УДК 532.59

ЭВОЛЮЦИЯ СОСТАВНОГО СОЛИТОНА УРАВНЕНИЯ ГАРДНЕРА В СРЕДАХ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

К. А. Горшков, И. А. Соустова, А. В. Ермошкин, Н. В. Зайцева

Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород, Россия

Обсуждается неквазистационарная эволюция солитонов уравнения Гарднера, близких к предельным, обусловленная переменными параметрами среды. Предложенное приближённое описание такого процесса основано на представлении солитонов уравнения Гарднера как составных образований, сформированных кинками разных полярностей. Получены уравнения, описывающие эволюцию как перепадов поля в кинках, так и медленно меняющихся (по сравнению с перепадами) полей, соединяющих кинки между собой. В аналитическом виде решена задача об эволюции солитона в случае линейного (по времени) изменения коэффициента кубической нелинейности уравнения Гарднера. Проведено сравнение полученного приближённого решения с полученными ранее результатами прямого численного интегрирования этой задачи.

ВВЕДЕНИЕ

Распространение уединённых волн в средах с переменными параметрами давно изучается в теории солитонов. Наиболее исследованы к настоящему времени задачи об эволюции солитонов в средах с медленно меняющимися (по сравнению с масштабами уединённых волн) параметрами. Квазистационарность волнового процесса позволяет в этом случае свести описание трансформации поля уединённой волны к существенно более простой задаче — описанию динамики конечного числа независимых параметров солитона. Последняя задача традиционно решается с помощью одного из вариантов методов возмущений для солитонов [1–6].

Насколько регулярна и универсальна ситуация в квазистационарном случае, настолько же разнообразны и специфичны сценарии эволюции солитонов в ситуациях, когда их масштабы сравнимы или превышают масштабы изменения параметров среды. При этом в зависимости от того, в какую сторону и насколько нарушается баланс между нелинейностью и дисперсией, обеспечивающий существование солитонов, процесс может стремиться к линейному или оставаться нелинейным, приводить лишь к искажениям формы солитона или сопровождаться рождением дополнительных уединённых волн (см. результаты численных расчётов, например в [6, 7]). Настолько существенные различия в характере эволюции солитонов требуют, очевидно, индивидуальных подходов при изучении конкретных случаев, учитывающих как особенности структуры солитонов, так, вообще говоря, и особенности характера изменения параметров среды.

В данной работе предлагается приближённое описание неквазистационарной эволюции солитонов, которые могут трактоваться как составные структуры, образованные более «элементарными» стационарными волнами — кинками (перепадами поля). Наличие сильно различающихся пространственных масштабов у таких солитонов (относительно узкие фронты и спады и протяжённые, почти плоские, вершины) позволяет рассмотреть ситуации, когда для уединённой волны в целом условия квазистационарности не выполняются, но для перепадов поля эти условия сохраняются. Такие солитоны существуют в рамках различных моделей нелинейных внутренних волн [6–8], они известны также в нелинейной оптике в случае сред с так называемой конкурирующей нелинейностью [9]. Ниже обсуждается одна из таких моделей, описываемая расширенным уравнением Кортевега—де Вриза (уравнение Гарднера) с переменными коэффициентами:

$$\Phi_t + \Phi\left[\alpha(x,t) - \mu(x,t)\Phi\right]\Phi_x + \beta(x,t)\Phi_{xxx} = 0. \qquad (1)$$

1. СОСТАВНЫЕ СОЛИТОНЫ УРАВНЕНИЯ ГАРДНЕРА

При постоянных коэффициентах α, μ, β уравнение (1) относится к числу точно интегрируемых [10], а его односолитонное решение в случае $\mu > 0$, который рассматривается ниже, может быть записано в виде

$$\Phi_{\rm s}(x,t) = \phi + \frac{D}{2}\Big\{\operatorname{th}[\lambda\,(x - vt + \Delta)] - \operatorname{th}[\lambda\,(x - vt - \Delta)]\Big\}, \tag{2}$$

где ϕ — произвольный постоянный пьедестал,

$$D^2 = \frac{6}{\mu}\,[v - \phi\,(\alpha - \mu\phi)], \qquad 4\lambda\Delta = \ln[(\Phi_{\rm m} + D)/(\Phi_{\rm m} - D)], \qquad \Phi_{\rm m} = \frac{\alpha}{\mu} - 2\phi, \qquad \lambda = \frac{D}{2}\sqrt{\frac{\mu}{6\beta}}\,.$$

Амплитуда ($\max|\Phi_{\rm s} - \phi|$) и скорость v солитона связаны соотношением $\max|\Phi_{\rm s} - \phi| = |\Phi_{\rm m}| - \sqrt{|\Phi_{\rm m}|^2 - D^2}$, а их возможные значения лежат в интервалах

$$0 < \max|\Phi_{\rm s} - \phi| < |\Phi_{\rm m}|,$$
$$\phi\,(\alpha - \mu\phi) < v < v_m = \frac{\alpha^2}{6\mu} + \frac{\phi}{3}\,(\alpha - \mu\phi). \tag{3}$$

При малых амплитудах решение (2) стремится к солитонному решению уравнения Кортевега—де Вриза (рис. 1). В другом предельном случае, когда амплитуда и скорость солитона стремятся к максимальным значениям $\Phi_{\rm m}$ и $v_{\rm m}$, уединённая волна принимает вид плато, ограниченного относительно узкими перепадами поля, которые по своей структуре близки к кинкам — другому типу стационарных волн, существующих в рамках уравнения (1) при постоянных α, μ, β и единственном значении скорости $v = v_{\rm m}$(рис. 1):

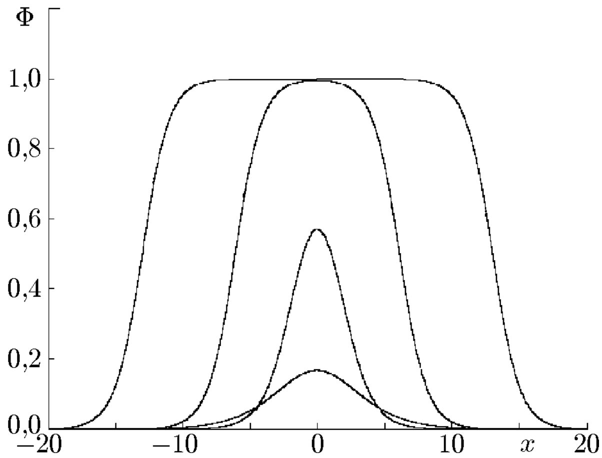

Рис. 1. Солитоны с различными амплитудами

$$\Phi_k(x,t) = \phi + \frac{\Phi_{\rm m}}{2}\,\{1 \pm \operatorname{th}[\lambda_{\rm m}\,(x - v_{\rm m}t)]\}, \qquad \lambda_{\rm m} = \frac{\Phi_{\rm m}}{2}\sqrt{\frac{\mu}{6\beta}}\,. \tag{4}$$

