

УДК 517.958:537.812

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОТРАЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ДЛЯ СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ВЕЩЕСТВЕННОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТЬЮ БЕЗ ДИСПЕРСИИ

Н. А. Денисова¹, А. В. Резвов²

¹ Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского;

² ОАО «НПП «Полёт», г. Нижний Новгород, Россия

Предложен метод приближённой реконструкции профиля показателя преломления по частотной зависимости коэффициента отражения для случаев, когда имеется разрыв первого рода на границе раздела сред. Метод основан на применении точных аналитических решений обратной задачи для модельных коэффициентов отражения в виде дробно-рациональных функций. Приведены численные результаты использования предложенного метода для обработки графиков действительной и мнимой частей коэффициента отражения в заданном частотном интервале.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. РЕШЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Проблема восстановления показателя преломления диэлектрической слоисто-неоднородной среды по амплитудному коэффициенту отражения относится к задачам реконструкции или к обратным задачам теории рассеяния. Последние хорошо исследованы (см., например, [1, 2]), особенно для различных квантово-механических проблем, рассматриваемых с помощью уравнения Шрёдингера.

В настоящей статье рассматривается одномерная обратная задача отражения электромагнитного излучения для уравнения Гельмгольца на всей бесконечной оси. Для непрерывных профилей показателя преломления такие задачи рассматривались в работах [3–6]. Позднее результаты статьи [5] были обобщены на случай профиля показателя преломления с разрывом первого рода на границе среды [7]. В данной работе схема решения, предложенная в [7], реализована и исследована для модельных коэффициентов отражения в виде дробно-рациональных функций. Ранее этот подход использовался для непрерывных профилей [6] и для плазмopodobной среды с дисперсией [8–10].

Пусть из полупространства $z < 0$, заполненного однородной средой с показателем преломления n_a , на слоисто-неоднородную среду с показателем преломления $n(z)$, $z \geq 0$, падает электромагнитная волна. При нормальном падении электрическое поле удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\frac{d^2 E}{dz^2} + k^2 n_1^2(z) E = 0, \quad n_1(z) = \begin{cases} n_a, & z < 0; \\ n(z), & z \geq 0. \end{cases} \quad (1)$$

На границе раздела сред функция $n_1(z)$ может иметь разрыв первого рода, т. е., вообще говоря, $n(0) \neq n_a$. В области $z \geq 0$ функция $n(z)$ положительна, дважды непрерывно дифференцируема, и кроме того, если $z \rightarrow \infty$, то $n(z) \rightarrow n_v$, $n'(z) \rightarrow 0$. В дальнейшем значение показателя преломления на границе $z = 0$ будем обозначать $n_s = n(0)$. Для любого вещественного k существует единственное решение уравнения (1), имеющее в области $z < 0$ вид

$$E(z, k) = \exp(ikn_a z) + r(k) \exp(-ikn_a z),$$

а при $z \rightarrow \infty$ — асимптотику $E(z, k) \propto t(k) \exp(ikn_v z)$.

Функции $r(k)$ и $t(k)$ являются амплитудными коэффициентами отражения и прохождения. Для дальнейшего важны свойства коэффициента $r(k)$ на вещественной оси k [6, 7]: функция $r(k)$ непрерывна, $r(-k) = \overline{r(k)}$, $|r(k)| < 1$. Коэффициент $r(k)$ аналитически продолжается в комплексную полуплоскость $\text{Im } k > 0$, где справедлива асимптотическая формула

$$r(k) = r_s + O(1/k), \quad |k| \rightarrow \infty, \quad r_s = \frac{n_a - n_s}{n_a + n_s}. \quad (2)$$

Здесь r_s — амплитудный коэффициент отражения электромагнитной волны на границе раздела двух однородных сред с показателями преломления n_a и n_s . Таким образом, главное асимптотическое слагаемое r_s в формуле (2) определяет показатель преломления n_s . Если $k \rightarrow 0$, то

$$r(k) = r_v + O(k), \quad r_v = \frac{n_a - n_v}{n_a + n_v}. \quad (3)$$

Из (3) следует, что значение коэффициента отражения в точке $k = 0$ связано со значением показателя преломления на бесконечности n_v .

Алгоритм реконструкции показателя преломления $n(z)$ по амплитудному коэффициенту отражения $r(k)$, предложенный в [8], основан на решении интегрального уравнения для функции $K(x, y)$, с помощью которой определяется $n(z)$:

$$(1 - r_s^2)K(x, y) - \int_{-y}^x K(x, \xi)R(\xi + y) d\xi - r_s \int_{-x}^y K(x, \xi)R(y - \xi) d\xi - \int_{-y}^x R(\xi + y) d\xi = 0. \quad (4)$$

Здесь $|y| < x$, функция $R(x)$ — фурье-образ разности коэффициентов отражения $r(k)$ и r_s :

$$R(x) = \frac{n_s}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [r(k) - r_s] \exp(-ikn_s x) dk. \quad (5)$$

Решение $K(x, y)$ уравнения (4) задаёт в параметрическом виде искомый показатель преломления $n(z)$ посредством формул

$$n(x) = n_s [1 + K(x, x)]^{-2}, \quad z(x) = \int_0^x [1 + K(x, x)]^2 dx. \quad (6)$$

Поскольку функция $r(k)$ аналитична в верхней полуплоскости комплексной плоскости k , т. е. при $\text{Im } k > 0$, то $R(x) \equiv 0$ при $x < 0$. Предельное значение

$$R(+0) = -\frac{(1 - r_s^2)n'(+0)}{4n_s} \quad (7)$$

позволяет найти $n'(+0)$, т. е. производную функции $n(z)$ в точке $z = 0$.

2. РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В СЛУЧАЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОТРАЖЕНИЯ, ЗАДАВАЕМЫХ В ВИДЕ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Для коэффициентов отражения, задаваемых в виде дробно-рациональных функций, решение интегрального уравнения (4) сводится к решению линейной системы уравнений. В силу свойств

функции $r(k)$, все её полюсы расположены в нижней полуплоскости комплексной плоскости k , т. е. при $\text{Im } k < 0$, в точках, симметричных относительно мнимой оси. В случае l полюсов первого порядка коэффициент $r(k)$ раскладывается на сумму простых дробей:

$$r(k) = r_s + \sum_{j=1}^l \frac{c_j}{k - k_j}, \quad \text{Im } k_j < 0, \quad (8)$$

а образ Фурье (5) имеет вид

$$R(x) = \begin{cases} -in_s \sum_{j=1}^l c_j \exp(-ik_j n_s x), & x > 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (9)$$

Представим решение уравнения (4) с коэффициентом отражения вида (8), аналогично [7], в виде

$$K(x, y) = \sum_{\substack{m=-n \\ m \neq 0}}^l f_m(x) \exp(a_m n_s y) + g. \quad (10)$$

Здесь $f_m(x)$ — неизвестные функции, a_m — неизвестные числа, причём

$$a_{-m} = -a_m. \quad (11)$$

В отличие от формул работы [7], в правой части (10) присутствует дополнительное постоянное слагаемое g . Подставив формулы (9) и (10) в уравнение (4), найдём, что

$$g = \frac{r_v - r_s}{(1 + r_s)(1 - r_v)}. \quad (12)$$

Функции $f_m(x)$ и $f_{-m}(x)$ связаны соотношением

$$f_{-m}(x) = f_m(x) \frac{1 - r_s r(i a_m)}{r(i a_m) - r_s}. \quad (13)$$

Функции $f_m(x)$ с положительными индексами m удовлетворяют линейной неоднородной системе уравнений

$$\sum_{m=1}^l f_m(x) \frac{1}{r(i a_m) - r_s} \left[\frac{\exp(-a_m n_s x)}{a_m + i k_j} - r(i a_m) \frac{\exp(a_m n_s x)}{a_m - i k_j} \right] = \frac{i}{(1 + r_s)(1 - r_v) k_j}, \quad (14)$$

где $j = 1, \dots, l$.

Числа a_m являются корнями уравнения

$$r(i a_m) r(-i a_m) = 1. \quad (15)$$

Для коэффициента отражения (8) уравнение (15) сводится к алгебраическому уравнению степени $2l$ и имеет $2l$ корней. Вещественные корни этого уравнения расположены симметрично относительно начала координат. Если a_m — комплексный корень уравнения (15), то $-a_m$, $\bar{a}_m$, $-\bar{a}_m$ также являются его корнями. Учитывая формулы (11)–(13), приведём функцию (10) к виду

$$K(x, y) = \sum_{m=1}^l f_m(x) \left[\exp(a_m n_s y) + \frac{1 - r_s r(i a_m)}{r(i a_m) - r_s} \exp(-a_m n_s y) \right] + \frac{r_v - r_s}{(1 + r_s)(1 - r_v)}. \quad (16)$$

Здесь a_m — корни уравнения (15), расположенные в правой полуплоскости комплексной плоскости k , а $f_m(x)$ — решения системы уравнений (14).

3. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим простые частные случаи, когда коэффициент отражения (8) имеет либо один полюс, либо два полюса. Расположение полюсов в нижней полуплоскости комплексной плоскости k , т. е. при $\text{Im } k < 0$, и параметры функции $r(k)$ должны быть выбраны так, чтобы воспроизводились свойства коэффициента отражения.

Коэффициент отражения с одним полюсом имеет вид

$$r(k) = r_s + \frac{i\gamma(r_v - r_s)}{k + i\gamma}, \quad \gamma > 0, \quad (17)$$

$$|r(k)|^2 = \frac{r_s^2 k^2 + \gamma^2 r_v^2}{k^2 + \gamma^2}. \quad (18)$$

По значениям коэффициентов r_s и r_v , в соответствии с формулами (2) и (3), однозначно определяются параметры $n_s = n(+0)$ и $n_v = n(\infty)$.

