

УДК 537.86

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КОРОТКИХ ОДНОКОМПОНЕНТНЫХ ВЕКТОРНЫХ СОЛИТОНОВ

Н. В. Асеева, Е. М. Громов, В. В. Тютин

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики,
г. Нижний Новгород, Россия

Исследовано взаимодействие однокомпонентных векторных солитонов огибающей функции различной поляризации в анизотропных средах в рамках системы двух связанных нелинейных уравнений Шрёдингера третьего порядка, учитывающих линейную дисперсию третьего порядка, нелинейную дисперсию, перекрёстную нелинейную фазовую модуляцию и перекрёстную нелинейную дисперсию. Найдены режимы взаимного отражения, прохождения и асимптотического сближения солитонов. Показано, что характер взаимодействия таких солитонов определяется начальным соотношением как их амплитуд, так и фаз. Обсуждаются стационарные взаимные положения взаимодействующих солитонов и их связанные, так называемые бризерные, состояния. Исследована роль кубичной нелинейности, перекрёстной кубичной нелинейности и перекрёстной нелинейной дисперсии при взаимодействии солитонов.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время значительный интерес вызывают исследования стационарных нелинейных волновых пакетов — солитонов. Он связан с тем, что последние могут распространяться на значительные расстояния без искажения своей формы и потерь энергии и использоваться, в частности, в качестве носителей информации, например в нелинейных волоконных оптических линиях связи. Солитонные решения существуют для многих нелинейных дифференциальных уравнений, возникающих в различных разделах физики при исследовании распространения интенсивных волновых полей в нелинейных средах с дисперсией: оптические импульсы в волоконной оптике, электромагнитные волны в плазме, поверхностные волны на глубокой воде [1–4] и др.

1. КЛАССИФИКАЦИЯ СОЛИТОНОВ

1.1. Скалярные солитоны

Динамика высокочастотных волновых пакетов $U(\xi, t) = \exp(i\omega t - ik\xi)$ с короткой огибающей описывается в третьем порядке теории нелинейной дисперсии по амплитуде волн, учитывающем члены как второго, так и третьего порядка малости, т. е. линейную дисперсию третьего порядка и нелинейную дисперсию [5]. Здесь под малой подразумевается величина $\Delta \sim 1/L \sim \partial/\partial\xi \sim U$, где L — протяжённость волнового пакета. Соответственно, величины $1/L^2 \sim \partial^2/\partial\xi^2 \sim U^2 \sim \Delta^2$ имеют второй порядок малости, а $U^2/L \sim U^2\partial/\partial\xi \sim 1/L^3 \sim \partial^3/\partial\xi^3 \sim \Delta^3$ — третий. В этом случае основным модельным уравнением для описания распространения волн в изотропных средах является нелинейное уравнение Шрёдингера третьего порядка [6–13]:

$$2i \frac{\partial U}{\partial t} + 2i\beta \frac{\partial(|U|^2 U)}{\partial \xi} + q \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2\alpha |U|^2 U + i\gamma \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} = 0, \quad (1)$$

где $q = -\partial^2\omega/\partial k^2$ и $\gamma = -\partial^3\omega/(3\partial k^3)$ — параметры, описывающие линейную дисперсию второго и третьего порядков, $\alpha = \partial\omega/\partial(|U|^2)$ — параметр кубичной нелинейности, $\omega = \omega(k, |U|^2)$ — нелинейное дисперсионное соотношение, β — коэффициент нелинейной дисперсии.

Н. В. Асеева, Е. М. Громов, В. В. Тютин

203

При $\gamma = \beta = 0$ уравнение (1) сводится к классическому нелинейному уравнению Шрёдингера [14, 15], которое имеет решение в виде солитона [14], существующее в результате баланса дисперсионного расплывания и нелинейного сжатия волнового пакета при условии $\alpha q > 0$. Динамика и взаимодействие таких солитонов были подробно исследованы, например, в [14, 16–18].

При наличии всех членов уравнение (1) имеет решение в виде короткого скалярного солитона огибающей функции. Такое решение существует в результате баланса линейной дисперсии третьего порядка и нелинейной дисперсии. Как было показано в [12], такие короткие скалярные солитоны являются устойчивыми при $\gamma\beta > 0$. Их протяжённость определяется отношением β/γ , и поэтому короткие солитоны, отличные от солитонов классического уравнения Шрёдингера, существуют даже при малых величинах γ и β . Взаимодействие таких солитонов детально описано в [10–12].

Как было показано в натуральных экспериментах для волн на глубокой воде [19, 20], при распространении нестационарного волнового пакета с малой протяжённостью в 2–5 длин волн на дистанциях более 5 ширин волнового пакета проявляются эффекты, хорошо описываемые уравнением (1), но не объясняемые классическим нелинейным уравнением Шрёдингера, например нелинейная абберация волнового пакета. Аналогичные результаты, подтверждающие корректность использования уравнения (1) для описания коротких волновых пакетов, были получены и для электромагнитных волн, например, в работах в [21, 22].

1.2. Векторные солитоны

Распространение векторного волнового поля $\mathbf{E} = \mathbf{e}_1 U(\xi, t) \exp(i\omega t - ik_u \xi) + \mathbf{e}_2 W(\xi, t) \exp(i\omega t - ik_w \xi)$ с короткими огибающими функциями U и W взаимно ортогональных компонент поляризации в анизотропной нелинейной среде с дисперсией корректно описывается в третьем (абберационном) приближении теории дисперсии нелинейных волн в анизотропных средах [2]. Здесь $\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2$ — взаимно ортогональные векторы единичной длины, определяющие направление компонент волнового поля U и W различной поляризации. Это приближение учитывает перекрёстные нелинейные члены третьего порядка [23–25]. В этом приближении при малом различии между волновыми числами поляризационных компонент ($|k_u - k_w| \ll k_u$) медленно меняющиеся огибающие функции U и W описываются модельной системой двух связанных нелинейных уравнений Шрёдингера третьего порядка [3]:

$$2i \left[\frac{\partial U}{\partial t} + \beta \frac{\partial(|U|^2 U + \sigma_\beta |W|^2 U)}{\partial \xi} + \frac{\beta \sigma_\beta}{2} \frac{\partial(W^2 U^*)}{\partial \xi} \right] + q \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2\alpha (|U|^2 + \sigma_\alpha |W|^2) U + \alpha \sigma_\alpha W^2 U^* + i\gamma \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} = 0, \quad (2)$$

$$2i \left[\frac{\partial W}{\partial t} + \beta \frac{\partial(|W|^2 W + \sigma_\beta |U|^2 W)}{\partial \xi} + \frac{\beta \sigma_\beta}{2} \frac{\partial(U^2 W^*)}{\partial \xi} \right] + q \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + 2\alpha (|W|^2 + \sigma_\alpha |U|^2) W + \alpha \sigma_\alpha U^2 W^* + i\gamma \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3} = 0, \quad (3)$$

где U^* , W^* — комплексно-сопряжённые к U и W величины, σ_α — параметр перекрёстной нелинейной фазовой модуляции, σ_β — параметр перекрёстной нелинейной дисперсии. При $\gamma = \beta = 0$ эта система сводится к двум связанным классическим нелинейным уравнениям Шрёдингера, которые имеют решение в виде протяжённых векторных солитонов [1, 16, 26–28].