Солитоны (2) можно рассматривать как составные образования, сформированные кинками разных полярностей (знаки $\pm$ в (4)). Наиболее очевидным образом это свойство проявляется у солитонов с амплитудами и скоростями близкими к $\Phi_{\rm m}$, $v_{\rm m}$, когда решение (2) имеет вид суперпозиции кинков (4) [11, 12]:

$$\begin{aligned}\Phi_{\rm s}(x - vt)\Big|_{v\to v_{\rm m}} &= \Phi_k\,[x - x_{\rm ф}(t)] + \Phi_k\,[x - x_{\rm c}(t)] - \phi - \Phi_{\rm m} = \\ &= \phi + \frac{\Phi_{\rm m}}{2}\Big\{\operatorname{th}\Big[\lambda_{\rm m}\,[x - x_{\rm c}(t)]\Big] - \operatorname{th}\Big[\lambda_{\rm m}\,[x - x_{\rm ф}(t)]\Big]\Big\},\end{aligned} \tag{5}$$

координаты фронта $x_{\rm ф}(t)$ и спада $x_{\rm c}(t)$ которых определяются уравнениями

$$\frac{{\rm d}x_{\rm ф}}{{\rm d}t} = \frac{{\rm d}x_{\rm c}}{{\rm d}t} = v_{\rm m} - \frac{2}{3}\,\mu\Phi_m^2\exp[-\lambda_{\rm m}\,(x_{\rm ф} - x_{\rm c})]. \tag{6}$$

Очевидно, что величины $\mathrm{d}x_\text{ф}/\mathrm{d}t = \mathrm{d}x_\text{c}/\mathrm{d}t$ и $x_\text{ф} - x_\text{c}$ постоянны, так что решение (5), (6) описывает стационарный солитон, движущийся со скоростью $v = \mathrm{d}x_\text{ф}/\mathrm{d}t = \mathrm{d}x_\text{c}/\mathrm{d}t$, размер которого $x_\text{ф} - x_\text{c}$ связан со скоростью уравнением (6), согласующимся с точным соотношением $\Delta(v)$ в (2) при $v \to v_\mathrm{m}$. При наличии возмущений эволюция составных солитонов может быть описана как динамика составляющих их кинков. Такой подход, включает в себя как частный случай традиционное описание солитонов как целостных образований, характеризующихся одной медленно меняющейся скоростью и координатой. Для реализации этого случая необходимо, чтобы при возмущениях скорости кинков $\mathrm{d}x_\text{ф}/\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}x_\text{c}/\mathrm{d}t$ оставались близкими друг к другу настолько, чтобы дополнительные члены в (6) не превосходили экспоненциального слагаемого, отвечающего за стационарную связь кинков в уединённой волне. В противном случае движение кинков становится существенно несинхронным и не позволяет рассматривать данную пару кинков как единое целое. Примером неквазистационарного процесса может служить взаимодействие солитонов (5), (6) с сильно различающимися размерами. Уравнения для координат кинков в этой задаче отличаются от (6) наличием дополнительных экспоненциальных членов, отвечающих за взаимодействие кинков данного солитона с кинками соседних уединённых волн. При этом величина дополнительных членов не предполагается малой, что позволяет рассматривать ситуации, когда расстояния между солитонами становятся сравнимыми или даже меньше, чем их размеры (разумеется, промежутки между любыми кинками остаются бо́льшими по сравнению с λ_m^{-1}). В результате процесс протекает существенно неквазистационарно и отвечает столкновению протяжённых образований [11, 12]. Ниже обсуждается эволюция солитонов (5), (6), обусловленная изменениями параметров среды. Предполагается, что эти изменения достаточно сильные, так что отличия величин v_m в местах расположения соседних кинков значительно превосходят экспоненциальные слагаемые в (6). Такой существенно неквазистационарный процесс изучается в рамках следующей задачи.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим последовательность кинков чередующейся полярности, которые при постоянных параметрах среды α, μ, $\beta = \mathrm{const}$ формируют последовательность солитонов, близких к предельным (5), (6). При наличии возмущений будем предполагать, что масштабы изменения коэффициентов α, μ, β и пьедесталов (порядка Λ^{-1}) существенно превосходят масштабы перепадов поля кинков (порядка λ_m^{-1}), но остаются малыми или сравнимыми с расстояниями и интервалами между ними.

Такое соотношение масштабов позволяет искать решение, сохраняющее в общих чертах исходную структуру поля: относительно узкие (внутренние) области с быстрыми изменениями поля, бывшие ранее фронтами и спадами солитонов, чередуются с протяжёнными (внешними) областями с медленными и плавными изменениями поля, первоначально отвечавшими плоским вершинам солитонов и пьедесталам между ними. Как и в задаче о взаимодействии солитонов, близких к критическим [11, 12], искомое здесь решение строится методом сращиваемых асимптотических разложений. В каждой из внутренних и внешних областей решение ищется в виде разложения по малому параметру ε, по порядку величины равному отношению масштабов $\Lambda/\lambda_\mathrm{m} \ll 1$. В каждом приближении решения, полученные в соседних областях, сшиваются между собой.

Во внутренних областях для перепадов поля кинков выполняются условия квазистационарности, поэтому в качестве главных членов разложения в этих областях выступают кинковые решения ϕ_k (4), параметры которых λ_m, v_m, Φ_m, определяемые стационарными связями с величинами α, μ, β, ϕ, медленно меняются во времени. Во внешних областях главные члены разложений, обозначаемые далее как $\phi(x,t)$, не имеют фиксированной структуры. Поскольку величины ϕ

меняются медленно и плавно по сравнению с изменениями полей в областях перепадов, их эволюция описывается исходным уравнением (1) в бездисперсионном приближении, т. е. уравнением простой волны:

$$\phi_t + \phi\,[\alpha(x,t) - \mu(x,t)\phi]\,\phi_x = 0. \tag{7}$$

Сильное различие масштабов полей ϕ и Φ_k и характер их структуры позволяет сшить эти решения в типичной для метода сращиваемых асимптотических разложений форме:

$$\Phi_k[x - x_k(t) \to \pm\infty] = \phi_\pm[x = x_k(t), t], \tag{8}$$

где $x_k(t)$ — координата центра произвольного кинка рассматриваемой последовательности, $\phi_\pm(x,t)$ — медленно меняющиеся поля из внешних областей, примыкающих к данной внутренней области со стороны $x > x_k$ и соответственно $x < x_k$. Наличие только одной произвольной постоянной в асимптотиках стационарного кинкового решения (в виде пьедестала ϕ в формуле (4)) приводит к однозначной связи между асимптотиками кинка и, следовательно, полей ϕ_+ и ϕ_-:

$$\phi_+(x_k,t) = \frac{\alpha(x_k,t)}{\mu(x_k,t)} - \phi_-(x_k,t). \tag{9}$$

Квазистационарный характер эволюции перепадов поля позволяет воспользоваться зависимостью v_{m} (3) для определения координат $x_k(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t} = \frac{\alpha^2(x_k,t)}{6\mu(x_k,t)} + \frac{\phi(x_k,t)}{3}\,[\alpha(x_k,t) - \mu(x_k,t)\phi(x_k,t)]. \tag{10}$$