Чтобы найти профиль $n(z)$, следует сначала решить уравнение (15) для функции (17). В результате находим один вещественный корень в правой полуплоскости комплексной плоскости k , т. е. при $\text{Re } k > 0$:

$$a_1 = \gamma \sqrt{(1 - r_v^2)/(1 - r_s^2)}. \quad (19)$$

Система (14) сводится к одному уравнению. Введём обозначение

$$\frac{1 - r_s r(ia_1)}{r(ia_1) - r_s} = \exp(2\beta_1). \quad (20)$$

Если $r_s < r_v$, что соответствует областям 1 и 2 (рис. 1а), то $\beta_1 > 0$, причём $\text{th } \beta_1 = \sqrt{n_v/n_s}$, а $K(x, x) = \text{cth } \beta_1 \text{th}(a_1 n_s x + \beta_1) - 1$. Тогда, согласно (6),

$$n(x) = n_v \text{cth}^2(a_1 n_s x + \beta_1), \quad z(x) = \frac{n_s}{n_v} \left[x - \frac{\text{th}(a_1 n_s x + \beta_1)}{a_1 n_s} + \frac{\text{th}(\beta_1)}{a_1 n_s} \right]. \quad (21)$$

При $r_s > r_v$ величина β_1 комплексна: $\beta_1 = \beta + i\pi$, $\text{cth } \beta = \sqrt{n_v/n_s}$, и формулы (21) принимают вид

$$n(x) = n_v \text{th}^2(a_1 n_s x + \beta), \quad z(x) = \frac{n_s}{n_v} \left[x - \frac{\text{cth}(a_1 n_s x + \beta)}{a_1 n_s} + \frac{\text{cth}(\beta)}{a_1 n_s} \right]. \quad (22)$$

Частный случай формул (21) и (22) для непрерывных профилей показателя преломления, т. е. в случае $n_s = n_a$, приведён в работе [9].

График коэффициента отражения по мощности, $R(k) = |r(k)|^2$, с ростом k при $k > 0$ либо монотонно возрастает, либо монотонно убывает в зависимости от знака разности $r_s^2 - r_v^2$:

$$r_s^2 - r_v^2 = \frac{4n_a(n_v - n_s)(n_a^2 - n_v n_s)}{(n_a + n_s)^2(n_a + n_v)^2}. \quad (23)$$

В соответствии с формулой (23), первый квадрант плоскости n_s/n_a , n_v/n_a разбивается гиперболой $n_a n_v = n_a^2$ и прямой $n_s = n_v$ на четыре области. В зависимости от того, в какой из этих областей находится точка с координатами $(n_s/n_a, n_v/n_a)$, функция $R(k)$ убывает или возрастает и, соответственно, монотонно возрастает или убывает профиль показателя преломления (21). Когда $n_s = n_v$ или $n_s n_v = n_a^2$, коэффициент отражения по мощности вообще не зависит от волнового числа k и равен r_s^2 .

