

УДК 517.4

## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНО ЭФФЕКТИВНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ ПО НЕЭКВИДИСТАНТНЫМ ОТСЧЁТАМ

*А. А. Моисеев, Г. В. Геликонов, П. А. Шильягин, В. М. Геликонов*

Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород, Россия

В данной работе представлен приближённый метод осуществления фурье-преобразования данных, полученных на неэквидистантных отсчётах. Показано, что можно осуществить пересчёт данных на эквидистантные отсчёты как «неоднородную свёртку», т. е. свёртку с некоторой функцией, форма которой зависит от вычисляемого элемента и характера неэквидистантности. Таким образом, данный пересчёт не требует вычисления значений исходных данных в промежуточных отсчётах (в отличие от линейной аппроксимации, сплайна или иных пересчётов). Поскольку размер ядра данной «неоднородной свёртки» порядка 9, предложенный в работе метод может быть основой для вычислительно эффективного алгоритма. Продемонстрирована применимость предложенного в работе подхода к спектральной оптической когерентной томографии.

### ВВЕДЕНИЕ

В различных приложениях, от радиоастрономии до некоторых видов биомедицинской визуализации (например, спектральной оптической когерентной томографии (ОКТ)), спектральные данные используются для построения изображений [1]. Если эти данные в ОКТ отсчитаны эквидистантно, то оптические изображения могут быть вычислены с использованием быстрого преобразования Фурье (БПФ), которое требует выполнения числа операций, превышающего  $N \log_2 N$  ( $O[N \log_2 N]$ ) [2]. Однако данное условие далеко не всегда соблюдается в реальных измерениях. Например, в спектральной ОКТ данные записываются эквидистантно по длине волны  $\lambda$ , в то время как изображения получаются путём преобразования Фурье из пространства волновых чисел  $k$  в пространство глубин  $z$ , и для построения корректных изображений требуется эквидистантная дискретизация (представление в виде эквидистантных дискретных отсчётов) именно в пространстве  $k$  [3]. Поскольку прямое вычисление неэквидистантного преобразования Фурье требует порядка  $O(N^2)$  операций, в приложениях, требующих быстрой обработки данных, применяются различные приближённые алгоритмы для вычисления такого преобразования, например различные виды пересчёта данных в эквидистантные отсчёты [4–6], так называемый гриддинг [7, 8], периодограммы Ломба [9] и т. д. В данной работе предлагается метод приближённого вычисления преобразования Фурье по неэквидистантным отсчётам, который потенциально по быстрдействию близок к быстрому преобразованию Фурье.

### 1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ ПО НЕЭКВИДИСТАНТНЫМ ОТСЧЁТАМ И ОСНОВНАЯ ИДЕЯ ЕГО ПРИБЛИЖЁННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ

В данном разделе рассмотрим общую задачу следующего вида: пусть есть данные, неэквидистантно дискретизованные в пространстве « $k$ » и нам необходимо осуществить преобразование Фурье этих данных в эквидистантно дискретизованное пространство « $n$ » (здесь  $k$  обозначает номер отсчёта в соответствующем пространстве и в общем случае не относится к волновому числу). Предполагается, что данные оцифрованы достаточно подробно для однозначного восстановления непрерывного сигнала. Такое преобразование, согласно [10], представляет собой умножение матрицы неэквидистантного преобразования Фурье на неэквидистантно дискретизованный вектор

*А. А. Моисеев, Г. В. Геликонов, П. А. Шильягин, В. М. Геликонов*

727

данных  $\tilde{\mathbf{g}}_k$ , в результате которого получается вектор  $\tilde{\mathbf{g}}_n$ , дискретизованный на эквидистантных отсчётах:

$$\tilde{\mathbf{g}}_n = \hat{\mathbf{M}}\tilde{\mathbf{g}}_k, \quad (1)$$

где элементы матрицы  $\hat{\mathbf{M}}_{nk} = \exp\{-i2\pi n[k + \Delta k(k)]/N\}$ . Здесь  $\Delta k(k)$  — разность между неэквидистантным  $(k + \Delta k(k))$  и эквидистантным  $(k)$  отсчётами (мы предполагаем, что  $\Delta k(k)$  — гладкая функция, что имеет место в ряде приложений, например в спектральной ОКТ),  $n, k = 1, \dots, N$ .