В качестве медленно меняющейся компоненты поля ϕ в (10) может быть использована как величина ϕ_+ , так и ϕ_-, поскольку с учётом (9) выполняется следующее равенство характеристических скоростей (см. ниже):

$$\phi_+(x_k,t)\,[\alpha(x_k,t) - \mu(x_k,t)\phi_+(x_k,t)] = \phi_-(x_k,t)\,[\alpha(x_k,t) - \mu(x_k,t)\phi_-(x_k,t)]. \tag{11}$$

Уравнения (7), (10) со связями (9) образуют замкнутую систему, достаточную для полного описания медленно меняющихся полей ϕ во всех внешних областях последовательности кинков.

Как известно, решение уравнения в частных производных первого порядка (7) сводится к решению характеристической системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \phi\,[\alpha(x,t) - \mu(x,t)\,\phi], \qquad \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{12}$$

Решение этой системы определяет характеристики — линии в плоскости (x,t), вдоль которых значения поля ϕ переносятся со скоростью $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ из (12) без изменения величины этого поля. Нетрудно убедиться, что скорость движения кинков $\mathrm{d}x_k/\mathrm{d}t$ (10) всегда больше характеристической скорости как в области перед кинком $x > x_k$, так и в области $x < x_k$ (рис. 2):

$$\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t} - \phi_\pm(x_k,t)\,[\alpha(x_k,t) - \mu(x_k,t)\phi_\pm(x_k,t)] = \frac{1}{6\mu(x_k,t)}\,[\alpha(x_k,t) - 2\mu(x_k,t)\phi_\pm(x_k,t)]^2 \geq 0. \tag{13}$$

Собственно неравенство (13) означает, что характеристики пересекаются с траекторией кинков $x_k(t)$, так что кривая $x_k(t)$ может служить линией начальных данных для уравнения (7). Знак неравенства (13) означает, что в эволюционной (по времени) задаче, рассматриваемой здесь, ветви характеристик, начинающиеся от точек их пересечения с траекторией $x_k(t)$ и формирующие

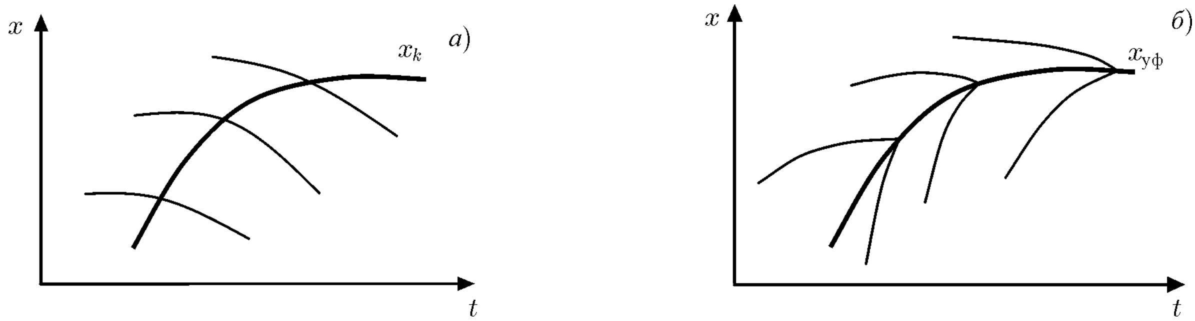

Рис. 2. Траектории кинка и ударного фронта и характеристики, соответствующие решению уравнения (7)

поле $\phi(x,t)$ с растущей переменной t, располагаются в области $x < x_k(t)$. Отсюда следует, что для поля $\phi(x,t)$ в любой внешней области между двумя соседними кинками линией начальных данных служит траектория кинка $x_k(t)$, ограничивающая эту область справа по оси x со значениями поля $\phi(x_k,t)$. Решение уравнения (7) с этими начальными условиями определяет поле ϕ как функцию x и t при всех $x < x_k(t)$, в том числе и вблизи траектории следующего кинка $x_{k+1}(t)$, ограничивающей данную внешнюю область слева по оси x, и позволяет найти эту траекторию из уравнения (10), используя полученную зависимость $\phi(x,t)$ при $x = x_{k+1}(t)$. Добавляя к найденной траектории $x_{k+1}(t)$ распределение поля непосредственно за $(k+1)$-ым кинком, равное в соответствие с (9) $\alpha(x_{k+1},t)\mu^{-1}(x_{k+1},t) - \phi(x_{k+1},t)$, получаем начальные условия для определения поля в следующей внешней области. Таким образом, построение общего решения состоит в последовательном определении полей $\phi(x,t)$ и траекторий кинков $x_k(t)$, начиная с области перед первым кинком рассматриваемой последовательности.

Возможность получения аналитических результатов в рамках описанного алгоритма определяется, прежде всего, интегрируемостью (сведением к квадратурам) характеристической системы уравнений (12). Будем предполагать, что её решение имеет вид

$$F(x,t,\phi) = 0, \tag{14}$$

где зависимость от ϕ включает заданное распределение поля $\phi(x_k,t)$ на известной траектории k-го кинка $x_k(t)$. Если выражение (14) может быть разрешено относительно ϕ, то замкнутое уравнение для координаты $x_{k+1}(t)$ имеет вид (10) (с заменой $x_k(t)$ на $x_{k+1}(t)$). В случае, когда выражение (14) разрешимо лишь относительно x:

$$x = X(t,\phi), \tag{15}$$

оно может быть использовано для получения замкнутого уравнения для поля $\phi[x_{k+1}(t),t] = \phi_+(t)$ вблизи следующего, $(k+1)$-го, кинка. Дифференцируя (15) по t, предварительно положив $x = x_{k+1}(t)$, $\phi = \phi_+(t)$, получаем

$$\frac{\mathrm{d}x_{k+1}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial \phi}\,\frac{\mathrm{d}\phi_+}{\mathrm{d}t}\,. \tag{16}$$

Исключая с помощью (10) производную $\mathrm{d}x_{k+1}/\mathrm{d}t$ и учитывая, что частная производная $\partial X/\partial t$ равна правой части первого уравнения в (12) $\phi(\alpha - \mu\phi)$, приходим к искомому уравнению:

$$\frac{\partial X}{\partial \phi}\,\frac{\mathrm{d}\phi_+}{\mathrm{d}t} = \frac{(\alpha - 2\mu\phi_+)^2}{6\mu}\,, \tag{17}$$

где зависимость коэффициентов α и μ от x заменена на зависимость от ϕ_+ и t с помощью (15). Решение уравнения (17), если его удаётся получить, при подстановке в (15) определяет в явном виде траекторию $x_{k+1}(t)$.