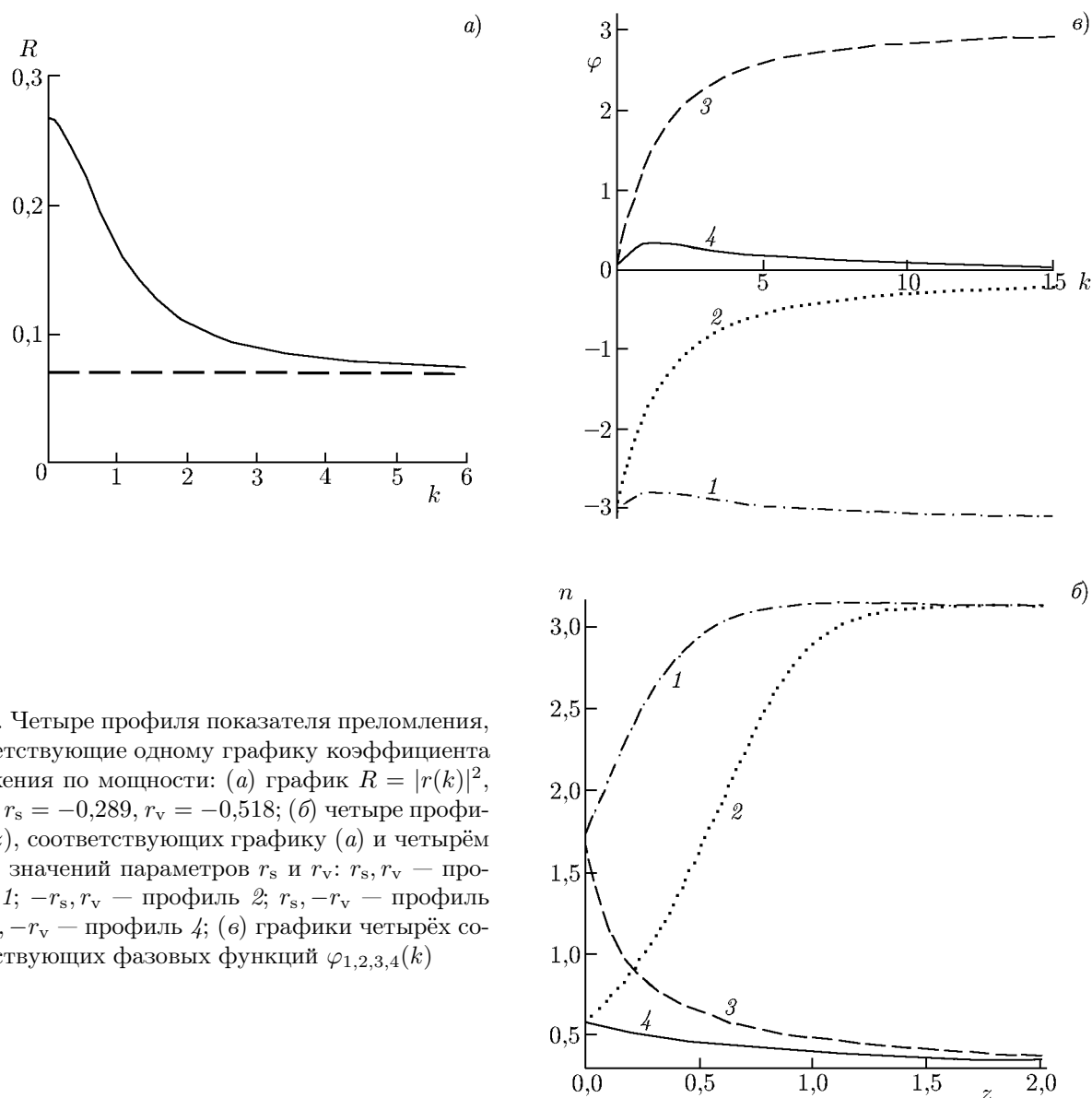


Рис. 1. Четыре профиля показателя преломления, соответствующие одному графику коэффициента отражения по мощности: (а) график $R = |r(k)|^2$, $\gamma = 1$, $r_s = -0,289$, $r_v = -0,518$; (б) четыре профиля $n(z)$, соответствующих графику (а) и четырём парам значений параметров r_s и r_v : r_s, r_v — профиль 1; $-r_s, r_v$ — профиль 2; $r_s, -r_v$ — профиль 3; $-r_s, -r_v$ — профиль 4; (в) графики четырёх соответствующих фазовых функций $\varphi_{1,2,3,4}(k)$

3.1. О неоднозначности реконструкции неоднородного профиля показателя преломления $n(z)$ по коэффициенту отражения по мощности

По комплексному амплитудному коэффициенту отражения (17) показатель преломления определяется единственным образом. Однако во многих практических ситуациях измеряется коэффициент отражения по мощности, т. е. $|r(k)|^2$, по которому $n(z)$ находится неоднозначно. Коэффициент отражения по мощности (18) зависит от квадратов параметров r_s и r_v . Из-за этого для каждой пары значений r_s и r_v существуют ещё три пары $-r_s, r_v$; $r_s, -r_v$ и $-r_s, -r_v$, которые приводят к тому же коэффициенту отражения по мощности, но к разным амплитудным коэффициентам (17) и, следовательно, к разным функциям $n(z)$. Например, постоянный коэффициент отражения по мощности $R(k) \equiv r_s^2 \equiv r_v^2$ имеют два однородных полупространства с показателями преломления $n(z) \equiv n_s$ и $n(z) \equiv n_a^2/n_s$ и два неоднородных полупространства с показателями

преломления (21) и (22), в которых n_s и n_v выбраны в виде пар $n_s, n_a^2/n_s$ и $n_a^2/n_s, n_s$. При этом для однородных полупространств как модуль, так и фаза коэффициента отражения не зависят от волнового числа k . Для неоднородных полупространств при постоянстве модуля коэффициента отражения его фаза меняется с изменением k (рис. 2а, в).

В общем случае непостоянному коэффициенту отражения по мощности (18), зависящему от k , соответствуют четыре различных профиля показателя преломления. На рис. 1б, в изображены графики фаз амплитудных коэффициентов отражения (17) и профили показателей преломления, отвечающие одному и тому же коэффициенту отражения по мощности, показанному на рис. 1а.

Рассмотрим теперь случай, когда коэффициент отражения имеет два полюса, расположенные на единичной полуокружности в нижней полуплоскости комплексной плоскости k симметрично относительно мнимой оси:

$$\tilde{r}(k) = r_s + \frac{iak - (r_v - r_s)}{k^2 + 2ibk - 1}. \quad (24)$$

Функция (24) воспроизводит все свойства коэффициента отражения при

$$-2r_sb - 2\sqrt{b^2 - b_1^2} \leq \alpha \leq -2r_sb + 2\sqrt{b^2 - b_1^2}, \quad b_1 \leq b < 1, \quad (25)$$

где

$$b_1 = \sqrt{\frac{1 - r_sr_v - \sqrt{(1 - r_v^2)(1 - r_s^2)}}{2}}. \quad (26)$$

Для коэффициента отражения (24) образ Фурье (5) при нулевом значении аргумента есть $\tilde{R}(+0) = n_s\alpha$. Поэтому, согласно (7), параметр α определяет значение производной $\tilde{n}'(+0)$.

