля—Крамерса—Бриллюэна для системы (4) перед областью трансформации, а прошедший пучок — в области справедливости приближения Венцеля—Крамерса—Бриллюэна для системы (4) за областью трансформации, так что справедливы неравенства

$$x_1' < 0 < x_2', \qquad |x_1'| \gg 1, \qquad x_2' \gg 1.$$

При их выполнении суммирование по n в выражении (9) можно провести в явном виде, в результате чего получается представление для распределения волнового поля прошедшего пучка $A^{\rm t}$ в области справедливости приближения Венцеля—Крамерса—Бриллюэна в виде интегрального преобразования от волнового поля падающего пучка $A^{\rm i}$, также заданного в области справедливости приближения Венцеля—Крамерса—Бриллюэна:

$$A^{\rm t}(x_2', y_2') = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(x_1', x_2', y_1', y_2') A^{\rm i}(x_1', y_1')\,{\rm d}y_1', \tag{10}$$

где

$$G(x_1', x_2', y_1', y_2') = G_0 \exp\bigl\{-\delta_x\,(x_2' - x_1') - \bigl[i\delta_y\,(y_1' + y_2') \sin\alpha - \delta_y^2\bigr]\,\varphi(\alpha)\bigr\}\,, \tag{11}$$

$$G_0(x_1', x_2', y_1', y_2') = \sqrt{\frac{\sin\alpha}{\pi\,[1 - \exp(-2\pi \operatorname{tg}\alpha)]}} \times \\ \times \exp\left[i\cos(\alpha)\,\frac{x_1'^2 - x_2'^2}{2} - \sin(\alpha)\,\frac{(y_1'^2 + y_2'^2)\,{\rm ch}(\pi \operatorname{tg}\alpha) - 2y_1' y_2'}{2\,{\rm sh}(\pi \operatorname{tg}\alpha)}\right],$$

$$\varphi(\alpha) = \frac{{\rm ch}(\pi \operatorname{tg}\alpha) - 1}{{\rm sh}(\pi \operatorname{tg}\alpha) \sin\alpha}\,. \tag{12}$$

Вывод этого соотношения приведён в Приложении. Нетрудно убедиться, что G_0 совпадает с введённым в [14] ядром аналогичного интегрального преобразования для случая среды без поглощения. Интегральная форма решения уравнений (4) оказывается наиболее удобной для анализа случая диссипативной плазмы.

2. ВЛИЯНИЕ МАЛОГО ПОГЛОЩЕНИЯ НА ПРОЦЕСС ЛИНЕЙНОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ

Рассмотрим основные физические эффекты, к которым может приводить наличие в плазме столкновительного поглощения. Их величины определяются различными членами в аргументе экспоненты в формуле (11).

Во-первых, это экспоненциальное ослабление волнового пучка в соответствии с пройденным им оптическим путем вдоль оси x согласно формуле

$$A^{\mathrm{t}} \propto \exp[-\delta_x\,(x_2' - x_1')]. \tag{13}$$

Это ослабление не зависит от поперечной структуры пучка, что соответствует известному результату, получаемому в плоскослоистом приближении [10].

Во-вторых, при наличии анизотропии поглощения, т. е. в случае $\delta_+ \neq \delta_\|$, поглощение начинает влиять на поперечную структуру прошедшего пучка, меняя его поперечную фазовую модуляцию. Проще всего в этом можно убедиться, рассматривая интегральное преобразование (10), ядро которого содержит фазовый член вида $\exp[-ik_T L_\nabla\,(y_1' + y_2')]$, где

$$k_T = \delta_y \varphi(\alpha) \sin(\alpha)/L_\nabla. \tag{14}$$

Из-за его наличия после свёртки по y_1' фазовые модуляции в поперечном направлении падающего и прошедшего пучков будут отличаться друг от друга. Этот эффект можно рассматривать как дополнительное преломление пучка при прохождении через область линейного взаимодействия. Формально данное явление связано с тем, что анизотропное поглощение изменяет структуру поперечных мод $g_n(y')$, определяемых выражением (8).