Найдём скорость изменения энергии компонент U и W . Умножим (1) на U^* и прибавим к полученному таким образом уравнению его комплексно-сопряжённое выражение. Затем проинтегрируем полученное равенство по ξ от $-\infty$ до $+\infty$ с учётом нулевых условий на бесконечности: $(U, W)_{\xi \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0$. В результате для скорости изменения энергии компоненты U получим следующее выражение:

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} |U|^2 d\xi = -\frac{\beta\sigma_\beta}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[4|U|^2 \frac{\partial|W|^2}{\partial\xi} + (U^*)^2 \frac{\partial(W^2)}{\partial\xi} + U^2 \frac{\partial(W^*)^2}{\partial\xi} \right] d\xi + \frac{i}{2} \alpha\sigma_\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} [(WU^*)^2 - (W^*U)^2] d\xi. \quad (4)$$

Аналогично из уравнения (3) для W получим, что

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} |W|^2 d\xi = -\frac{\beta\sigma_\beta}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[4|W|^2 \frac{\partial|U|^2}{\partial\xi} + (W^*)^2 \frac{\partial(U^2)}{\partial\xi} + W^2 \frac{\partial(U^*)^2}{\partial\xi} \right] d\xi + \frac{i}{2} \alpha\sigma_\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} [(UW^*)^2 - (U^*W)^2] d\xi. \quad (5)$$

Из формул (4), (5) следует, что волновые поля с разной поляризацией взаимодействуют друг с другом. Складывая равенства (4) и (5), найдём закон сохранения суммарной энергии векторного волнового пакета:

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} (|U|^2 + |W|^2) d\xi = 0. \quad (6)$$

С другой стороны, вычитая равенство (4) из (5) и учитывая, что $U = |U| \exp(i\varphi_u)$ и $W = |W| \exp(i\varphi_w)$, получим для скорости изменения разности энергий компонент следующее выражение:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} (|U|^2 - |W|^2) d\xi = & 2\beta\sigma_\beta \int_{-\infty}^{+\infty} |U|^2 \frac{\partial|W|^2}{\partial\xi} d\xi - \beta\sigma_\beta \int_{-\infty}^{+\infty} |U|^2 \frac{\partial|W|^2}{\partial\xi} \cos[2(\varphi_w - \varphi_u)] d\xi + \\ & + \beta\sigma_\beta \int_{-\infty}^{+\infty} |U|^2 |W|^2 \left(\frac{\partial\varphi_w}{\partial\xi} - \frac{\partial\varphi_u}{\partial\xi} \right) \sin[2(\varphi_w - \varphi_u)] d\xi - 2\alpha\sigma_\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} |U|^2 |W|^2 \sin[2(\varphi_w - \varphi_u)] d\xi. \quad (7) \end{aligned}$$

Первые три члена в правой части (7) соответствуют эффектам перекрёстной нелинейной дисперсии, а последний член — эффекту перекрёстной фазовой модуляции. Первый член в правой части (7) описывает амплитудный эффект взаимодействия поляризационных компонент волнового поля, а другие члены в этом выражении описывают фазовые эффекты взаимодействия.

Система (2), (3) имеет решение в виде двухкомпонентного солитона [3]:

$$U(\xi, t) = \frac{A_0}{\text{ch}[A_0 \sqrt{\beta(2+3\sigma_\beta)/(2\gamma)} (\xi - V_{u,w}t)]} \exp(i\Omega_{u,w}t + iK\xi), \quad W = \pm U,$$

где

$$\Omega_{u,w} = \frac{\alpha\gamma}{2} \left(1 + \frac{3}{2} \sigma_\alpha \right) A_0^2 - \frac{\alpha\gamma}{2\beta} K^2$$

— дополнительные частоты компонент короткого векторного солитона, $K = (q\beta - \alpha\gamma)/(2\beta\gamma)$ — волновое число солитона, одинаковое для компонент U и W ,

$$V_{u,w} = \frac{\beta}{2} \left(1 + \frac{3}{2} \sigma_\alpha \right) A_0^2 + Kq - \frac{3}{2} \gamma K^2$$

— скорость солитона.

С другой стороны, система (2), (3) имеет два решения в виде коротких однокомпонентных векторных солитонов с различными поляризациями [3]:

$$U(\xi, t) = \frac{A_u}{\operatorname{ch}[A_u \sqrt{\beta/\gamma} (\xi - V_u t)]} \exp(i\Omega_u t + iK\xi), \quad W = 0;$$

$$W(\xi, t) = \frac{A_w}{\operatorname{ch}[A_w \sqrt{\beta/\gamma} (\xi - V_w t)]} \exp(i\Omega_w t + iK\xi), \quad U = 0,$$

где A_u и A_w — амплитуды векторных однокомпонентных солитонов с различными поляризациями, $\Omega_x = A_x^2 \alpha\gamma/2 - K^2 \alpha\gamma/(2\beta)$ и $V_x = A_x^2 \beta/2 + Kq - 3\gamma K^2/2$ — добавочные частоты и скорости солитонов; индекс x обозначает u или w . Эти солитонные решения по отдельности являются точными решениями скалярного несвязанного нелинейного уравнения Шрёдингера третьего порядка (1) [10–12]. Как было показано в [12], такие однокомпонентные солитоны являются устойчивыми относительно малых возмущений при условии $\gamma\beta > 0$. В наших дальнейших исследованиях мы будем рассматривать только случаи, при которых это условие выполнено.

В данной работе исследовано взаимодействие однокомпонентных солитонов при произвольных параметрах σ_α и σ_β . Исследование проведено аналитически в адиабатическом приближении и численно. Часть результатов при условии $\sigma_\alpha = \sigma_\beta$ была получена в работе [29].

2. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КОРОТКИХ ВЕКТОРНЫХ ОДНОКОМПОНЕНТНЫХ СОЛИТОНОВ

Рассмотрим начальную задачу о взаимодействии двух коротких векторных однокомпонентных солитонов огибающей функции с различными поляризациями. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ в анизотропной среде находятся два солитона с различными амплитудами на расстоянии ξ_0 друг от друга:

$$U(\xi, t = 0) = \frac{A_1(0) \exp(iK\xi)}{\operatorname{ch}[A_1(0)\varepsilon(\xi - \xi_0)]}, \quad W(\xi, t = 0) = \frac{A_2(0) \exp(iK\xi)}{\operatorname{ch}[A_2(0)\varepsilon\xi]}, \quad (8)$$

где константа $\varepsilon = \sqrt{\beta/\gamma}$. Предположим, что при взаимодействии параметры солитонов изменяются медленно, т. е. их эволюция при $t > 0$ может быть описана в адиабатическом приближении:

$$U(\xi, t) = A_1(t) \exp \left[i \int_0^t \Omega_u(\tilde{t}) d\tilde{t} + iK\xi \right] / \operatorname{ch} \left[A_1(t)\varepsilon \left(\xi - \xi_0 - \int_0^t V_u(\tilde{t}) d\tilde{t} \right) \right],$$

$$W(\xi, t) = A_2(t) \exp \left[i \int_0^t \Omega_w(\tilde{t}) d\tilde{t} + iK\xi \right] / \operatorname{ch} \left[A_2(t)\varepsilon \left(\xi - \int_0^t V_w(\tilde{t}) d\tilde{t} \right) \right], \quad (9)$$

где $\Omega_u(t) = A_1^2\alpha\gamma/2 - K^2\alpha\gamma/(2\beta)$ и $\Omega_w(t) = A_2^2\alpha\gamma/2 - K^2\alpha\gamma/(2\beta)$ — дополнительные частоты взаимодействующих векторных солитонов, $V_u(t) = A_1^2\beta/2 + Kq - 3\gamma K^2/2$ и $V_w(t) = A_2^2\beta/2 + Kq - 3\gamma K^2/2$ — их скорости. Расстояние между центрами взаимодействующих солитонов изменяется по закону

$$\Delta\xi = \xi_0 + \int_0^t [V_u(\tilde{t}) - V_w(\tilde{t})] d\tilde{t} = \xi_0 + \frac{\beta C_0}{2} \int_0^t \Delta A(\tilde{t}) d\tilde{t}, \quad (10)$$

где $\Delta A = A_1 - A_2$ — различие между амплитудами взаимодействующих однокомпонентных солитонов, обозначение C_0 задано ниже в (12).