Равенство (1) не изменится при умножении его слева на единичную матрицу:

$$\tilde{\mathbf{g}}_n = \hat{\mathbf{M}}\tilde{\mathbf{g}}_k = \hat{\mathbf{I}}\hat{\mathbf{M}}\tilde{\mathbf{g}}_k = (\mathbf{FT} \mathbf{iFT}) \hat{\mathbf{M}}\tilde{\mathbf{g}}_k = \mathbf{FT} (\mathbf{iFT} \hat{\mathbf{M}}) \tilde{\mathbf{g}}_k = \mathbf{FT} \hat{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{g}}_k. \quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{FT}$  и  $\mathbf{iFT}$  — матрицы дискретного преобразования Фурье и обратного к нему соответственно. Очевидно, что умножение матрицы  $\hat{\mathbf{A}}$  на вектор  $\tilde{\mathbf{g}}_k$  осуществляет пересчёт значений  $\mathbf{g}_k$  на эквидистантные отсчёты. Нашей задачей является приближённое вычисление выражения (1), и за меру эффективности предложенных методов мы будем принимать совпадение кривых, полученных при вычислении по формуле (1) и при вычислении предложенными способами.

Рассмотрим свойства матрицы  $\hat{\mathbf{A}}$  (см. рис. 1а; светлые области соответствуют большим значениям). Можно заметить, что модуль некоторых её элементов много больше модуля остальных элементов. Основной идеей предлагаемых в работе методов является замена строк матрицы  $\hat{\mathbf{A}}$  на строки, все элементы которых равны нулю, за исключением  $m$  элементов с наибольшими значениями модуля. Таким образом, для умножения каждой строки матрицы  $\hat{\mathbf{A}}$  на вектор  $\mathbf{g}_k$  будет затрачиваться не  $N$ , а лишь  $m < N$  операций при исключении суммирования по нулевым значениям. Будем называть такое умножение вектора на матрицу с  $m$  ненулевыми элементами «неоднородной свёрткой», поскольку ядро такой свёртки меняется в зависимости от номера вычисляемого элемента.

Поскольку фаза элементов матрицы неэквидистантного преобразования Фурье  $\hat{\mathbf{M}}$  растёт линейно вдоль столбцов, элементы матрицы  $\hat{\mathbf{A}}$  могут быть вычислены аналитически:

$$\tilde{\mathbf{g}}_n = \mathbf{FT}(\hat{\mathbf{A}} \mathbf{g}_k) \approx \mathbf{FT} \left( \sum_{k_{\min}(n)}^{k_{\max}(n)} C_{nk} \tilde{\mathbf{g}}_k \right); \quad C_{nk} = \frac{\exp[i2\pi[k + \Delta k(k) - (N - n)] - 1]}{i2\pi[k + \Delta k(k) - (N - n)]/N}. \quad (3)$$

Здесь пределы  $k_{\min}$  и  $k_{\max}$  зависят от номера вычисляемого элемента, однако разность  $k_{\max} - k_{\min}$  всегда равна  $m$  — числу учитываемых элементов в строках матрицы  $\hat{\mathbf{A}}$  (т. е. в каждой строке сохранены лишь элементы, чей индекс  $k$  отличается не более чем на  $m/2$  от индекса элемента с максимальной амплитудой). Коэффициенты  $C_{nk}$  могут быть вычислены заранее для каждой зависимости  $\Delta k(k)$ . Несложно заметить, что когда  $\Delta k(k)$  является целым числом,  $C_{nk}$  является дельта-функцией. Ширина зависимости  $C_{nk}(n)$  растёт с ростом отличия  $\Delta k(k)$  от целого числа и достигает максимального значения при  $\Delta k(k) = n_0 + 1/2$ , где  $n_0$  — целое число. Заметим, что данная ширина не зависит от числа элементов вектора  $N$ . При этом, если  $\Delta k(k_i + 1) - \Delta k(k_i)$  не превышает четверти пиксела для любого  $k_i$ , как это имело место в наших модельных экспериментах, число учитываемых элементов  $m$  может быть выбрано не превышающим 9 для получения удовлетворительных результатов приближённых вычислений (при использовании методов, описанных в разделе 2). Этот эффект можно наблюдать на модельных данных, представленных на рис. 1. В столбцах, соответствующих значению  $\Delta k(k) = n_0 + 1/2$ , где  $n_0$  — целое число, количество значимых, существенно отличных от нуля элементов возрастает (на рисунке приведено значение элементов матрицы  $\hat{\mathbf{A}}$  в степени 0,4, чтобы отличие матрицы от диагональной было хорошо выделено на графическом изображении матрицы).