Наличие анизотропного поглощения влияет на зависимость коэффициента трансформации волнового пучка от его фазовой модуляции в поперечном направлении. Действительно, коэффициент трансформации определяется как отношение потока энергии в прошедшем и падающем пучках:

$$T = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |A^{\mathrm{t}}|^2\,\mathrm{d}y \Bigg/ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |A^{\mathrm{i}}|^2\,\mathrm{d}y. \tag{15}$$

Используя интегральное преобразование (10)–(12), можно показать, что коэффициент трансформации не слишком широкого по сравнению с введённым ниже масштабом a_0 пучка, имеющего гармоническую фазовую модуляцию $\exp(ik_y y)$, независимо от формы огибающей может быть представлен в виде

$$T \approx t_0(\alpha, a_y/a_0) \exp[-2\delta_x\,(x_2' - x_1') - 2\,(k_y - k_T)^2\,L_\nabla^2 \Phi(\alpha, a_y/a_0) + 2\delta_y^2 \varphi(\alpha)], \tag{16}$$

где T_0 — коэффициент трансформации пучка без учёта поглощения, $\Phi > 0$ — функция, определяемая формой падающего пучка, a_y — характерная ширина пучка, $a_0 = L_\nabla/\sqrt{\sin|\alpha|}$ — «оптимальная» ширина пучка для бездиссипативного случая [13]. Отсюда видно, что величина k_T, определяемая формулой (14), имеет смысл оптимального поперечного волнового числа, обеспечивающего наибольший коэффициент прохождения для заданной формы пучка. Множитель $\exp[2\delta_y^2\varphi(\alpha)]$ учитывает эффект ослабления поглощения пучка по сравнению с «одномерным» приближением (13). Естественно, что такой множитель не может привести к усилению пучка, т. е. к выполнению неравенства $T > 1$ при прохождении через область трансформации. Формально это следует из введённого в Приложении неравенства $\{\delta_x, \delta_y\} \ll \{|x_1|, |x_2|\}$, при выполнении которого получено интегральное представление (10)–(12).

Как было замечено выше, при прохождении области трансформации пучок может испытывать дополнительное преломление из-за наличия поглощения. В случае, отвечающем максимальному коэффициенту трансформации, падающий пучок с оптимальной фазовой модуляцией, определяемой множителем $\exp(ik_T y)$, порождает прошедший пучок с фазовой модуляцией, определяемой множителем $\exp(-ik_T y)$, т. е. в этом случае знак проекции волнового вектора на ось y меняется на противоположный. В бесстолкновительной плазме оптимальный пучок отвечает $k_y = 0$ и не испытывает преломления в направлении y [14].

В-третьих, анизотропное поглощение приводит к интересному эффекту, заключающемуся в том, что оптимальный пучок с максимальным коэффициентом трансформации не отвечает минимальному коэффициенту отражения. Для того, чтобы убедиться в этом, рассмотрим наинизшую поперечную моду в выражениях (6)–(8):

$$g_0(y') \propto \exp[-y'^2 \sin(|\alpha|)/2 - i\delta_y \operatorname{sign}(\alpha) y'].$$

Пучок, образованный только наинизшей модой, в отсутствие поглощения имеет наибольший коэффициент трансформации [13], а в случае $\alpha > 0$ испытывает полную, безотражательную трансформацию, при которой $T = 1$ [17]. Как следует из формулы (7), при $\alpha > 0$ отражение такого пучка в полупространство $x' < 0$ отсутствует и при учёте малого поглощения. При этом анизотропное поглощение приводит к появлению дополнительного набега фазы по координате y':

$$k_R = -\delta_y \operatorname{sign}(\alpha)/L_\nabla,$$

в структуре нулевой поперечной моды, отвечающей пучку, испытывающему безотражательную трансформацию. Абсолютная величина этого набега не зависит от угла α. Заметим, что $k_R \neq k_T$, т. е. при наличии поглощения пучок, обладающий наибольшим коэффициентом прохождения, отличается от пучка, испытывающего безотражательную трансформацию или наименьшее отражение. Это связано с тем, что поглощение пучков, имеющих различную поперечную структуру в области трансформации $|x'| < 1$, вообще говоря, не сводится к описываемому формулой (11) «одномерному» поглощению, не зависящему от поперечной структуры волнового пучка.