И, наконец, когда (14) разрешимо лишь относительно t:

$$t = T(x, \phi), \tag{18}$$

то, как и в предыдущем случае, можно получить замкнутое уравнение для поля $\phi_+(x)$:

$$\frac{\partial T}{\partial \phi}\,\frac{\mathrm{d}\phi_+}{\mathrm{d}t} = -\,\frac{(\alpha - 2\mu\phi_+)^2}{\phi_+\,(\alpha - \mu\phi_+)\,[\alpha^2 + 2\mu\phi_+\,(\alpha - \mu\phi_+)]}\,, \tag{19}$$

в котором зависимость коэффициентов α и μ от t исключена с помощью (18). Подстановка решения (19) в (18) определяет функцию, обратную к траектории $(k+1)$-го солитона. Отметим, что случаи разрешимости выражения (14) в виде (15) и (18) реализуются, в частности, когда коэффициенты α и μ зависят только от t или только от x соответственно. В случае, когда выражение (14) не разрешается относительно какой-либо одной переменной, оно может быть использовано как условие связи ϕ_+ и x_{k+1} при численном интегрировании уравнения (10).

Приближённые решения, получаемые в рамках предложенного подхода, имеют, вообще говоря, ограниченные области применимости как по времени, так и по координате. Эти ограничения обуславливаются нарушениями основных соотношений между масштабами изменения параметров среды и эволюционирующего поля, заложенных при построении приближённых решений. Во внутренних областях такие нарушения возникают в случаях, когда растущие пространственные масштабы перепадов поля приводят к неквазистационарной эволюции кинков. Во внешних областях плавный и медленный ход эволюции поля может нарушаться появлением особенностей — неограниченно укручающихся участков поля, обусловленных наличием в решении (12) сближающихся и пересекающихся между собой характеристик. Пример эволюции квазисолитона с учётом указанных ограничений подробнее обсуждается ниже.

Рассмотренная задача по постановке и методу решения весьма близка к хорошо и давно изученной задаче об эволюции слабых ударных волн, распространяющихся в одном направлении и описываемых, в частности, уравнением (1) с заменой дисперсионного члена Φ_{xxx} на вязкий Φ_{xx}. Сравниваемые задачи имеют сходный характер общей структуры исследуемого поля в виде чередующих узких и протяжённых областей с быстрыми и медленными изменениями поля, и обе решаются методом сращиваемых асимптотических разложений. В обоих случаях в областях с быстрым изменением поля главными членами разложений искомых решений являются квазистационарные перепады поля (кинки и ударные фронты), а в областях с медленным изменением — поля́ ϕ, которые описываются уравнениями простой волны.

Вместе с тем причинно-следственный характер решений и алгоритм их получения в сравниваемых задачах принципиально различен. Напомним, что для существования устойчивого фронта ударной волны необходимо и достаточно, чтобы скорость возмущений, распространяющихся перед ударным фронтом, была меньше, а за фронтом — больше скорости самого фронта (рис. 2). Поэтому траектория фронта не может служить линией начальных данных в эволюционной задаче для полей ϕ ни в области за фронтом, ни перед ним. В результате эволюция медленно меняющихся полей в промежутках между фронтами не зависит от их движения, а определяется начальным распределением $\phi(x, t = 0)$. В свою очередь, движение ударных фронтов полностью определяется медленно меняющимися полями ϕ_+, ϕ_- вблизи них. В стационарном решении для ударной волны $\Phi_{\text{уф}}(x - v_{\text{уф}}t)$ обе асимптотики $\Phi_{\text{уф}}(\pm\infty) = \phi_\pm$ (а не одна, как для кинков) являются произвольными, и через них однозначно определяется скорость $v_{\text{уф}}$ (например, для квадратичной нелинейности $(\mu = 0)$ $v_{\text{уф}} = \alpha\,(\phi_+ + \phi_-)/2$). Таким образом, в случае ударных волн нахождение медленно меняющихся полей в любых промежутках между фронтами осуществляется независимо, а не последовательно, как в случае кинков, и лишь затем из условия пересечения характеристик из соседних протяжённых областей со своими значениями полей ϕ_+ и ϕ_- определяются скорости и траектории движения фронтов.

3. ПРИМЕР ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПРИБЛИЖЁННОГО ОПИСАНИЯ

Использование предложенного алгоритма проиллюстрируем на примере эволюции солитона уравнения Гарднера, близкого к предельному, в случае линейного по времени изменения коэффициента μ:

$$\mu(t) = \mu_0\,(1 + \varepsilon t), \qquad \mu_0 = \mathrm{const}. \tag{20}$$

Такой выбор обусловлен возможностью сравнения с результатами численного решения этой задачи, приведёнными в работе [7]. Как и в указанной работе, рассмотрим эволюцию солитона с нулевыми асимптотиками (пьедестал ϕ в (2), (5) равен нулю) и положим без потери общности $\alpha = \mu_0 = \beta = 1$. Коэффициент ε в (20) отвечает малому параметру, используемому выше, если время t нормировать на величину $\lambda_\mathrm{m} v_\mathrm{m}$.

Общее решение характеристической системы (12) при выбранном законе изменения $\mu(t)$ имеет вид

$$2\varepsilon\,(x - x_0) = [1 - \phi(1 + \varepsilon t_0)]^2 - [1 - \phi(1 + \varepsilon t)]^2. \tag{21}$$

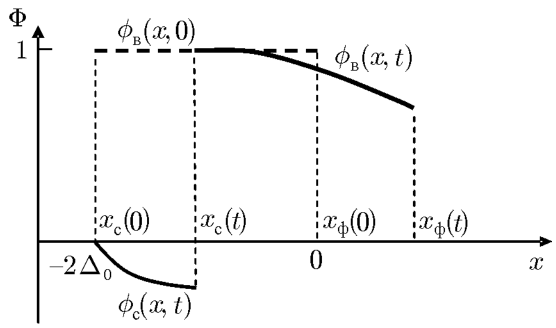

Рис. 3. Характерные особенности поля в разных областях составного квазисолитона

Все характеристики (21) — параболы в плоскости (x, t) с вершинами, обращёнными по направлению оси x и фокальными параметрами $(\varepsilon\phi)^{-2}$. При соответствующем выборе линии начальных данных $x_0(t_0)$ и распределения $\phi(t_0)$ поля ϕ вдоль неё выражение (21) описывает медленно меняющееся поле в любой внешней области. Введём следующие обозначения для полей ϕ: $\phi_\text{ф}(x,t)$ — поле в области перед фронтом солитона $x > x_\text{ф}(t)$, $\phi_\text{в}(x,t)$ — поле в области вершины солитона между его фронтом и спадом $x_\text{с}(t) < x < x_\text{ф}(t)$, и, наконец, $\phi_\text{с}(x,t)$ — поле за спадом уединённой волны $x < x_\text{с}(t)$, где $x_\text{ф}(t)$, $x_\text{с}(t)$ — координаты кинков, отвечающих фронту и спаду квазисолитона соответственно (рис. 3).