Разность фаз этих солитонов есть

$$\varphi_u - \varphi_w = \int_0^t [\Omega_u(\tilde{t}) - \Omega_w(\tilde{t})] d\tilde{t} = \frac{\alpha\gamma C_0}{2} \int_0^t \Delta A(\tilde{t}) d\tilde{t} = \frac{\alpha\gamma}{\beta} (\Delta\xi - \xi_0). \quad (11)$$

Подставляя выражения (8) в закон сохранения энергии (6), получим соотношение, связывающее между собой амплитуды взаимодействующих солитонов:

$$A_1(t) + A_2(t) = A_1(0) + A_2(0) = C_0. \quad (12)$$

Дифференцируем зависимость (10) по времени, подставляем результат в формулу (7) и вводим обозначения $D = A_1/A_2 = (C_0 + \Delta A)/(C_0 - \Delta A)$, получим систему

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta A}{dt} = I_1 \frac{3\varepsilon\beta\sigma_\beta [C_0^2 - (\Delta A)^2]}{16 \operatorname{ch}^2[(C_0 + \Delta A)\varepsilon\Delta\xi/2]} \left[2 - \cos\left(\frac{2\alpha\gamma}{\beta} (\Delta\xi - \xi_0)\right) \right] + \\ + I_2 \frac{\alpha\sigma_\alpha}{8} [C_0^2 - (\Delta A)^2]^2 \sin\left[\frac{2\alpha\gamma}{\beta} (\Delta\xi - \xi_0)\right], \quad (13) \end{aligned}$$

$$\frac{d\Delta\xi}{dt} = \frac{\beta C_0}{2} \Delta A, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{th}(\eta) d(\operatorname{th} \eta)}{\operatorname{ch}^2(D\eta) \{1 - \operatorname{th}(D\eta) \operatorname{th}[(C_0 + \Delta A)\varepsilon\Delta\xi/2]\}^2}, \\ I_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{\operatorname{ch}^2[(C_0 - \Delta A)\varepsilon\xi/2] \operatorname{ch}^2[(C_0 + \Delta A)\varepsilon(\xi - \Delta\xi)/2]}. \end{aligned}$$

В дальнейшем мы будем рассматривать взаимодействие коротких однокомпонентных солитонов с малым различием амплитуд $|\Delta A| \ll C_0$. В этом случае полагаем в правой части формулы (13) параметр $D \approx 1$, получаем систему уравнений

$$\frac{da}{d\tau} = \sigma_\beta \frac{3\rho - 3\operatorname{th} \rho - \rho \operatorname{th}^2 \rho}{\operatorname{th}^4(\rho) \operatorname{ch}^2(\rho)} \{6 - 4\sin^2 p [\rho_0 - \rho]\} - \sigma_\alpha p \frac{4(\rho - \operatorname{th} \rho)}{\operatorname{th}^3(\rho) \operatorname{ch}^2(\rho)} \sin[2p(\rho_0 - \rho)], \quad (15)$$

$$\frac{d\rho}{d\tau} = a, \quad (16)$$

где $\rho = A_0\varepsilon\Delta\xi$, $\rho_0 = A_0\varepsilon\xi_0$, $\tau = tA_0^3\varepsilon\beta$, $a = \Delta A/A_0$, $p = \alpha\gamma/(A_0\varepsilon\beta)$.

2.1. Взаимодействие векторных солитонов без учёта фазовых эффектов

При условии $p = 0$ в уравнении (15) исчезают члены, учитывающие фазы солитонов. Тогда система (15), (16), после введения новых переменных $\tau' = \tau \sqrt{\sigma_\beta}$ и $a' = a/\sqrt{\sigma_\beta}$ (в дальнейшем штрихи будут опущены), принимает вид

$$\frac{da}{d\tau} = 6 \frac{3\rho - 3 \operatorname{th} \rho - \rho \operatorname{th}^2 \rho}{\operatorname{th}^4(\rho) \operatorname{ch}^2(\rho)}, \tag{17}$$

$$\frac{d\rho}{d\tau} = a. \tag{18}$$

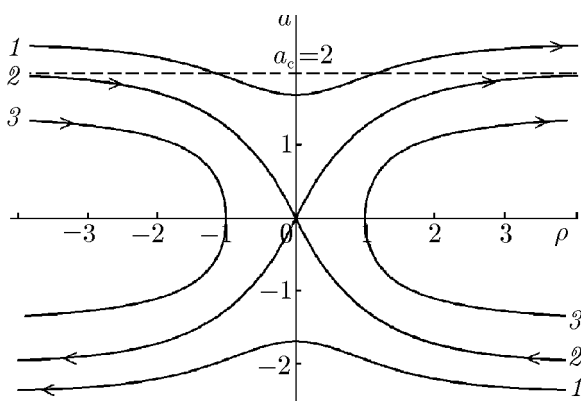


Рис. 1. Фазовая плоскость для системы (17), (18)

Фазовые траектории системы (17), (18) можно описать в явном виде уравнением

$$a^2 + 12 \frac{\rho - \operatorname{th} \rho}{\operatorname{ch}^2(\rho) \operatorname{th}^3(\rho)} = a_{\pm\infty}^2, \tag{19}$$

где $a_{\pm\infty}$ — начальное различие амплитуд взаимодействующих однокомпонентных солитонов на достаточно большом расстоянии $|\rho| \gg 1$. На рис. 1 приведена фазовая плоскость системы уравнений (17), (18). Видно, что для неё существует единственное состояние равновесия $a = 0, \rho = 0$ — седло.

Кривые 1 соответствуют взаимному прохождению взаимодействующих солитонов друг через друга, кривые 2 — сепаратрисы седла и отвечают бесконечно долгому сближению взаимодействующих солитонов с выравниванием их амплитуд, которое реализуется при критическом значении $a_c = a_\infty$. Критическое различие начальных амплитуд $a_c = a_\infty$, т.е. «интервал взаимного отражения», вследствие формулы (19) равно 2 (по модулю). Кривые 3 соответствуют взаимному отражению солитонов друг от друга.

Отметим, что ранее в данной работе предполагалось неравенство $|a| \ll 1$, которое ограничивает корректное применение уравнений (15), (16). Однако указанные ниже результаты численного эксперимента качественно совпадают с соответствующими аналитическими результатами и подтверждают возможность применения аналитических выражений и при не малых величинах $|a| \sim 1$. Это замечание справедливо во всех анализируемых случаях.

В случае взаимного отражения анализ уравнения (19) позволяет определить минимальное расстояние, на которое сближаются солитоны. Учитывая, что различие амплитуд солитонов $a = 0$ при минимальном расстоянии $\rho = \rho_{\min}$, рассмотрим два предельных случая.

При $|a_{\pm\infty}| \sim a_c = 2$, но $a_{\pm\infty} < a_c$ (случай взаимного отражения) можно считать, что минимальное расстояние $\rho_{\min} \ll 1$ и использовать в уравнении (19) асимптотическое разложение Тейлора—Маклорена. Тогда из формулы (19) получим $\rho_{\min}^2 = 5(4 - a_{\pm\infty}^2)/12$, например $|\rho_{\min}| \approx \approx 0,4$ при $|a_{\pm\infty}| = 1,9$.

При малых $|a_{\pm\infty}| \ll 1$ можно считать $|\rho_{\min}| \gg 1$ и использовать в уравнении (19) предельные выражения, которые приводят к равенству $48(\rho - 1)/\exp(2\rho) = a_{\pm\infty}^2$. Здесь $|\rho_{\min}| \rightarrow 1$ при $|a_{\pm\infty}| \rightarrow \rightarrow 0$, например $|\rho_{\min}| \approx 5$ при $|a_{\pm\infty}| = 0,1$ или $|\rho_{\min}| \approx 7,5$ при $|a_{\pm\infty}| = 0,01$.

2.2. Взаимодействие векторных солитонов без перекрёстной фазовой модуляции

При условии $\sigma_\beta = 0$ система (15), (16) после введения новых переменных $\tau' = \tau\sqrt{\sigma_\beta}$ и $a' = a/\sqrt{\sigma_\beta}$ (в дальнейшем штрихи будем опускать) приводится к виду

$$\frac{da}{d\tau} = 6 \frac{3\rho - 3 \operatorname{th} \rho - \rho \operatorname{th}^2 \rho}{\operatorname{th}^4(\rho) \operatorname{ch}^2(\rho)} - 4 \sin^2[p(\rho_0 - \rho)] \frac{3\rho - 3 \operatorname{th} \rho - \rho \operatorname{th}^2 \rho}{\operatorname{th}^4(\rho) \operatorname{ch}^2(\rho)}, \quad (20)$$

$$\frac{d\rho}{d\tau} = a. \quad (21)$$

Она имеет единственное состояние равновесия $a = 0$, $\rho = 0$ седлового типа. На рис. 2 приведена фазовая плоскость для уравнений (20), (21) при условии $p = 1$ и разных значениях начальной разности фаз солитонов: $p\rho_0 = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4$.

Изменение величины $p\rho_0$ приводит лишь к изменению «интервалов отражения», т. е. максимального расстояния от сепаратрис седла до горизонтальной оси.

В зависимости от начальных условий здесь возможны случаи взаимного отражения солитонов, прохождения солитонов сквозь друг друга, а также бесконечно долгое сближение солитонов.