3. ТРАНСФОРМАЦИЯ ГАУССОВОГО ВОЛНОВОГО ПУЧКА

В качестве важного примера рассмотрим падающий пучок гауссовой формы с шириной a_y и поперечной фазовой модуляцией $ik_y L_\nabla y'$:

$$A^{\mathrm{i}} = \exp\left[-\frac{y' L_\nabla^2}{2a_y^2} + ik_y L_\nabla y'\right]. \tag{17}$$

Воспользовавшись соотношениями (21)–(23), мы можем рассчитать распределение поля в прошедшем пучке. Оно имеет вид

$$A^{\mathrm{t}} = \sqrt{\frac{1}{2}\,\frac{a_y^2 \exp(\pi \operatorname{tg}\alpha)}{a_y^2 \operatorname{ch}(\pi \operatorname{tg}\alpha) + L_\nabla^2 \operatorname{sh}(\pi \operatorname{tg}\alpha)/\sin\alpha}}\,\times$$
$$\times \exp\left[i\cos(\alpha)\,\frac{x_1'^2 - x_2'^2}{2} - \delta_x\,(x_2' - x_1') - \frac{y'^2 L_\nabla^2}{2\tilde{a}_y^2} + i\tilde{k}_y L_\nabla y' - (k_y - k_T)^2\, L_\nabla^2 \Phi + \delta_y^2 \varphi(\alpha)\right].$$

Коэффициент Φ характеризует уменьшение амплитуды волнового поля в прошедшем пучке при отклонении поперечного волнового вектора от введённого в предыдущем разделе оптимального значения k_T:

$$\Phi = \frac{1}{2}\,\frac{a_y^2 \operatorname{th}(\pi \operatorname{tg}\alpha)}{a_y^2 \sin\alpha + L_\nabla^2 \operatorname{th}(\pi \operatorname{tg}\alpha)}\,. \tag{18}$$

Ширина прошедшего пучка $\tilde{a}_y$ и волновое число $\tilde{k}_y$, характеризующее его поперечную фазовую модуляцию, определяются выражениями

$$\tilde{a}_y = \sqrt{\frac{a_y^2 + L_\nabla^2\,\mathrm{th}(\pi\,\mathrm{tg}\,\alpha)/\sin\alpha}{L_\nabla^2 + a_y^2\,\mathrm{th}(\pi\,\mathrm{tg}\,\alpha)\sin\alpha}}\;L_\nabla,$$

$$\tilde{k}_y = \frac{k_y - k_T}{\mathrm{ch}(\pi\,\mathrm{tg}\,\alpha) + (L_\nabla/a_y)^2\,\mathrm{sh}(\pi\,\mathrm{tg}\,\alpha)/\sin\alpha} - k_T.$$

Из них видно, что малое поглощение не оказывает влияния на изменение ширины гауссового пучка в процессе прохождения через область линейной трансформации, однако оно может заметно изменять его фазовую модуляцию.

Коэффициент трансформации, характеризующий отношение потока энергии в прошедшем и падающем пучках, для рассматриваемого случая будет определяться формулой (13), в которой коэффициент Φ даётся формулой (16), а предэкспонентциальный множитель есть коэффициент трансформации гаусового пучка без учёта поглощения:

$$T_0 = \frac{a_y \tilde{a}_y\,[1 + \mathrm{th}(\pi\,\mathrm{tg}\,\alpha)]}{a_y^2 + L_\nabla^2\,\mathrm{th}(\pi\,\mathrm{tg}\,\alpha)/\sin\alpha}\,.$$

Заметим, что в данном случае формула (13) даёт точный (в рамках рассматриваемой модели) результат. Влияние анизотропного поглощения на эффективность процесса линейной трансформации может быть охарактеризовано параметром

$$\eta \equiv \frac{T(k_y = 0)}{T(k_y = k_T)} = \exp(-2k_T^2 L_\nabla^2 \Phi),$$

равным отношению коэффициентов трансформации гауссового пучка без поперечной фазовой модуляции и гауссового пучка с оптимальной поперечной фазовой модуляцией. Переписав указанный параметр в виде

$$\eta = \exp(-\kappa \delta_y^2), \quad \kappa = \frac{a_y^2 \varphi^2(\alpha)\sin^2(\alpha)\,\mathrm{th}(\pi\,\mathrm{tg}\,\alpha)}{a_y^2 \sin\alpha + L_\nabla^2\,\mathrm{th}(\pi\,\mathrm{tg}\,\alpha)}\,,$$

можно выделить его зависимость от ширины пучка и степени «двумерности» задачи, характеризуемой углом α. В диапазоне параметров, отвечающем $\kappa \geq 1$, можно ожидать, что влияние анизотропного поглощения будет сравнимо с «одномерным» ослаблением волнового пучка, определяемым формулой (13). На рис. 2 представлены зависимости коэффициента κ от угла α при различных ширинах падающего пучка. Видно, что этот параметр становится порядка единицы только при сильной «двумерности» задачи, когда $\alpha \geq 0{,}5$, для не слишком узких пучков с $a_y/L_\nabla \geq 2$. При этом существует «оптимум» по углу α, при котором влияние анизотропного поглощения на эффективность линейной трансформации максимально.