Решение обратной задачи для коэффициентов отражения с двумя полюсами приводит к следующему результату:

$$\tilde{n}(x) = n_v \frac{P^2(x)}{Q^2(x)}, \quad \tilde{z}(x) = \frac{n_s}{n_v} \left\{ x - \frac{(a_1^2 - a_2^2)}{a_1 a_2 n_s} \left[\frac{Q_1(x)}{P(x)} - \frac{Q_1(0)}{P(0)} \right] \right\}, \quad (27)$$

где

$$P(x) = (r_v - r_s)^2 V + \alpha^2 a_1 a_2 U - \alpha (r_v - r_s) (a_1^2 - a_2^2) \operatorname{th}(a_1 n_s x + \beta_1) \operatorname{th}(a_2 n_s x + \beta_2),$$

$$Q(x) = (r_v - r_s)^2 U + \alpha^2 a_1 a_2 V - \alpha (r_v - r_s) (a_1^2 - a_2^2),$$

$$Q_1(x) = (r_v - r_s)^2 + \alpha^2 a_1 a_2 \operatorname{th}(a_1 n_s x + \beta_1) \operatorname{th}(a_2 n_s x + \beta_2) - \alpha (r_v - r_s) W,$$

$$U = a_1 \operatorname{th}(a_1 n_s x + \beta_1) - a_2 \operatorname{th}(a_2 n_s x + \beta_2), \quad V = a_1 \operatorname{th}(a_2 n_s x + \beta_2) - a_2 \operatorname{th}(a_1 n_s x + \beta_1),$$

$$W = a_1 \operatorname{th}(a_1 n_s x + \beta_1) + a_2 \operatorname{th}(a_2 n_s x + \beta_2), \quad \beta_m = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{1 - r_s \tilde{r}(ia_m)}{r_s - \tilde{r}(ia_m)} \right], \quad m = 1, 2.$$

Числа a_1, a_2 находятся из уравнения (15), которое в случае двух полюсов является биквадратным и имеет два корня в правой полуплоскости комплексной плоскости k , т. е. при $\operatorname{Re} k > 0$. Эти корни для функции (24) даются формулами

$$a_{1,2} = \frac{1}{2\sqrt{1 - r_s^2}} \left[\sqrt{4(b^2 - b_1^2) - (2br_s + \alpha)^2} \pm \sqrt{4(b^2 - b_2^2) - (2br_s + \alpha)^2} \right],$$

$$b_2 = \sqrt{\frac{1 - r_sr_v + \sqrt{(1 - r_v^2)(1 - r_s^2)}}{2}}.$$

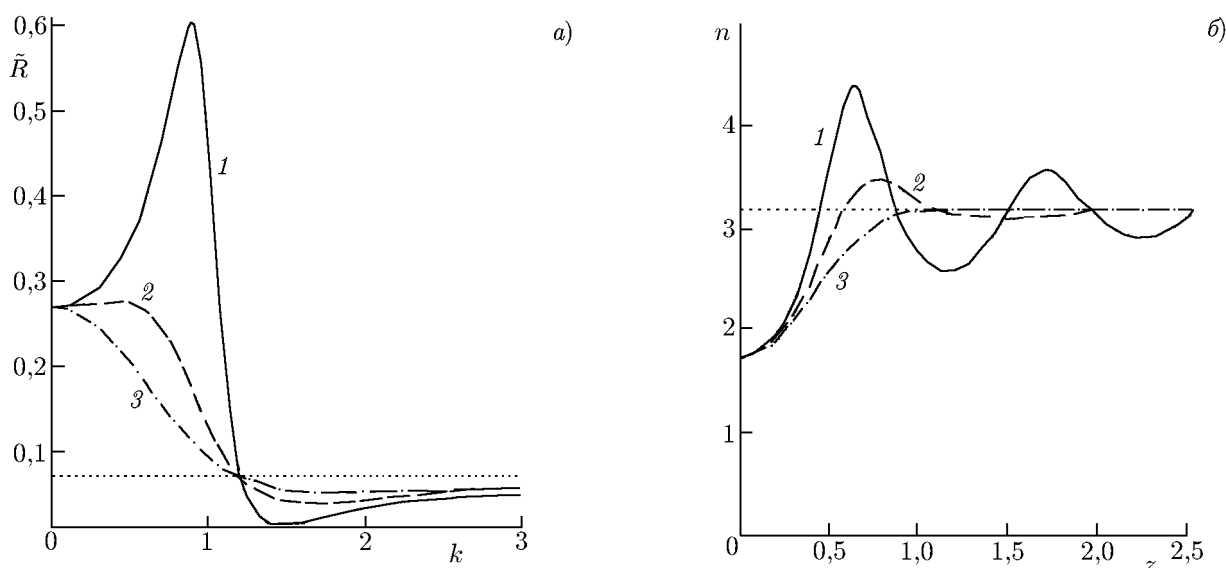


Рис. 2. Зависимости коэффициентов отражения по мощности $\tilde{R} = |\tilde{r}(k)|^2$ (а) и соответствующие им профили $n(z)$ (б) при $r_s = -0,289$, $r_v = -0,518$, $\alpha = 0$ и различных b : кривая 1 соответствует $b = 0,2$, 2 — $b = 0,5$, 3 — $b = 0,8$

На рис. 2а приведены графики коэффициентов отражения, а рис. 2б — графики соответствующих коэффициентов преломления для трёх наборов параметров функции (24).

Графики коэффициентов отражения и соответствующих коэффициентов преломления, приведённые на рис. 2, показывают, что функции (27) позволяют аппроксимировать коэффициенты отражения от самых различных неоднородных профилей $n(z)$. Ещё большие возможности для качественной реконструкции профилей показателя преломления предоставляет использование линейных комбинаций двухполюсных функций типа (27) (см. рис. 4).