Поскольку кинки определяют поле ϕ лишь в области за их центрами, отсутствие возмущений перед фронтом солитона в начальный момент времени будет сохраняться и в дальнейшем, т. е. $\phi_\text{ф} = 0$. Это позволяет сразу определить скорость фронта $[6\mu(t)]^{-1}$ и величину перепада поля $\mu^{-1}(t)$ непосредственно из выражений (9), (10) и, таким образом, найти линию начальных данных и распределение поля на ней (см. рис. 3):

$$x_\text{ф}(t) = \int\limits_0^t v_\mathrm{m}(t')\,\mathrm{d}t' = \frac{1}{6\varepsilon}\ln(\varepsilon t + 1), \qquad \phi_\text{в}(x_\text{ф}, t) = \frac{1}{\mu(t)} = (1 + \varepsilon t)^{-1}. \tag{22}$$

Для полного описания поля $\phi_\text{в}(x,t)$, начиная с момента времени $t = 0$, линию начальных данных (22) необходимо дополнить отрезком

$$-2\Delta_0 < x < 0, \qquad t = 0, \qquad \phi_\text{в}(x,0) = 1, \tag{23}$$

отвечающим расстоянию $2\Delta_0$ между фронтом и спадом солитона при $t = 0$, с постоянным значением поля на этом отрезке, равным предельной амплитуде солитона $\phi_\text{в}(x, 0) = \Phi_\text{m}[\mu(0)] = 1$. Наличие двух участков (22), (23) на линии начальных данных, описываемых различными кривыми с различным распределением поля $\phi_\text{в}$ вдоль них, порождает и два семейства характеристик с различным поведением:

$$\text{а) } 6\varepsilon x = -\ln\phi_\text{в} - 3\,[(1+\varepsilon t)\,\phi_\text{в}]^2; \qquad \text{б) } x = x_0 - \varepsilon t^2/2, \quad 2\Delta_0 < x_0 \le 0, \quad \phi_\text{в} = 1. \tag{24}$$

Характеристики семейства (24а), точнее ветви парабол, формирующие поле $\phi_\text{в}(x,t)$ при $x < x_\text{ф}(t)$, расходятся относительно друг друга из-за увеличения их фокальных параметров вдоль траектории фронта солитона (см. рис. 4). Часть вершины солитона, формируемая этим семейством характеристик монотонно расширяется, а величина поля $\phi_\text{в}$ в этой части вершины плавно уменьшается в направлении фронта. Характеристики семейства (24б) — параболы с одинаковыми фокальными параметрами и вершинами, расположенными на отрезке (23) (рис. 4). Часть вершины солитона, формируемая этим семейством характеристик, сохраняется плоской с первоначальным значением поля $\phi_\text{в} = 1$, а эволюция этого участка сводится к изменению его протяжённости (рис. 3). Со стороны фронта плоский участок вершины квазисолитона ограничен характеристикой $x = -\varepsilon t^2/2$, выходящей из точки расположения фронта при $t = 0$, а с другой стороны — траекторией спада квазисолитона $x_\text{c}(t)$ (рис. 4). Поскольку величина поля вблизи спада со стороны вершины ϕ_c^+ известна ($\phi_\text{в}(x_\text{c}, t) = 1$), то из уравнения (10) сразу определяется скорость спада $1/[6\,(1+\varepsilon t)] - \varepsilon t/3$ и его координата

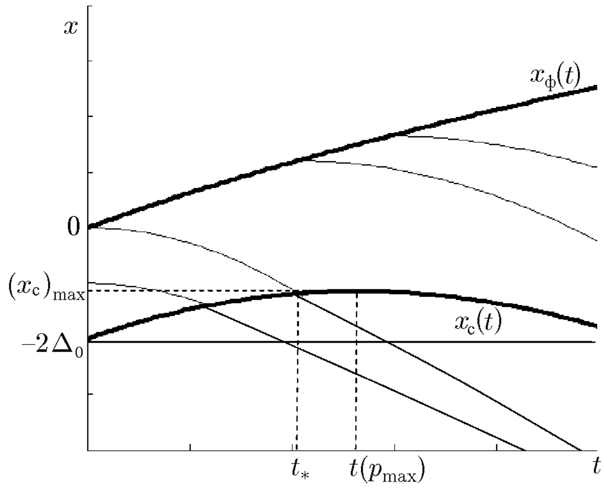

Рис. 4. Поведение характеристик составного солитона

$$x_\text{c}(t) = -2\Delta_0 + \frac{1}{6\varepsilon}\ln(1+\varepsilon t) - \varepsilon t^2/6. \tag{25}$$

В результате протяжённость плоского участка вершины, равная

$$2\Delta_0 - \frac{1}{6\varepsilon}\ln(1+\varepsilon t) - \varepsilon t^2/3,$$

монотонно уменьшается от величины $2\Delta_0$ при $t = 0$ до нуля при $t = t_*$, где величина t_* определяется соотношением (рис. 4)

$$12\varepsilon\Delta_0 = 2\,(\varepsilon t_*)^2 + \ln(1+\varepsilon t_*), \tag{26}$$

в то же время размер квазисолитона $2\Delta(t) = x_\text{ф}(t) - x_\text{c}(t)$ монотонно растёт:

$$2\Delta(t) = 2\Delta_0 + \varepsilon t^2/2. \tag{27}$$

За спадом квазисолитона, начиная с момента времени $t = 0$, возникает и растёт по абсолютной величине поле $\phi_\text{c}(x,t)$. Его величина вблизи спада $\phi_\text{c}^-(t) = \phi_\text{c}(x_\text{c}(t), t)$ при $0 < t < t_*$, когда $\phi_\text{c}^+(t) = 1$, согласно (9) равна

$$\phi_\text{c}^-(t) = \mu^{-1}(t) - 1 = -\varepsilon t\,(1+\varepsilon t)^{-1}. \tag{28}$$

Формулы (25), (28) задают линию начальных данных и распределение поля на ней для определения $\phi_{\rm c}(x,t)$ и позволяют получить из (21) в явном виде выражение для характеристик, начинающихся на траектории спада $x_{\rm c}(t)$ при $0 < t < t_*$:

$$6\varepsilon x = -12\varepsilon\Delta_0 - \ln(1+\phi_{\rm c}) + (3 - 2\phi_{\rm c}^2)\,(1+\phi_{\rm c})^2 - 3\,[1 - (1+\varepsilon t)\,\phi_{\rm c}]^2. \tag{29}$$

Поскольку фокальный параметр парабол (29), равный $(\varepsilon\phi_{\rm c})^{-2}$, уменьшается вдоль $x_{\rm c}(t)$, все характеристики (29) в области $x < x_{\rm c}(t)$ сходятся и пересекаются между собой (рис. 4). Это приводит с течением времени к возникновению укручающихся участков и появлению физически недопустимых неоднозначностей в распределении $\phi_{\rm c}(x,t)$ (рис. 6).