Интегрируя систему (20), (21) при условии равенства амплитуд солитонов в состоянии равновесия, т. е. $a(\rho = 0) = 0$, определим «интервалы отражения» — расстояния от сепаратрис (отдельно при $\rho \rightarrow +\infty$ и при $\rho \rightarrow -\infty$) до горизонтальной оси:

$$a_{\pm\infty}^2 = 4 - 8 \int_0^{\pm\infty} \sin^2[p(\rho_0 - \rho)] \frac{3\rho - 3 \operatorname{th} \rho - \rho \operatorname{th}^2 \rho}{\operatorname{th}^4(\rho) \operatorname{ch}^2(\rho)} d\rho.$$

Графики зависимостей $a_{\pm}^2(p, \rho_0)$ при различных значениях параметра $2p\rho_0 = 0, \pi/2, \pi$ и $3\pi/2$ приведены на рис. 3.

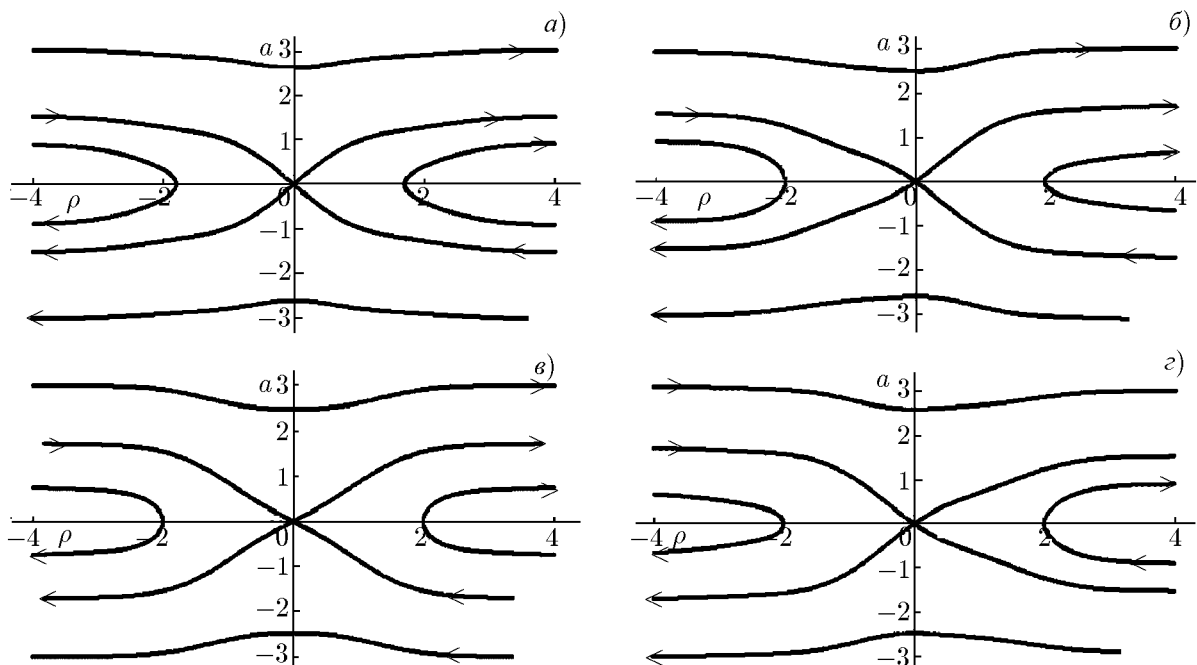


Рис. 2. Фазовая плоскость для системы (20), (21) при условии $p = 1$ и различных значениях параметра $p\rho_0 = 0$ (а), $\pi/4$ (б), $\pi/2$ (в) и $3\pi/4$ (г)

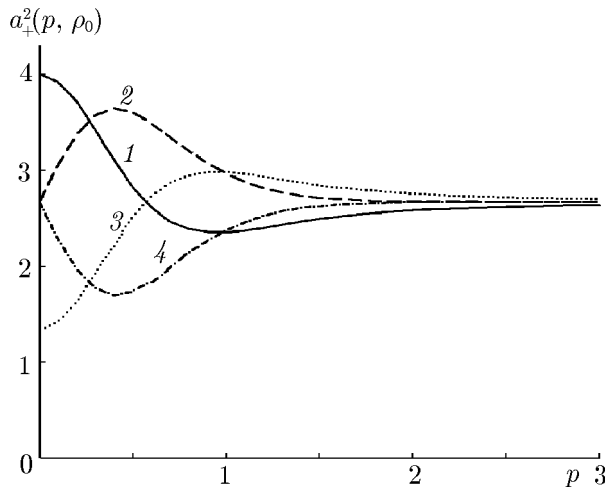


Рис. 3. Функция $a_{\pm}^2(p, \rho_0)$ при различных значениях $2p\rho_0$: кривая 1 соответствует $2p\rho_0 = 0$, 2 — $2p\rho_0 = \pi/2$, 3 — $2p\rho_0 = \pi$ и 4 — $2p\rho_0 = 3\pi/2$. Значения a_{\pm}^2 равны a_{\pm}^2 при следующих заменах параметра $2p\rho_0$: $0 \rightarrow 0$, $\pi/2 \rightarrow 3\pi/2$, $\pi \rightarrow \pi$ и $3\pi/2 \rightarrow \pi/2$

Значения $a_{\pm}^2(2p\rho_0)$ ограничены и стремятся примерно к 2,66 при $p \rightarrow +\infty$. Поэтому всегда выполняется неравенство $|a_{\pm\infty}| < 2$, т.е. интервал отражения меньше описанного в разделе 2.1 при условии $p = 0$ интервала отражения, и стремится примерно к 1,63 при больших значениях p . В частности, для указанных на рис. 2 случаев $|a_{\pm\infty}| \approx 1,53$ при $2p\rho_0 = 0$; $|a_{+\infty}| \approx 1,72$ при $2p\rho_0 = \pi/2$; $|a_{\pm\infty}| \approx 1,73$ при $2p\rho_0 = \pi$ и $|a_{+\infty}| \approx 1,54$ при $2p\rho_0 = 3\pi/2$.

В случае взаимного отражения, интегрируя уравнения (20), (21), можно определить минимальное расстояние сближения солитонов ρ_{\min} . При условии равенства их амплитуд на минимальном расстоянии сближения, т.е. при $a(\rho_{\min})$, интегрируя уравнения (20), (21) в пределах от $\rho_{\pm \min}$ до $\pm\infty$, имеем

$$a_{\pm\infty, \text{lim}}^2 = 12 \frac{\rho_{\pm \min} - \text{th}(\rho_{\pm \min})}{\text{th}^3(\rho_{\pm \min}) \text{ch}^2(\rho_{\pm \min})} - 8 \int_{\rho_{\pm \min}}^{\pm\infty} \sin^2[p(\rho_0 - \rho)] \frac{3\rho - 3\text{th}\rho - \rho\text{th}^2\rho}{\text{th}^4(\rho) \text{ch}^2(\rho)} d\rho.$$

Отсюда получаем, например для приведённых на рис. 2 случаев, при $|\rho_{\pm \min}| = 0,1$ для $2p\rho_0 = 0 - |a_{\pm\infty, \text{lim}}| \approx 1,53$; для $2p\rho_0 = \pi/2 - |a_{+\infty, \text{lim}}| \approx 1,71$ и $|a_{-\infty, \text{lim}}| \approx 1,54$; для $2p\rho_0 = \pi - |a_{\pm\infty, \text{lim}}| \approx 1,72$; для $2p\rho_0 = 3\pi/2 - |a_{+\infty, \text{lim}}| \approx 1,54$ и $|a_{-\infty, \text{lim}}| \approx 1,71$.

2.3. Взаимодействие векторных солитонов без перекрёстной нелинейной дисперсии

При условии $\sigma_{\beta} = 0$ система уравнений (15), (16) после введения новых переменных $\tau' = \tau \sqrt{\sigma_{\alpha}}$ и $a' = a / \sqrt{\sigma_{\alpha}}$ (в дальнейшей штрихи будем опускать) принимает вид

$$\frac{da}{d\tau} = -4p \sin[2p(\rho_0 - \rho)] \frac{\rho - \text{th}\rho}{\text{th}^3(\rho) \text{ch}^2(\rho)}, \tag{22}$$

$$\frac{d\rho}{d\tau} = a. \tag{23}$$

Она имеет бесконечно много эквидистантных состояний равновесия $a = 0$, $\rho = 2k\pi/(2p) + \rho_0$ седлового типа, и $a = 0$, $\rho = (2k + 1)\pi/(2p) + \rho_0$ — типа центра (здесь $k \in Z$ — любое целое число). На рис. 4 приведена фазовая плоскость системы (22), (23) при условии $p = 1$ и разных значениях начальной разности фаз солитонов $2p\rho_0 = 0, \pi/2, \pi$ и $3\pi/2$. Внутри существующих петель сепаратрис или связок сепаратрис существуют состояния равновесия типа центр.