Коэффициент отражения, модуль полюсов которого отличен от единицы и равен γ , связан с функцией (24) формулой

$$r(k) = \tilde{r}(k/\gamma). \quad (28)$$

Соответствующий показатель преломления определяется с помощью функций (27):

$$n(x) = \tilde{n}(\gamma x), \quad z(x) = \tilde{z}(\gamma x)/\gamma. \quad (29)$$

Из формул (28) и (29) следует, что максимальные и минимальные значения как коэффициента отражения по мощности, так и показателя преломления не зависят от параметра γ , при изменении которого меняется положение экстремумов указанных величин на осях переменных k и z .

4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ РЕКОНСТРУКЦИИ НЕОДНОРОДНОГО ПРОФИЛЯ $\varepsilon(z)$

Если найдено хорошее приближение измеренного коэффициента отражения дробно-рациональной функцией, удовлетворяющей свойствам коэффициента отражения, то, решив уравнение (15) и систему уравнений (14), с помощью формул (6) и (16) получим аппроксимацию профиля показателя преломления. Реализация метода возможна и в том случае, когда коэффициент отражения известен только в некотором диапазоне частот. Однако при этом значения показателя

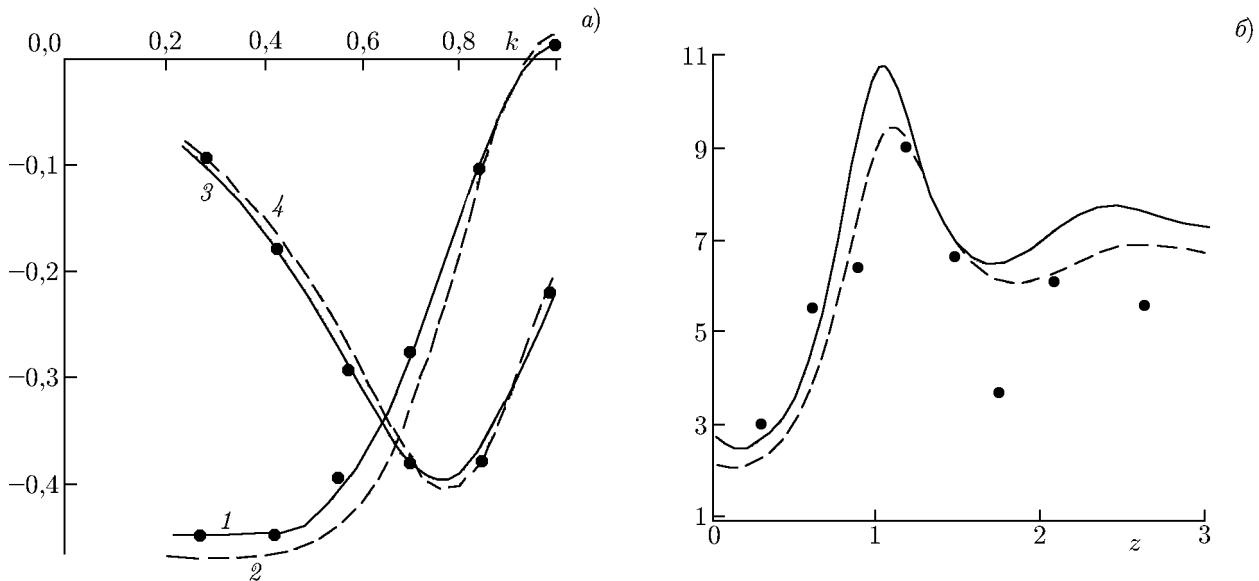


Рис. 3. Результаты реконструкции неоднородного профиля $\varepsilon(z)$ с помощью модельного точного решения обратной задачи: аппроксимирующие графики действительной (кривые 1 и 2) и мнимой (3 и 4) частей коэффициентов отражения (а) и реконструкция профиля диэлектрической проницаемости (б). На обеих панелях сплошная линия отвечает $r_s = -0,193$, $r_v = -0,444$, $\alpha = 0,094$, $b = 0,361$, $\gamma = 0,871$, пунктирная линия — $r_s = -0,257$, $r_v = -0,464$, $\alpha = 0,132$, $b = 0,309$, $\gamma = 0,896$

преломления будут близки к искомым не при всех z , а только в некотором интервале, длина которого зависит от ширины частотной области, в которой известен спектр отражения.

Модельные точные решения (27) и (29) могут использоваться двояко: либо при разработке и отладке численных методов восстановления профиля $n(z)$, либо в качестве первого приближения при решении задачи реконструкции.

Приведём пример использования модельных точных решений (27) и (29) для аппроксимации функции $n(z)$. Воспользуемся коэффициентом отражения $r(\nu)$, рассчитанным для диэлектрической проницаемости реального образца грунта в диапазоне частот $\Delta\nu = 0,4 \div 2$ ГГц [11], и сравним результаты, полученные предлагаемым здесь методом, с [11]. На рис. 3б, 4б точками изображено распределение диэлектрической проницаемости реального грунта, полученное экспериментально в работе [11], а на рис. 3а и рис. 4а (также точками) — рассчитанные там же действительная и мнимая части соответствующего коэффициента отражения. На тех же рис. 3а и 4а сплошной и пунктирной линиями построены графики дробно-рациональных функций, аппроксимирующих действительную и мнимую части коэффициента отражения [11].