При $t > t_*$ поле вершины квазисолитона полностью формируется семейством характеристик (24а), при этом величина поля $\phi_{\rm c}^+(t)$ уже не является постоянной и заданной и может быть определена из уравнения (17), поскольку выражение для характеристик (24а) разрешено относительно x. Вычисляя производную $\partial X/\partial\phi$ из (24а) и подставляя её в (17), получаем уравнение для $\phi_{\rm c}^+(t)$

$$\frac{{\rm d}\phi_{\rm c}^+(t)}{{\rm d}t} = \frac{\varepsilon\phi_{\rm c}^+\,(1 - 2\mu\phi_{\rm c}^+)^2}{\mu\,[6\mu\phi_{\rm c}^+\,(1 - \mu\phi_{\rm c}^+) - 1]}\,, \qquad \mu = 1 + \varepsilon t, \tag{30}$$

решение которого $\phi_{\rm c}^+(\mu)$ в параметрической форме имеет вид

$$\begin{gathered}\phi_{\rm c}^+(p) = cp^{-3/2}\,(p-1)^{-1/2}\exp[-1/(2p)],\\ 1 + \varepsilon t(p) = \mu(p) = c^{-1}p^{5/2}\,(p-1)^{1/2}\exp[1/(2p)], \qquad p > p_*,\end{gathered} \tag{31}$$

где c — постоянная интегрирования.

Как следует из (31), $p = \mu(p)\phi_{\rm c}^+(p)$, так что параметр p имеет смысл отношения величины поля перед спадом квазисолитона к величине поля вблизи его фронта (μ^{-1}). При $t > t_*$ величина поля $\phi_{\rm c}^+(t)$ в каждый момент времени (в соответствии с интерпретацией медленно меняющейся компоненты поля ϕ) определяется полем вблизи фронта квазисолитона в некоторый предыдущий момент: $\phi_{\rm c}^+(t) = \mu^{-1}\,(1-\tau)$, с задержкой τ, обусловленной временем прохождения возмущений от фронта к спаду. Поэтому величина параметра p при растущей зависимости $\mu(t)$ всегда больше единицы, а диапазон его изменения равен $1 < p_* \le p < +\infty$, когда t меняется в интервале $t_* < t < +\infty$ При этом $p_* = 1 + \varepsilon t_*$, а постоянная c в (31) определяется из условия $\phi_{\rm c}^+(p_*) = 1$.

Подстановка (31) в (24а) и (9) даёт зависимости координаты спада квазисолитона:

$$12\varepsilon x_{\rm c}(p) = \ln[c^{-2}p^3\,(p-1)] + p^{-1} - 6\,(p-1)^2, \tag{32}$$

и величины поля $\phi_{\rm c}^-$ за его спадом:

$$\phi_{\rm c}^-(p) = -cp^{5/2}\,(p-1)^{1/2}\exp[1/(2p)]. \tag{33}$$

Зависимости $\mu(p)$ и $x_{\rm c}(p)$ в (31), (32) можно представить с помощью (33) функциями $\phi_{\rm c}^-$, которые после подстановки в (21) определяют характеристики, формирующие поле за спадом квазисолитона и начинающиеся на траектории спада $x_{\rm c}(t)$ при $t > t_*$:

$$2\varepsilon\,[x - x_{\rm c}(\phi_{\rm c})] = [1 - \mu(\phi_{\rm c})\,\phi_{\rm c}]^2 - [1 - \mu(t)\,\phi_{\rm c}]^2. \tag{34}$$

Выражения (31)–(34) полностью описывают эволюцию как спада квазисолитона $(x_{\rm c}(t), \phi_{\rm c}^+(t))$, так и поля $\phi_{\rm c}(x,t)$ при $x < x_{\rm c}(t)$, $t > t_*$. Эволюция фронта и поля на вершине квазисолитона на этом этапе по-прежнему описывается приведёнными выше формулами (22), (24а). Как следует из (31), зависимости $\phi_{\rm c}^+(p)$ и $\mu(p)$, $t(p)$ — монотонно убывающая и монотонно возрастающие функции p соответственно. На больши́х временах, когда $\{\mu, p\} \gg 1$, поля вблизи спада и фронта уменьшаются как $t^{-2/3}$ и t^{-1} соответственно, так что их отношение растёт ($p \sim t^{1/3}$), а форма квазисолитона стремится к треугольной. В то же время зависимости (32), (33) немонотонны: $\phi_{\text{с}}^{-}$ — имеет минимум при $p_{\min} = (3+\sqrt{5})/4$, равный $(\phi_{\text{с}}^{-})_{\min} = -0{,}1474c$, а $x_{\text{с}}$ — максимум при $p_{\max} = (1+\sqrt{3})/2$, равный $12\varepsilon\,(x_{\text{с}})_{\max} = \ln(0{,}8684c^{-2})$. Эти экстремумы реализуются, если начальный размер солитона $2\Delta_0$ не слишком велик, когда $p_* < \{p_{\min}, p_{\max}\}$. Если же $p_* > p_{\min}$, то минимум $\phi_{\text{с}}^{-}$ реализуется при $t_{\min} = t_*$ и определяется из (28) $(\phi_{\text{с}}^{-})_{\min} = -\varepsilon t_*\,(1+\varepsilon t_*)^{-1}$, а при $p_* > p_{\max}$ максимум $x_{\text{с}}$ определяется из (25) при $\varepsilon t_{\max} = (\sqrt{3}-1)/2$.

Таким образом, движение спада квазисолитона после достижения им точки $(x_{\text{с}})_{\max}$ происходит в противоположном по отношению к фронту направлении. При этом и распределение $\phi_{\text{с}}^{-}$ на траектории спада $x_{\text{с}}$ оказывается немонотонным и порождает семейства характеристик с различным поведением. Характеристики, начинающиеся на начальном участке $x_{\text{с}}$, на котором величина поля $\phi_{\text{с}}^{-}$ уменьшается от нуля до $(\phi_{\text{с}}^{-})_{\min}$, сходятся и, вообще говоря, пересекаются между собой, в то время как все остальные характеристики расходятся относительно друг друга.