Изменение величины p пропорционально меняет лишь координаты состояний равновесия, а также величину «интервала отражения», не приводя таким образом к качественному изменению поведения траекторий системы.

Как видно из приведённых фазовых портретов, существует одно качественно выделенное состояние равновесия, так называемое В-седло — ближайшее к началу координат седло, не имеющее петель сепаратрис. Лишь при условии $2p\rho_0 = \pi$ (рис. 4в) таких седел два, и они имеют связанные между собой общие сепаратрисы.

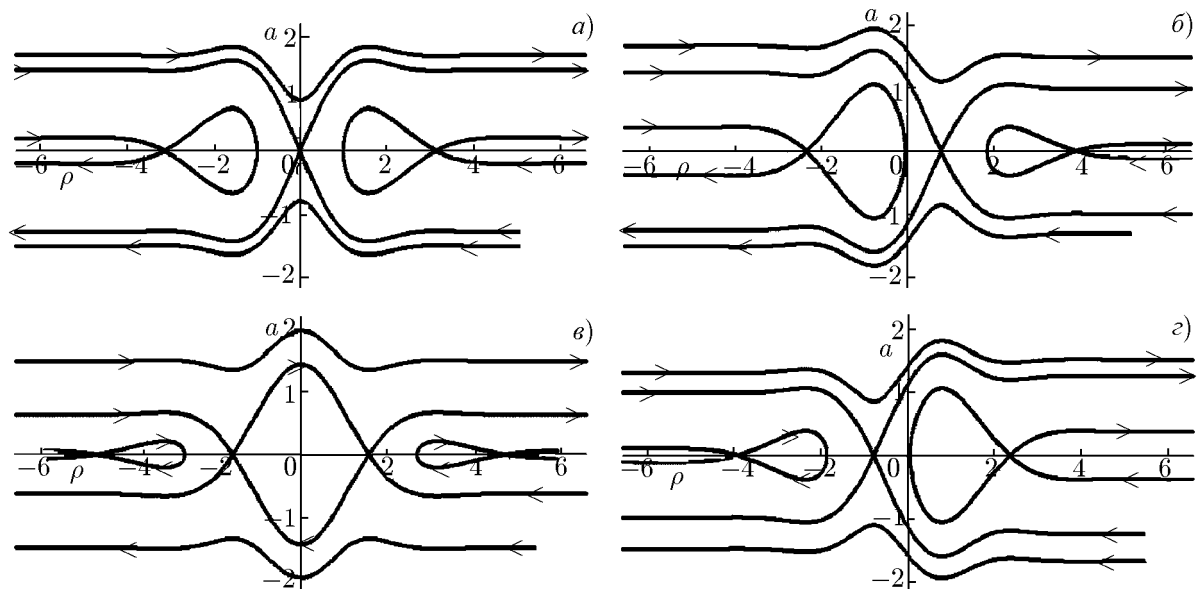


Рис. 4. Фазовая плоскость системы (22), (23) при условии $p = 1$ и при различных значениях $\rho\rho_0 = 0$ (а), $\pi/2$ (б), π (в) и $3\pi/2$ (г). Из состояний равновесия указаны только близкие к началу координат седла

При попадании начальных условий между соответствующими сепаратрисами все седла определяют предельное расстояние сближения солитонов. Но именно выделенное седло определяет наименьшее предельное расстояние сближения. В случаях, когда В-седло отклоняется от начала координат, возможно, что это расстояние имеет иной знак по сравнению с начальным расстоянием. Таким образом, при взаимном отражении солитоны могут сближаться и взаимодействовать, пройти сквозь друг друга, разойтись на некоторое расстояние и опять начать движение навстречу друг другу, пройти сквозь друг друга уже в обратном направлении и окончательно отразиться. Такое поведение возможно, например, при условии $2\rho\rho_0 = \pi/2$ (см. рис. 4б) при движении по фазовым траекториям между сепаратрисами В-седла из области отрицательных ρ .

В случае, если начальное различие амплитуд взаимодействующих солитонов превышает соответствующее для сепаратрисы В-седла значение, солитоны проходят сквозь друг друга.

При начальных условиях на сепаратрисе любого седла солитоны сближаются бесконечно долго. В этом случае после того, как солитоны оказываются на расстоянии, равном координате седла, они далее двигаются без изменения взаимного положения. Однако, такой «сепаратрисный» механизм взаимодействия является неустойчивым относительно малых возмущений. Такие возмущения за счёт внешних воздействий несомненно возможны, т. к. время сближения солитонов бесконечно велико. Таким образом, механизм взаимодействия является «негрубым».

При начальных условиях, заданных точно в каком-либо седле, солитоны остаются на расстоянии, равном координате седла, и далее двигаются с одинаковыми амплитудами без изменения взаимного положения. Таким образом возможна реализация связанного, но неперiodического (не бризерного), состояния взаимодействующих на некотором расстоянии векторных однокомпонентных солитонов. Однако такой «седловой» механизм взаимодействия солитонов в реальных средах имеет смысл рассматривать только на конечных временах, т. к. он является «негрубым» по причинам, описанным выше.

Следует отметить, что начальные условия заданы величиной ρ_0 , точнее, из-за периодичности функции в уравнении (22), величиной $\rho_0 + \pi n/p$. Таким образом, начальное расстояние всегда совпадает с координатой одного из седел на фазовой плоскости. Поэтому заданием начальных

условий невозможно выбрать траекторию, лежащую на или внутри какой-либо петли сепаратрис или внутри связки сепаратрис. Если выбор такой замкнутой траектории был возможен, это соответствовало бы периодическому взаимному движению взаимодействующих солитонов на некотором расстоянии друг от друга. В результате реализовался бы бризер векторных солитонов разной поляризации, находящийся на некотором расстоянии друг от друга, т. е. никогда полностью не перекрывающихся. Возникнуть такие бризеры могут только из-за случайных внешних воздействий на больших временах при «седловом» связанном состоянии солитонов.

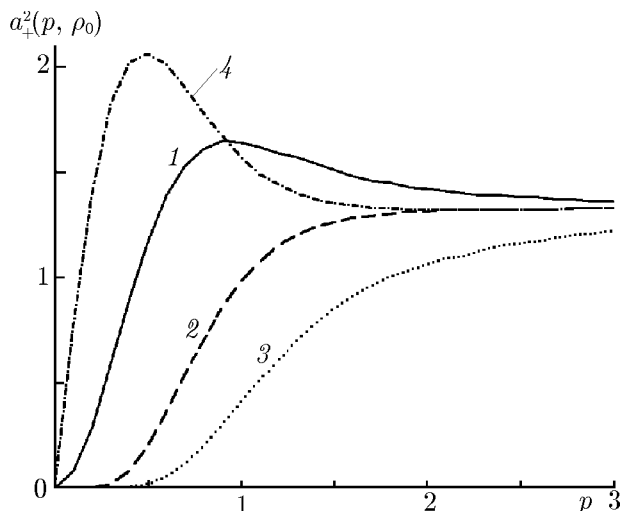


Рис. 5. Функция $a_{\pm}^2(p, \rho_0)$ при различных значениях $2p\rho_0$: кривая 1 соответствует $2p\rho_0 = 0$, 2 — $2p\rho_0 = \pi/2$, 3 — $2p\rho_0 = \pi$ и 4 — $2p\rho_0 = 3\pi/2$. Значения a_{\pm}^2 равны a_{\pm}^2 при следующих заменах параметра $2p\rho_0$: $0 \rightarrow 0, \pi/2 \rightarrow 3\pi/2, \pi \rightarrow \pi$ и $3\pi/2 \rightarrow \pi/2$

В рассматриваемых случаях, интегрируя систему (22), (23) при условии $a(\text{В-седло}) = 0$, возможно определить «интервалы отражения» — максимальные расстояния от сепаратрис выделенного седла (отдельно при $\rho \rightarrow +\infty$ и при $\rho \rightarrow -\infty$) до горизонтальной оси. Эти расстояния описываются выражением

$$a_{\pm\infty}^2 = -8p \int_{\rho(\text{В-седло})}^{\pm\infty} \sin^2[2p(\rho_0 - \rho)] \frac{\rho - \text{th } \rho}{\text{th}^3(\rho) \text{ch}^2(\rho)} d\rho.$$

Графики $a_{\pm}^2(p, \rho_0)$ при $2p\rho_0 = 0, \pi/2, \pi$ и $3\pi/2$ приведены на рис. 5. Значение $a_{\pm}^2(p, \rho_0)$ всегда ограничено и стремится примерно к 1,33 при $p \rightarrow +\infty$. В частности, в указанных на рис. 4 случаях $|a_{\pm\infty}| \approx 1,28$ при $2p\rho_0 = 0$; $|a_{+\infty}| \approx 0,99$ при $2p\rho_0 = \pi/2$; $|a_{\pm\infty}| \approx 0,64$ при $2p\rho_0 = \pi$; $|a_{+\infty}| \approx 1,26$ при $2p\rho_0 = 3\pi/2$. Аналогично можно было бы определить «интервалы отражения» и для любого из седел.