Используемая на графиках безразмерная переменная $k = \tilde{k}/k_0$ соответствует волновому числу $k = 2\pi\nu/c$, нормированному на $k_0 = 2\pi\nu_0/c$, где $\nu_0 = 1,4$ ГГц — частота, отвечающая максимуму функции $\text{Re}[r(k)]$. Безразмерная переменная $z = \tilde{z}k_0 = \tilde{z}/\lambda_0$ соответствует размерной глубине $\tilde{z}$, нормированной на длину волны $\lambda_0 = 1/k_0 = 3,41$ см, где c — скорость света в вакууме. Исследованный в [11] диапазон частот $\Delta\nu = 0,4 \div 2$ ГГц соответствует интервалу $0,29 < k < 1,43$. Аппроксимировать коэффициент отражения, приведённый в работе [9], функцией, даваемой формулами (24) и (28), во всём интервале $0,29 < k < 1,43$ невозможно, т. к. действительная и мнимая части этой функции не имеют необходимого количества экстремумов. Однако на укороченном интервале $0,29 < k < 0,99$ подходящие приближения для действительной и мнимой частей коэффициентов отражения [11] найти удаётся. Параметры r_s , r_v , α , b , γ в (24) и (28) численно подбирались так, чтобы сумма квадратов отклонений $\text{Re } r(k_l)$ и $\text{Im } r(k_l)$ от соответствующих зна-

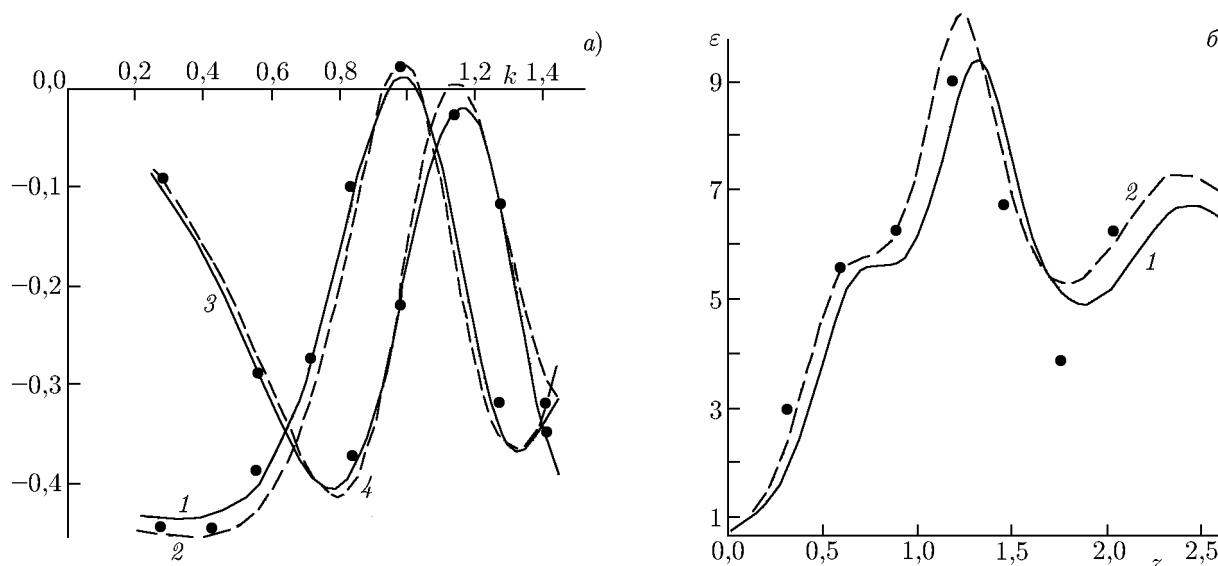


Рис. 4. Результаты уточнённой реконструкции неоднородного профиля $\varepsilon(z)$ с помощью модельного численного решения обратной задачи при двух наборах параметров. На панели *a* показаны аппроксимирующие функции $\text{Re } r(k)$ и $\text{Im } r(k)$, на панели *б* — реконструкция профиля $\varepsilon(z)$. На обеих панелях сплошная линия соответствует $r_s = 0,08$, $r_v = -0,427$, $\alpha_1 = -31,322$, $b_1 = 0,223$, $\gamma_1 = 1,319$, $\alpha_2 = 0,148$, $b_2 = 0,41$, $\gamma_2 = 0,958$, $q = 0,011$, а пунктирная линия — $r_s = 0,091$, $r_v = -0,442$, $\alpha_1 = -5,868$, $b_1 = 0,354$, $\gamma_1 = 1,17$, $\alpha_2 = 6,577$, $b_2 = 0,348$, $\gamma_2 = 1,101$, $q = 0,546$

чений, взятых из графика работы [11], в точках $k_l = 0,29 + 0,14l$, $l = 0, \dots, 5$, была минимальной. Для найденных по данному критерию параметров на основе формул (27) и (29) был построен аппроксимирующий график диэлектрической проницаемости $\varepsilon(z) = n^2(z)$ (рис. 3б).

Из рис. 3а видно, что в интервале $0,29 < k < 0,99$ комплексный коэффициент отражения достаточно точно аппроксимируется функцией вида (24), а соответствующая реконструкция $\varepsilon(z)$ (рис. 3б), достаточно близко примыкает к точкам, соответствующим экспериментальному распределению диэлектрической проницаемости при $0,7 < z < 1,5$. При $z < 0,7$ и $z > 1,5$ для восстановления диэлектрической проницаемости играют существенную роль значения коэффициента отражения при $k < 0,29$ и $k > 0,99$.