В результате формируемое характеристиками (29), (34) поле $\phi_{\text{с}}(x,t)$ представляет собой вытягивающееся за спадом квазисолитона плато отрицательной полярности, величина поля в котором плавно убывает от нуля до минимального значения $(\phi_{\text{с}}^{-})_{\min}$ и затем асимптотически (при $t \to \infty$) вновь медленно возвращается к нулю. Плавный и медленный ход эволюции нарушается появлением особенности — неограниченно укручающегося участка поля, расположенного в ниспадающей области распределения $\phi_{\text{с}}(x,t)$. Появление этого участка обусловлено наличием в (29), (34) семейства сближающихся и пересекающихся между собой характеристик. Адекватное описание указанной особенности требует, очевидно, учёта дисперсионных эффектов, т. е. выхода за рамки используемого подхода. При этом, однако, следует иметь ввиду, что участок с особенностью, несмотря на «заполнение» его осцилляциями поля и расширение (из-за дисперсии), отдаляется от спада квазисолитона, так что пространственно-временна́я область, где остаётся справедливым рассмотренное описание поля $\phi_{\text{с}}(x,t)$, оказывается не малой и, более того, расширяющейся с течением времени.

Приведённое решение сохраняет величину площади S под кривой $\Phi(x,t)$, что соответствует сохранению интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(x,t)\,\mathrm{d}x$ для локализованных полей, описываемых уравнением Гарднера (1) с коэффициентами, зависящими только от времени. В этом можно убедиться непосредственно, дифференцируя величину $S(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int\limits_0^{x_{\text{с}}(t)}\phi_{\text{с}}(x,t)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{x_{\text{с}}(t)}^{x_{\text{ф}}(t)}\phi_{\text{в}}(x,t)\,\mathrm{d}x\right] =$$

$$= \dot{x}_{\text{с}}\phi_{\text{с}}^{-} + \dot{x}_{\text{ф}}\phi_{\text{ф}}^{-} - \dot{x}_{\text{с}}\phi_{\text{с}}^{+} - \phi_{\text{с}}^{2}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\mu\phi_{\text{с}}}{3}\right)\Bigg|_0^{x_{\text{с}}} - \phi_{\text{в}}^{2}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\mu\phi_{\text{с}}}{3}\right)\Bigg|_{x_{\text{с}}}^{x_{\text{ф}}}.$$

Подставляя в последнее выражение соотношения (9), (10) и имея ввиду, что $\phi_{\text{ф}}^{-}(t) = \phi_{\text{в}}(x_{\text{ф}},t) = \alpha(t)/\mu(t)$, $\phi_{\text{в}}(x_{\text{с}},t) = \phi_{\text{с}}^{+}(t)$, $\phi_{\text{с}}(x_{\text{с}},t) = \phi_{\text{с}}^{-}(t)$ получаем $\mathrm{d}S/\mathrm{d}t \equiv 0$ для любых зависимостей $\alpha(t)$, $\mu(t)$.

Для наглядного представления об эффективности предложенного подхода ниже проведено сопоставление результатов, полученных прямым численным интегрированием уравнения Гарднера [7] и в рамках приближённого описания. На рис. 5 представлены зависимости ширины квазисолитона $2\Delta(t)$ от времени, а также для контраста, и зависимость ширины солитона при квазистационарном описании. Сопоставление распределений полей на вершине квазисолитона и

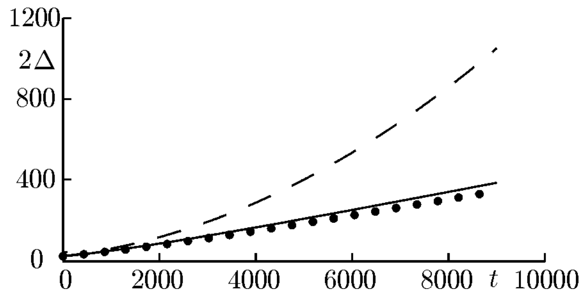

Рис. 5. Зависимость ширины солитона от времени. Сплошная линия соответствует приближённому подходу, точки — численному решению уравнения Гарднера, пунктир — квазистационарному приближению

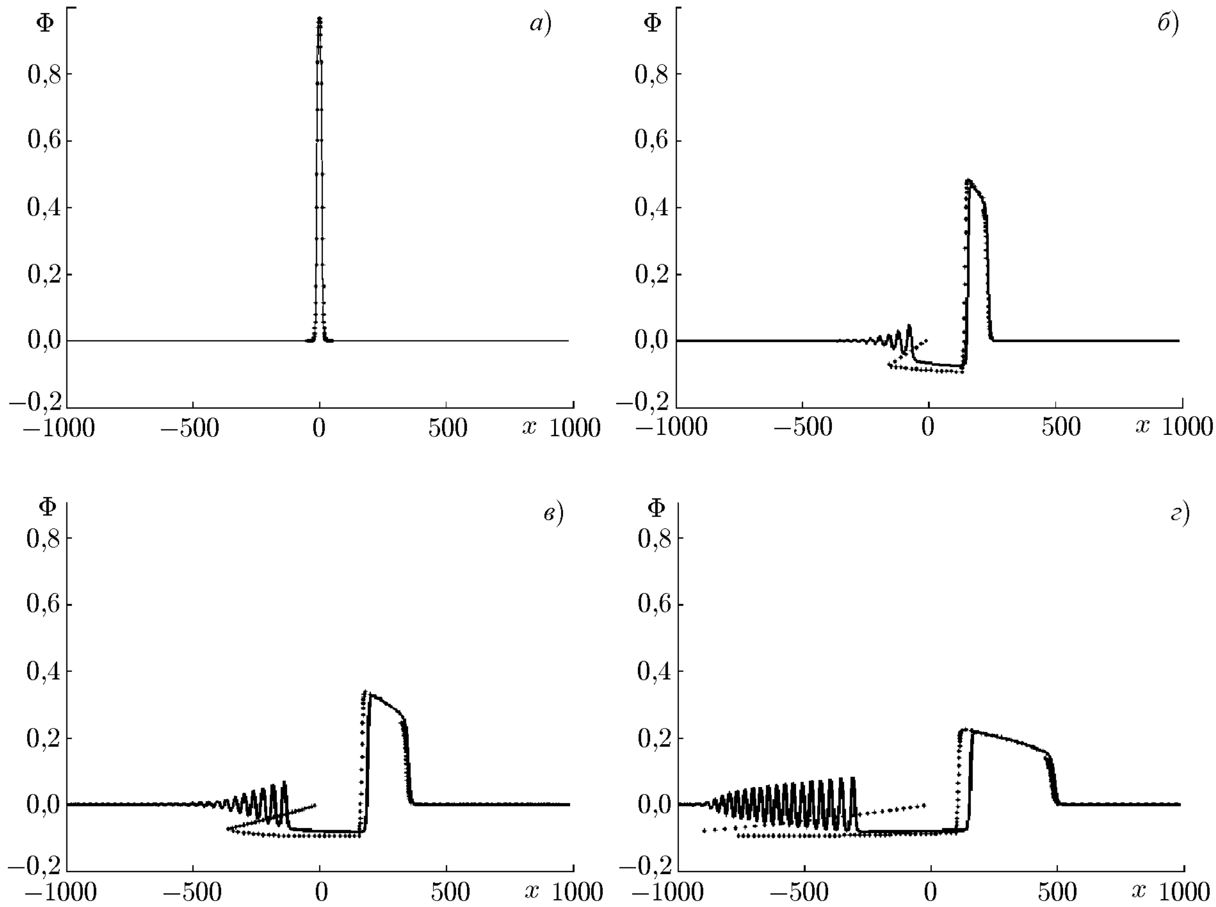

Рис. 6. Формы квазисолитона в разные моменты времени. Сплошные кривые соответствуют численному решению уравнения Гарднера, точки — приближённому асимптотическому подходу. Панель (*а*) — $t = 0$, $\mu = 1$; (*б*) — $t = 2\,160$, $\mu = 2{,}5$; (*в*) — $t = 4\,320$, $\mu = 4$; (*г*) — $t = 8\,640$, $\mu = 7$