2.4. Общий случай — учёт всех нелинейных эффектов взаимодействия

При наличии в модельных уравнениях одновременно всех нелинейных параметров связи, используя новые переменные $\tau' = \tau\sqrt{\sigma_\beta}$ и $a' = a/\sqrt{\sigma_\beta}$ и обозначение $\sigma_\alpha/\sigma_\beta = \delta$ (в дальнейшей записи штрихи будем опускать), систему уравнений (15), (16) можно привести к виду

$$\frac{da}{d\tau} = 6 \frac{3\rho - 3 \text{th } \rho - \rho \text{th}^2 \rho}{\text{th}^4(\rho) \text{ch}^2(\rho)} - 4 \sin^2[p(\rho_0 - \rho)] \frac{3\rho - 3 \text{th } \rho - \rho \text{th}^2 \rho}{\text{th}^4(\rho) \text{ch}^2(\rho)} - \delta \frac{4p(\rho - \text{th } \rho)}{\text{th}^3(\rho) \text{ch}^2(\rho)} \sin[2p(\rho_0 - \rho)], \quad (24)$$

$$\frac{d\rho}{d\tau} = a. \quad (25)$$

Эта система имеет не менее одного состояния равновесия. На рис. 6 приведена фазовая плоскость для системы (24), (25) при параметрах $p = 1, \delta = 1$ и различных значениях $2p\rho_0 = 0, \pi/2, \pi$ и $3\pi/2$.

Из сравнения фазовых портретов при различных величинах параметра $\delta = \sigma_\alpha/\sigma_\beta$ вытекает, что его рост приводит к увеличению числа седел и соответствующего числа центров внутри петель

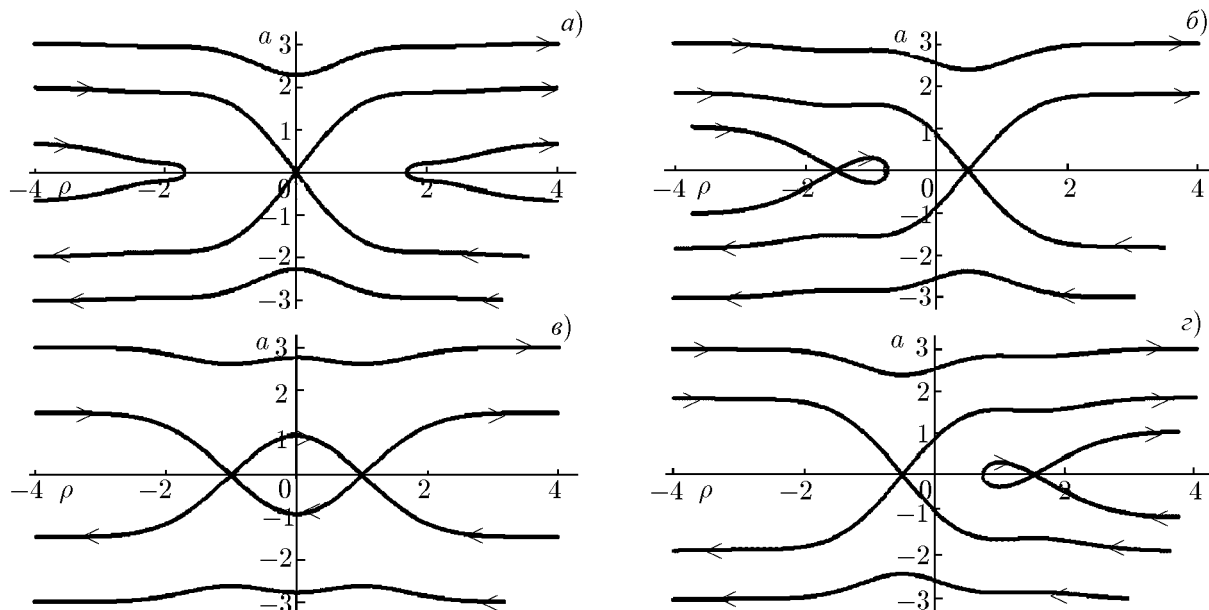


Рис. 6. Фазовая плоскость для системы (24), (25) при параметрах $\delta = 1, p = 1$ и при различных значениях $2p\rho_0 = 0$ (а), $\pi/2$ (б), π (в) и $3\pi/2$ (г). Из состояний равновесия указаны только близкие к началу координат седла

сепаратрис, а также к росту расстояния между седлами и возрастанию «интервала отражения». Увеличение величины p ведёт к увеличению количества седел и к росту «интервала отражения», но при этом — к уменьшению расстояний между существующими седлами.

Как видно из приведённых фазовых портретов, всегда существует одно качественно выделенное состояние равновесия (В-седло) — ближайшее к началу координат седло, не имеющее петель сепаратрис. Лишь при условии $2p\rho_0 = \pi$ (рис. 6в) таких седел два и они соединены между собой связками сепаратрис.

Основными взаимодействиями векторных солитонов являются их взаимное прохождение сквозь друг друга, «сепаратрисное» взаимодействие с бесконечно медленным выравниванием амплитуд солитонов и взаимное отражение солитонов друг от друга. Если В-седло смещено от начала координат фазового пространства, то возможно, взаимное отражение с двойным прохождением солитонов друг через друга, аналогично случаю, описанному в разделе 2.2.

В рассматриваемых случаях, интегрируя систему (24), (25) при условии равенства амплитуд солитонов в выделенном седловом состоянии равновесия $a(\text{В-седло}) = 0$, можно определить «интервалы отражения» — максимальные расстояния от сепаратрис В-седла (отдельно при $\rho \rightarrow +\infty$ и при $\rho \rightarrow -\infty$) до горизонтальной оси. Эти расстояния описываются выражением

$$a_{\pm\infty}^2 = \frac{12[\rho(\text{В-седло}) - \text{th}[\rho(\text{В-седло})]]}{\text{th}^3[\rho(\text{В-седло})] \text{ch}^2[\rho(\text{В-седло})]} - 8\delta\rho \int_{\rho(\text{В-седло})}^{\pm\infty} \sin[2p(\rho_0 - \rho)] \frac{\rho - \text{th}\rho}{\text{th}^3(\rho) \text{ch}^2(\rho)} d\rho - 8 \int_{\rho(\text{В-седло})}^{\pm\infty} \sin^2[p(\rho_0 - \rho)] \frac{3\rho - 3\text{th}\rho - \rho \text{th}^2\rho}{\text{th}^4(\rho) \text{ch}^2(\rho)} d\rho.$$

Графики функций a_{\pm}^2 при $\rho \rightarrow +\infty$ при различных значениях $2p\rho_0 = 0, \pi/2, \pi$ и $3\pi/2$ и различных значениях $\delta = 1/2, 1$ и 2 приведены на рис. 7. В любом из этих случаев при $p \rightarrow +\infty$ значения a_{\pm}^2