5. УТОЧНЁННАЯ РЕКОНСТРУКЦИЯ ПРОФИЛЯ $\varepsilon(z)$

Для решения задачи восстановления профиля $\varepsilon(z)$ на расширенном интервале $0,29 < k < 1,43$ использовалась аппроксимация коэффициентов отражения, рассматривавшихся в работе [11], с помощью линейной комбинации дробно-рациональных функций с двумя полюсами:

$$r(k) = r_s + q \frac{i\alpha_1 k \gamma_1 - (r_v - r_s) \gamma_1^2}{k^2 + 2ib_1 k \gamma_1 - \gamma_1^2} + (1 - q) \frac{i\alpha_2 k \gamma_2 - (r_v - r_s) \gamma_2^2}{k^2 + 2ib_2 k \gamma_2 - \gamma_2^2}. \quad (30)$$

Функция (30) содержит девять параметров, которые подбирались с помощью метода наименьших квадратов с увеличенным числом расчётных точек k_l , $l = 0, \dots, 8$.

Уравнение (15) с коэффициентом отражения (30) имеет четыре корня в правой полуплоскости комплексной плоскости k , т. е. при $\text{Re } k > 0$. Решив линейную систему четырёх уравнений (14) и определив функцию (16), находим показатель преломления по формулам (9). Для найденных наборов параметров графики действительной и мнимой частей коэффициентов отражения и соответствующих профилей диэлектрической проницаемости представлены на рис. 4а и б.

Как видно из рис. 4а, графики действительной и мнимой частей коэффициентов отражения, построенные по формуле (30) с указанными выше параметрами, и функций, приведённых в статье [11], близки на всём заданном интервале k . В то же время рис. 4б показывает, что графики соответствующих диэлектрических проницаемостей существенно отличаются при $z > 1,5$. Увеличение правой границы интервала задания коэффициента отражения до 1,43 привело к существенному уточнению диэлектрической проницаемости в интервале $0,5 < z < 1$, но лишь к незначительному улучшению результата при $z > 1,5$. Таким образом, по коэффициенту отражения, известному на интервале $0,29 < k < 1,43$, получить профиль диэлектрической проницаемости, согласующийся с приведённым в [11] при всех z , невозможно. Для однозначного восстановления диэлектрической проницаемости при $z > 1,5$ и $z < 0,5$ необходимо знание коэффициента отражения при $k < 0,29$ и $k > 1,43$, что соответствует частотам меньшим 0,4 ГГц и большим 2,4 ГГц.

ВЫВОДЫ

Изложенные результаты реконструкции профиля диэлектрической проницаемости $\varepsilon(z)$ по амплитудному коэффициенту отражения показывают, что использование модельных коэффициентов отражения в виде дробно-рациональных функций и точных решений обратной задачи для отражения электромагнитного излучения типа (27) и их линейных комбинаций позволяет с хорошей точностью восстановить слоисто-неоднородное распределение диэлектрической проницаемости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агранович З. С., Марченко В. А. Обратная задача рассеяния. Харьков: ХГУ, 1960.
2. Фаддеев Л. Д. // Труды математического ин-та АН СССР. 1964. Т. 73. С. 314.
3. Ware J. A., Aki K. // J. Acoust. Soc. Am. 1969. V. 45. P. 911.
4. Coen S. // IEEE Trans. Antennas Propagat. 1981. V. 29. P. 726.
5. Balanis G. N. // J. Math. Phys. 1982. V. 23. P. 2562.
6. Jaggard D. L., Frangos P. V. // IEEE Trans. Antennas Propagat. 1987. V. 35. P. 934.
7. Денисова Н. А., Степанова С. А. // Журн. выч. мат. и матем. физ. 1999. Т. 39, № 7. С. 1180.
8. Kay I. // Comm. Pure Appl. Math. 1960. V. 13. P. 371.
9. Pechinick K. R., Cohen J. M. // Phys. Lett. A. 1981. V. 82. P. 156.
10. Денисова Н. А., Корнеева Т. А., Резвов А. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 2007. Т. 50, № 1. С. 31.
11. Авдоченко Б. И., Задорин А. С., Замотринский В. А. и др. // Докл. Томского университета систем управления и радиоэлектроники. 2007. № 1. С. 5.

Поступила в редакцию 28 мая 2012 г.; принята в печать 26 июня 2012 г.

INVERSE PROBLEM OF ELECTROMAGNETIC-WAVE REFLECTION FOR DISPERSION-FREE LAYERED HALF-SPACE WITH A REAL PERMITTIVITY

N. A. Denisova and A. V. Rezvov

We propose a method for approximate reconstruction of the profile of the refraction ratio from the frequency dependence of the reflection coefficient for the cases, where a discontinuity of the first

kind exists at the media interface. The method is based on using of accurate analytical solutions of the inverse problem for the model reflection coefficients represented as fractional rational functions. Numerical results of using the proposed method to process the plots of the real and imaginary parts of the reflection coefficient in the specified frequency range are presented.