за его спадом представлено на рис. 6. В целом можно констатировать как качественное, так и количественное соответствие приближённого описания численному расчёту. При этом отличия в зависимостях координат фронта и пространственных распределений поля на вершине квазисолитона составляют единицы процентов. В то же время отличия координат спада и распределений поля за спадом квазисолитона оказываются существенно бóльшими (порядка 10÷15 %). Дело в том, что начальная ширина солитона ($2\Delta_0 = 20$) не достаточно сильно превосходит характерный масштаб перепадов поля кинка ($2\lambda_{\rm m}^{-1} = 10$). Это приводит на начальном этапе эволюции к несколько меньшему (по абсолютной величине) значению поля $\phi_{\rm c}^{-}$ по сравнению с вычисляемым по формуле (33). В результате скорость спада в численном моделировании оказывается большей по сравнению с получаемой в приближённом описании, что приводит к заметной разнице в координатах спада квазисолитона (рис. 6*в, г*). Указанные отличия проявляются и в величинах $(x_{\rm c})_{\max}$, $(\phi_{\rm c}^-)_{\min}$, которые в численном решении принимают значения $(x_{\rm c})_{\max} \approx 200$, $(\phi_{\rm c}^-)_{\min} \approx$ $\approx -0{,}0819$, а в приближённом описании равны $(x_{\rm c})_{\max} \approx 177$, $(\phi_{\rm c}^-)_{\min} \approx -0{,}0939$. Однако, как видно из рис. 6*в, г*, с течением времени отличия в величинах полей $\phi_{\rm c}^-$ исчезают, и приближённое описание в дальнейшем будет точнее описывать трансформацию поля квазисолитона во всех областях, за исключением, конечно, интервала, заполненного осцилляциями.

Наконец отметим, что приведённое описание основано на сшивке главных членов разложений из внешних и внутренних областей. Учёт следующих приближений уточняет уравнения движения кинков дополнительными слагаемыми порядка $(\phi_\pm)_t$, $\mu_t(t)$ и позволяет получить более гладкое общее решение, сшитое не только по величине полей из внешних и внутренних областей, но и их производных.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Возможности аналитического описания неквазистационарной эволюции солитонов в рамках предложенного подхода, конечно, не ограничиваются рассмотренным примером. Столь же подробно можно исследовать случаи, когда коэффициент $\mu(t)$ в уравнении (1) меняется произвольным степенным (пропорционально $(1+\varepsilon t)^\beta$) или экспоненциальным (пропорционально $\exp(\varepsilon t)$) образом. Интересны в качестве сравнения с квазистационарными случаями задачи о прохождении солитона через локализованную неоднородность или область с перепадом параметров среды. При аппроксимации таких неоднородностей кусочно-линейными зависимостями задача может быть решена аналитически. Кроме того, предложенный в работе подход может быть использован в задачах об определении параметров солитонов, близких к критическим, возникающих из плавных начальных условий. Представляется важным как с общеволновой точки зрения, так и в отношении приложений, обобщение развитого здесь описания на двумерный случай, т. е. вывод уравнений «геометрической оптики» для кинков. И, наконец, укажем, что рассмотрение эволюции более сложных начальных возмущений (отвечающих более чем одному солитону или солитонам, масштабы которых порядка масштабов изменения параметров среды) требует дополнительной проработки.

Авторы выражают благодарность Л. А. Островскому за полезные критические замечания, а также Е. Н. Пелиновскому, Т. Г. Талиповой и А. А. Слюняеву за предоставленные результаты численного расчёта уравнения Гарднера с переменными коэффициентами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карпман В. И., Маслов Е. М. // ЖЭТФ. 1977. Т. 73. С. 532.
2. Keener J. P., McLaughlin D. W. // Phys. Rev. A. 1977. V. 16. P. 777.
3. Grimshaw R. // Proc. Roy. Soc. A. 1979. V. 368. P. 359.
4. Kaup D. J., Newell A. C. // Proc. Roy. Soc. London A. 1978. V. 301, No. 1701. P. 413.
5. Gorshkov K. A., Ostrovsky L. A. // Physica D. 1981. V. 3, No. 1, 2. P. 428.
6. Grimshaw R., Pelinovsky E., Talipova T. // Surv. Geophys. 2007. V. 28. P. 273.
7. Nakoulima O., Zahybo N., Pelynovsky E., et al. // Appl. Math. Comput. 2004. V. 152. P. 449.
8. Ostrovsky L. A., Grue J. // Phys. Fluids. 2003. V. 15. P. 2934.
9. Кившарь Ю. С., Агравал Г. П. Оптические солитоны. М.: Физматлит, 2005. 648 с.

10. Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов: метод обратной задачи. М.: Наука, 1980. 320 с.
11. Горшков К. А., Соустова И. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 2001. Т. 44, № 5–6. С. 502.
12. Gorshkov K. A., Ostrovsky L. A., Soustova I. A., Irisov V. G. // Phys. Rev. E. 2004. V. 69. P. 1.

Поступила в редакцию 28 марта 2012 г.; принята в печать 24 мая 2012 г.

EVOLUTION OF THE COMPOUND GARDNER-EQUATION SOLITON IN THE MEDIA WITH VARIABLE PARAMETERS

K. A. Gorshkov, I. A. Soustova, A. V. Ermoshkin, and N. V. Zaytseva

Non-quasistationary evolution of the nearly limiting Gardner-equation solitons, which is caused by the variable parameters of the medium is considered. The proposed approximate description of such a process is based on representing the Gardner-equation solitons as compound formations formed by different-polarity kinks. The equations describing evolution of both the field differences in the kinks and the slowly varying (compared with the differences) fields connecting the kinks are derived. The problem of the soliton evolution in the case of a linear (in time) change of the cubic nonlinearity coefficient of the Gardner equation is solved analytically. The obtained approximate solution is compared with the results of the previous direct numerical integration of this problem.