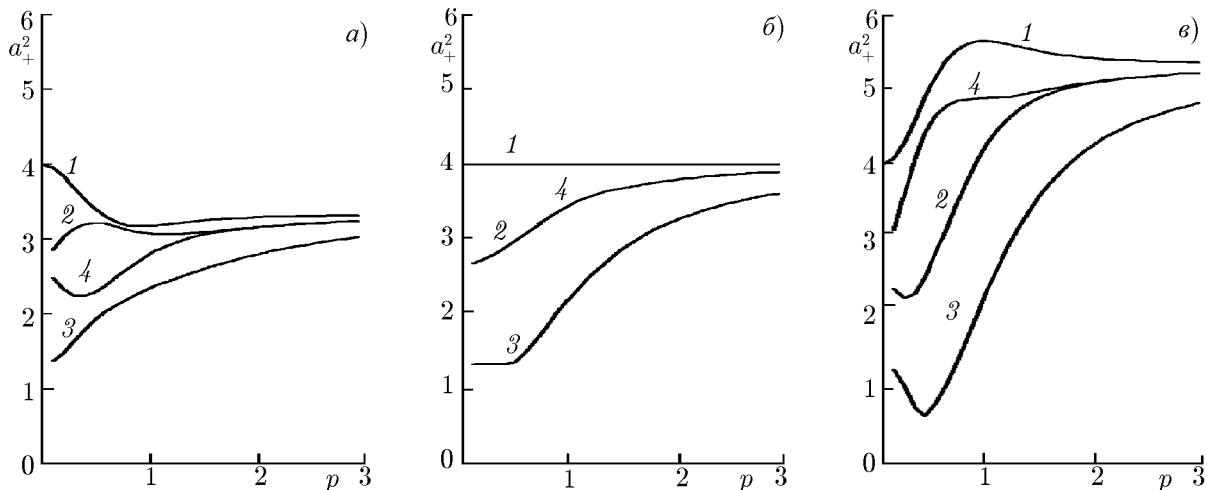


Рис. 7. Величина a_+^2 при различных $\delta = 1/2$ (а), 1 (б) и 2 (в) и $2p\rho_0$. Кривая 1 соответствует $2p\rho_0 = 0$, 2 — $2p\rho_0 = \pi/2$, 3 — $2p\rho_0 = \pi$ и 4 — $2p\rho_0 = 3\pi/2$. Значения a_-^2 равны a_+^2 при следующих заменах параметра $2p\rho_0$: $0 \rightarrow 0$, $\pi/2 \rightarrow 3\pi/2$, $\pi \rightarrow \pi$ и $3\pi/2 \rightarrow \pi/2$

становятся постоянными (зависящими от δ , но не зависящими от $2p\rho_0$).

Отметим, что расположение любого седла определяется величинами δ , $2p\rho_0$ и p . При анализе координат различных седел получено, что при любых значениях δ и $2p\rho_0$ зависимости этих координат от параметра p при больших значениях последнего асимптотически стремятся к гиперболическим снизу. Однако начальные условия для расстояния между солитонами заданы величиной ρ_0 , точнее, из-за периодичности функций в (24), (25), величиной $\rho_0 + \pi n/p$, и исходная координата на фазовой плоскости зависит от параметра p по гиперболическому закону. Таким образом, начальная точка в фазовом пространстве всегда расположена немного дальше от начала координат по горизонтали, чем выделенное или невыделенное седло. В результате заданием начальных условий невозможно выбрать траекторию, лежащую на или внутри петли (связки) сепаратрис, или непосредственно в каком-либо седле. Таким образом, кроме случаев отражения и прохождения солитонов, возможны только «сепаратрисные» («негрубые») случаи их взаимодействия. В итоге бризер, или хотя бы стационарное «седловое» состояние, в рассматриваемом случае не реализуется.

2.5. Численное моделирование

Для проверки корректности полученных выше результатов рассмотрим численно динамику волновых пакетов (8) в рамках системы (2), (3) при условии $\alpha = q = \beta = \gamma = 1$, различных значениях параметров нелинейной связи $\sigma_\alpha = \sigma_\beta$ и различных начальных амплитудах взаимодействующих однокомпонентных солитонов $A_1(0)$, $A_2(0)$.

На рис. 8 в качестве примера показано распределение волновых полей $|U|$ и $|W|$ взаимодействующих солитонов в разные моменты времени при исходном расстоянии между ними $\xi = -\pi$ и $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = 1/16$, $A_1(0) = 1,7$, $A_2(0) = 1$. Как видно из этого распределения, при взаимодействии однокомпонентные взаимно ортогональные векторные волновые пакеты сохраняют солитоноподобную форму, хотя взаимодействие сопровождается слабым линейным излучением части волновых полей. Этот результат подтверждает корректность адиабатического приближения при описании взаимодействия рассматриваемых солитонов.

На рис. 9 показаны результаты численного моделирования взаимодействия однокомпонентных солитонов. Конкретно, изображена зависимость относительного отличия максимумов амплитуд

взаимодействующих поляризационных компонент

$$a_{\text{num}} = \frac{2 \max(|U|) - \max(|W|)}{\sqrt{\sigma} \max(|U|) + \max(|W|)} \approx \frac{2(A_1 - A_2)}{\sqrt{\sigma} (A_1 + A_2)}$$

от расстояния в пространстве между максимумами $\Delta\xi = \xi_{\max|u|} - \xi_{\max|w|}$ при условии $A_2(0) = 1$, различных значениях $A_1(0)$ и различных исходных расстояниях между солитонами ξ_0 .

Кривая 1 на рис. 9а описывает прохождение взаимодействующих солитонов сквозь друг друга при условии $A_1(0) = 1,75$ ($a_{\text{num}}(-\pi) = 2,18$); кривая 2 отвечает «сепаратрисному» режиму взаимодействия при $A_1(0) = 1,65$ ($a_{\text{num}}(-\pi) = 1,93$); кривая 3 описывает взаимное отражение солитонов при $A_1(0) = 1,55$ ($a_{\text{num}}(-\pi) = 1,73$). Рисунок 9а соответствует фазовой плоскости системы (24), (25) при $\rho_0 = \pi k$ (т.е. является аналогом рис. 6а). «Интервал взаимного отражения» при условии $\rho_0 = \pi k$ численно получен равным $(a_{\text{num}})_c \approx 1,93$ (расстояние от кривой 2 до горизонтальной оси при $\Delta\xi = -\pi$), что мало отличается от соответствующей величины в адиабатическом приближении. Отличие аналитических и численных результатов возникает из-за излучения части волнового поля при взаимодействии солитонов, что не учитывалось в аналитическом рассмотрении.

Кривая 1 на рис. 9б описывает прохождение солитонов сквозь друг друга при условии $A_1(0) = 1,55$ ($a_{\text{num}}(-\pi) = 1,73$); кривая 2 — «сепаратрисный» режим взаимодействия при $A_1(0) = 1,45$ ($a_{\text{num}}(-\pi) = 1,43$); кривая 3 — режим взаимного отражения солитонов при $A_1(0) = 1,35$ ($a_{\text{num}}(-\pi) = 1,19$). Рисунок 9б соответствует фазовой плоскости системы уравнений (24), (25)

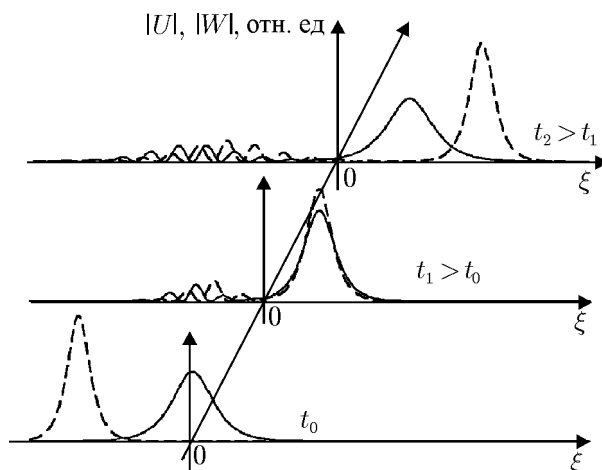


Рис. 8. Распределение волновых полей взаимодействующих однокомпонентных солитонов в различные моменты времени. Непрерывная линия соответствует распределению $|U|$, штриховая — распределению $|W|$