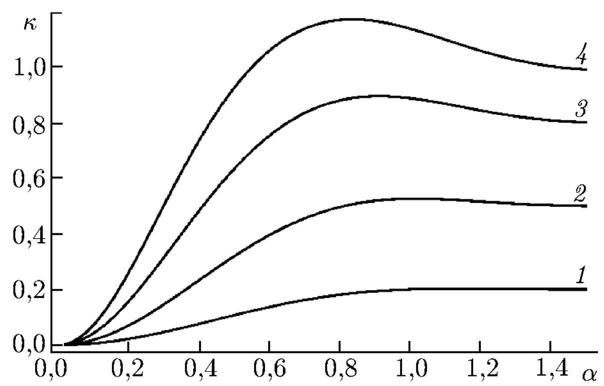

Рис. 2. График зависимости $\kappa(\alpha)$ при различной ширине падающего на область трансформации волнового пучка: кривая *1* соответствует $a_y/L_\nabla = 0{,}5$, кривая *2* — $a_y/L_\nabla = 1$, кривая *3* — $a_y/L_\nabla = 2$, кривая *4* — $a_y/L_\nabla = 10$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе исследован процесс линейной трансформации электромагнитных волн в двумерно-неоднородной магнитоактивной плазме при учёте столкновительного поглощения. Показано, что анизотропное поглощение в двумерно-неоднородной магнитоактивной плазме приводит не только к затуханию падающей, прошедшей и отражённой волн, но и к модификации спектра собственных поперечных мод и «преломлению» падающего на область трансформации волнового пучка. Кроме того анизотропное поглощение меняет зависимость коэффициента трансформации от поперечной фазовой модуляции пучка, выделяя оптимальную величину последней.

Коэффициент «анизотропии» столкновительного поглощения, отвечающего эффективной частоте соударений ν_{ei}, может быть оценён как

$$\delta_y \sim \frac{\nu_{\mathrm{ei}}}{\omega_{\mathrm{pe}}}\, \frac{\omega_{\mathrm{ce}}}{\omega_{\mathrm{ce}} + \omega_{\mathrm{pe}}}\, \sqrt{k_0 L} \sim \delta_x/2.$$

Заметим, что в термоядерных установках $L \sim 10\div100$ см, $N_{\mathrm{e}} \sim 10^{14}$ см$^{-3}$, $T \sim 1$ кэВ, $\omega_{\mathrm{ce}} \approx \omega_{\mathrm{pe}}$, что отвечает весьма малому поглощению $\{\delta_x, \delta_y\} \sim 10^{-5}$. В таких условиях столкновительное поглощение не может заметно повлиять на взаимодействие мод. Однако рассмотренные эффекты могут проявиться в космических условиях, отвечающих большим значениям $k_0 L$.

Авторы выражают признательность Т. А. Хусаинову, участвовавшему в обсуждениях затронутых в настоящей статье вопросов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 11–02–00403-а, 12-02-33043-мол-а-вед) и Совета по грантам Президента РФ (грант МК 3061.2012.2).

ПРИЛОЖЕНИЕ

ВЫВОД ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ ПОЛЯ ПРОШЕДШЕГО ПУЧКА

Для вычисления суммы в выражении (9) воспользуемся асимптотическим соотношением

$$C_n(x_2')/C_n(x_1') \approx \exp[-\pi\nu_n - i\cos(\alpha)\,(x_2'^2 - x_1'^2)/2 - \delta_x\,(x_2' - x_1')] \tag{П1}$$

при

$$|x_{1,2}'| \gg 1, \qquad |x_{1,2}'| \gg |\delta_{1,2}|, \qquad x_1' < 0 < x_2', \qquad \nu \in \mathbb{R}, \tag{П2}$$

следующим из асимптотических представлений функций параболического цилиндра [22, 23], и интегральным представлением для функций $g_n(y_{1,2}')$, вытекающим из интегрального представления для полиномов Эрмита [24]:

$$H_n(z) = \sqrt{\frac{2^{n-1}}{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (z\,\sqrt{2} + it)^n \exp(-t^2/2)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (-2ip)^n \exp[(z+ip)^2]\,\mathrm{d}p.$$