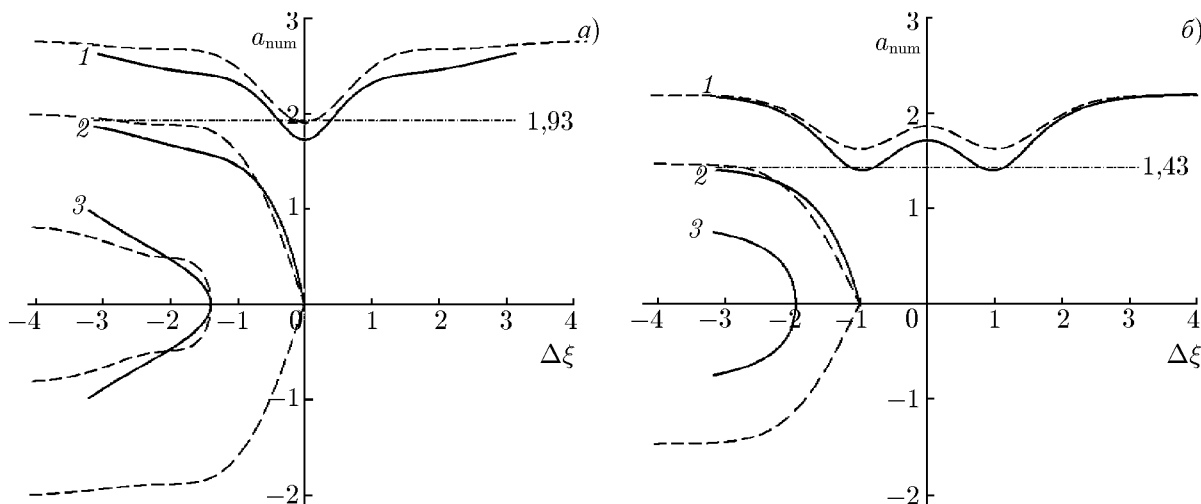


Рис. 9. Результаты численного расчёта (указаны сплошной линией) — аналоги рис. 6а, в. Рисунок 9а отвечает условию $\xi_0 = -\pi$, рис. 9б — $\xi_0 = -5\pi/4$. Пунктиром даны соответствующие фазовые траектории, найденные аналитически

при условии $\rho_0 = \pi k + \pi/4$ (см. рис. 6в). «Интервал взаимного отражения» при условии $\rho_0 = \pi k + \pi/4$ численно получен равным $(a_{\text{мин}})_c \approx 1,45$, что мало отличается от аналогичной величины, полученной аналитически.

Отметим, что в аналитической части данной работы предполагалось неравенство $|a| \ll 1$, которое ограничивает корректное применение аналитических решений. Но результаты численного моделирования качественно совпадают с соответствующими аналитическими результатами и подтверждают возможность применения аналитических выражений и при не малых величинах $|a| \sim 1$.

Также нужно отметить, что на схожесть аналитических результатов и результатов численного расчёта влияют величины параметров нелинейной связи $\sigma_\alpha, \sigma_\beta$. При увеличении этих параметров характер взаимодействия солитонов сохраняется, но становится более существенным изменение их амплитуд в результате взаимодействия. Это приводит к большему отличию аналитических результатов от результатов численного моделирования.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе проанализированы фазовые эффекты взаимодействия коротких векторных однокомпонентных солитонов. Взаимодействие солитонов рассматривалось в рамках пары связанных нелинейных уравнений Шрёдингера третьего порядка в отсутствие вынужденного рассеяния Рамана. Полученные в адиабатическом приближении аналитические и численные результаты хорошо согласуются между собой при малых параметрах взаимной нелинейной связи компонент различной поляризации векторного волнового пакета $\{\sigma_\alpha, \sigma_\beta\} \ll 1$. Описаны режимы прохождения солитонов сквозь друг друга, их взаимного отталкивания и асимптотически медленного сближения. Обсуждается возможность существования квазистационарных состояний взаимодействующих солитонов: бризеров, неперекрывающихся полностью и постоянно находящихся на некотором (переменном) расстоянии друг от друга солитонов, а также «седлового» взаимодействия, при котором связанные солитоны постоянно находятся на некотором (постоянном) расстоянии друг от друга. Кроме того, описан режим взаимного отражения взаимодействующих солитонов с двукратным прохождением сквозь друг друга. При увеличении параметров $\sigma_\alpha, \sigma_\beta$ характер взаимодействия однокомпонентных векторных солитонов сохраняется, но при взаимодействии в большей степени изменяется их амплитуда. При условии $p = 0$, т. е. в отсутствие кубичной нелинейности, траектории относительного движения солитонов описаны в явном виде. При условии $p \neq 0$ характер взаимодействия солитонов зависит от их начальной разности фаз.

Работа проведена при поддержке РФФИ (грант 12-02-00436-а).

В данной научной работе использованы результаты, полученные в ходе выполнения проекта № 11-01-0066 Программы «Научный фонд НИУ ВШЭ» в 2012–2013 годах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Yang Y. Solitons in field theory and nonlinear analysis. New York: Springer, 2001.
2. Dickey L. A. Soliton equation and hamiltonian systems. New York: World Scientific, 2005.
3. Kivshar Y. S., Agraval G. P. Optical solitons: from fibers to photonic crystals. San Diego: Academic, 2003.
4. Agraval G. P. Fiber optic communication systems. New York: Wiley, 2002.
5. Oliviera J. R., Moura M. A. // Phys. Rev. E. 1998. V. 57. P. 4751.
6. Kodama Y. J. // Stat. Phys. 1985. V. 39. P. 597.

7. Zaspel C. E. // *Phys. Rev. Lett.* 1999. V. 82. P. 723.
8. Hong B., Lu D. // *Int. J. Nonlin. Sci.* 2009. V. 7. P. 360.
9. Karpman V. I. // *European Phys. J. B.* 2004. V. 39. P. 341.
10. Громов Е. М., Таланов В. И. // *ЖЭТФ.* 1996. Т. 110. С. 137
11. Gromov E. M., Talanov V. I. // *Chaos.* 2000. V. 10. P. 551.
12. Gromov E. M., Piskunova L. V., Tyutin V. V. // *Phys. Lett. A.* 1999. V. 256. P. 153.
13. Tsitsas N. L., Rompolis N., Kourakis I., et al. // *Phys. Rev. E.* 2009. V. 79. Art. no. 037601.
14. Захаров В. Е., Шабад А. Б. // *ЖЭТФ.* 1972. Т. 34. С. 62.
15. Hasegawa A., Tappert F. // *Appl. Phys. Lett.* 1973. V. 23. P. 142.
16. Манаков С. В. // *ЖЭТФ.* 1974. Т. 38. С. 248.
17. Satsuma J., Yajima N. // *Supplement of the progress in theoretical physics.* 1974. V. 55. P. 284.
18. Власов С. Н., Таланов В. И. // *Самофокусировка волн.* Нижний Новгород: ИПФ РАН, 1997.
19. Su M.-Y. // *Phys. Fluids.* 1982. V. 12. P. 25.
20. Gromov E. M., Talanov V. I. // *Int. School in nonlinear science, nonlinear waves. Synchronization and Pattern.* Nizhny Novgorod: Nizhny Novgorod State University, 1995. P. 23.
21. Agrawal G. P. // *Nonlinear fiber optics.* San Diego: Academic Press, 1989.
22. Christodoulides D. N., Joseph R. I. // *Electron. Lett.* 1984. V. 20. P. 659.
23. Kim J. // *ETRI J.* 2001. V. 23. P. 9.
24. Lu F., Lin W. H., Knox W. H., Agrawal G. P. // *Phys. Rev. Lett.* 2004. V. 93. Art. no. 183901.
25. Gromov E. M., Tyutin V. V., Vorontsov D. E. // *Phys. Lett. A.* 2001. V. 287. P. 233.
26. Fordy A. P., Kullish P. P. // *Commun. Math. Phys.* 1983. V. 89. P. 427.
27. Menyuk C. R. // *J. Opt. Soc. Am. B.* 1988. V. 5. P. 392.
28. Наянов В. И. *Многополевые солитоны.* М.: Физматлит, 2006.
29. Aseeva N. V., Gromov E. M., Tyutin V. V. // *Phys. Lett. A.* 2012. V. 376. P. 718.

Поступила в редакцию 26 декабря 2011 г.; принята в печать 26 марта 2012 г.

INTERACTION OF SHORT SINGLE-COMPONENT VECTOR SOLITONS

N. V. Aseeva, E. M. Gromov, and V. V. Tyutin

Interaction of single-component different-polarization vector solitons of the enveloping function in anisotropic media is studied within the framework of the system of two coupled third-order nonlinear Schrödinger equations which allow for the third-order linear dispersion, nonlinear dispersion, crossed nonlinear phase modulation, and crossed nonlinear dispersion. The regimes of mutual reflection, passing, and asymptotic approaching of the solitons are obtained. It is shown that the character of interaction of such solitons is determined by the initial relationship among both their amplitudes and phases. The stationary mutual locations of interacting solitons and their coupled, the so-called breather states are discussed. The roles of the cubic nonlinearity, crossed cubic nonlinearity, and crossed nonlinear dispersion during interaction of solitons are studied.