В результате формула (9) может быть преобразована к следующему виду:

$$A^{\mathrm{t}}(x_2', y_2') = \frac{\sin^{1/2}\,|\alpha|}{\pi^{3/2}} \exp\!\left(-i\cos(\alpha)\,\frac{x_2'^2 - x_1'^2}{2}\right) \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} A^{\mathrm{t}}(x_1', y_1') \left\{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2pq)^n}{n!}\exp(-\pi\nu_n)\right\} \times$$
$$\times \exp\left[(z_1 + ip)^2 + (z_2 + iq)^2 - \frac{z_1^2 + z_2^2}{2}\right] \mathrm{d}p\,\mathrm{d}q\,\mathrm{d}y', \quad (\text{П3})$$

где

$$z_i = \sqrt{\sin\,|\alpha|}\;(y_i' + i\delta_y/\sin\alpha).$$

Выражение в фигурных скобках в (П3) представляет собой разложение функции $\xi = \exp\{-2pq\exp[\pi\,(\nu_1 - \nu_0)]\}$ в ряд Тейлора. После подстановки ξ в (П3) интегралы по p и q легко вычисляются. В результате мы приходим к выражениям (10)–(12). Заметим, что отражённый пучок не удаётся представить в аналогичном виде из-за более сложной структуры асимптотики $C_n^+(x')/C_n(x')$ при $x' \to -\infty$ [14].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Наука, 1967.
2. Гинзбург В. Л. // ЖЭТФ. 1943. Т. 7. С. 289.
3. Гинзбург В. Л. // ЖЭТФ. 1948. Т. 18. С. 487.
4. Шкловский И. С. // Астрон. журн. 1946. Т. 23. С. 233.
5. Железняков В. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1958. Т. 1. С. 32.
6. Железняков В. В.// Изв. вузов. Радиофизика. 1959. Т. 2. С. 858.
7. Laqua H. P., Erckmann V., Hartfuß H. J., et al. // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 78. P. 3 467.
8. Laqua H. P. // Plasma Phys. Control. Fusion. 2007. V. 49. P. R1.
9. Mjolhus E. // J. Plasma Phys. 1984. V. 31. P. 7.
10. Токман М. Д. // Физика плазмы. 1985. Т. 10. С. 1 205.
11. Тимофеев А. В. // Физика плазмы. 2000 Т. 26, № 10. С. 874.
12. Weitzner H. // Phys. Plasmas. 2004. V. 11, No. 3. P. 866.
13. Gospodchikov E. D., Shalashov A. G., Suvorov E. V. // Plasma Phys. Control. Fusion. 2006. V. 48. P. 869.
14. Шалашов А. Г., Господчиков Е. Д., Суворов Е. В. // ЖЭТФ. 2006. Т. 130, № 3. С. 544.
15. Popov A. Yu., Piliya A. D. // Plasma Phys. Rep. 2007. V. 33. P. 109.
16. Popov A. Yu. // Plasma Phys. Control. Fusion. 2007. V. 49. P. 1 599.
17. Shalashov A. G., Gospodchikov E. D. // Plasma Phys. Control. Fusion. 2008. V. 50, No. 4. Art. no. 045005.
18. Gospodchikov E. D., Shalashov A. G., Suvorov E. V. // Fusion Sci. Technol. 2008. V. 53. P 261.
19. Popov A. Yu. // Plasma Phys. Control. Fusion. 2010. V. 52. Art. no. 035008.
20. Shalashov A. G., Gospodchikov E. D. // Plasma Phys. Control. Fusion. 2010. V. 52. Art. no. 115001.
21. Стикс Т. Теория плазменных волн. М.: Мир, 1965.
22. Abramowitz M., Stegun I. A. Handbook of mathematical functions. New York: National Bureau of Standards, 1964.
23. Bateman H., Erdely A. Higher transcendental functions. V 2. New York: McGraw-Hill Book Company, 1953.
24. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1970.

Поступила в редакцию 26 марта 2012 г.; принята в печать 28 июля 2012 г.

ON LINEAR TRANSFORMATION OF WAVES IN A TWO-DIMENSIONAL INHOMOGENEOUS MAGNETIZED PLASMA WITH COLLISIONAL ABSORPTION

E. D. Gospodchikov and A. G. Shalashov

Ordinary and extraordinary wave coupling in the electron cyclotron frequency range in non-one-dimensionally inhomogeneous magnetized plasmas in a vicinity of the plasma cut-off surface is studied with taking into account collisional dissipation of waves. Reduced wave equations that describe the normal wave interaction in the considered case are found and solved analytically. Effects of the anisotropy of absorption typical of magnetized plasma on mode-coupling are analyzed.