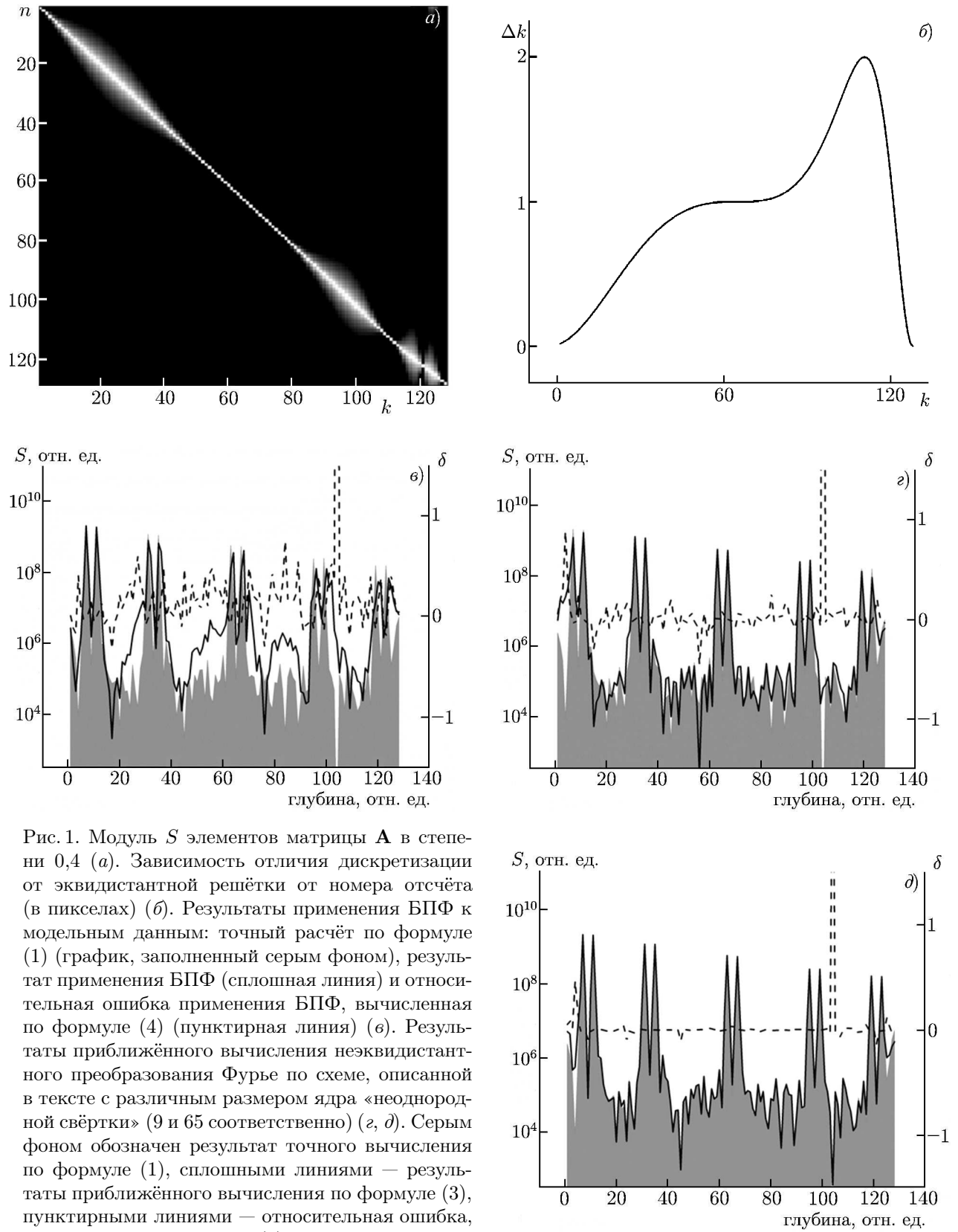


Рис. 1. Модуль  $S$  элементов матрицы  $A$  в степени 0,4 (а). Зависимость отклонения дискретизации от эквидистантной решётки от номера отсчёта (в пикселах) (б). Результаты применения БПФ к модельным данным: точный расчёт по формуле (1) (график, заполненный серым фоном), результат применения БПФ (сплошная линия) и относительная ошибка применения БПФ, вычисленная по формуле (4) (пунктирная линия) (в). Результаты приближённого вычисления неэквидистантного преобразования Фурье по схеме, описанной в тексте с различным размером ядра «неоднородной свёртки» (9 и 65 соответственно) (г, д). Серым фоном обозначен результат точного вычисления по формуле (1), сплошными линиями — результаты приближённого вычисления по формуле (3), пунктирными линиями — относительная ошибка, вычисленная по формуле (4)

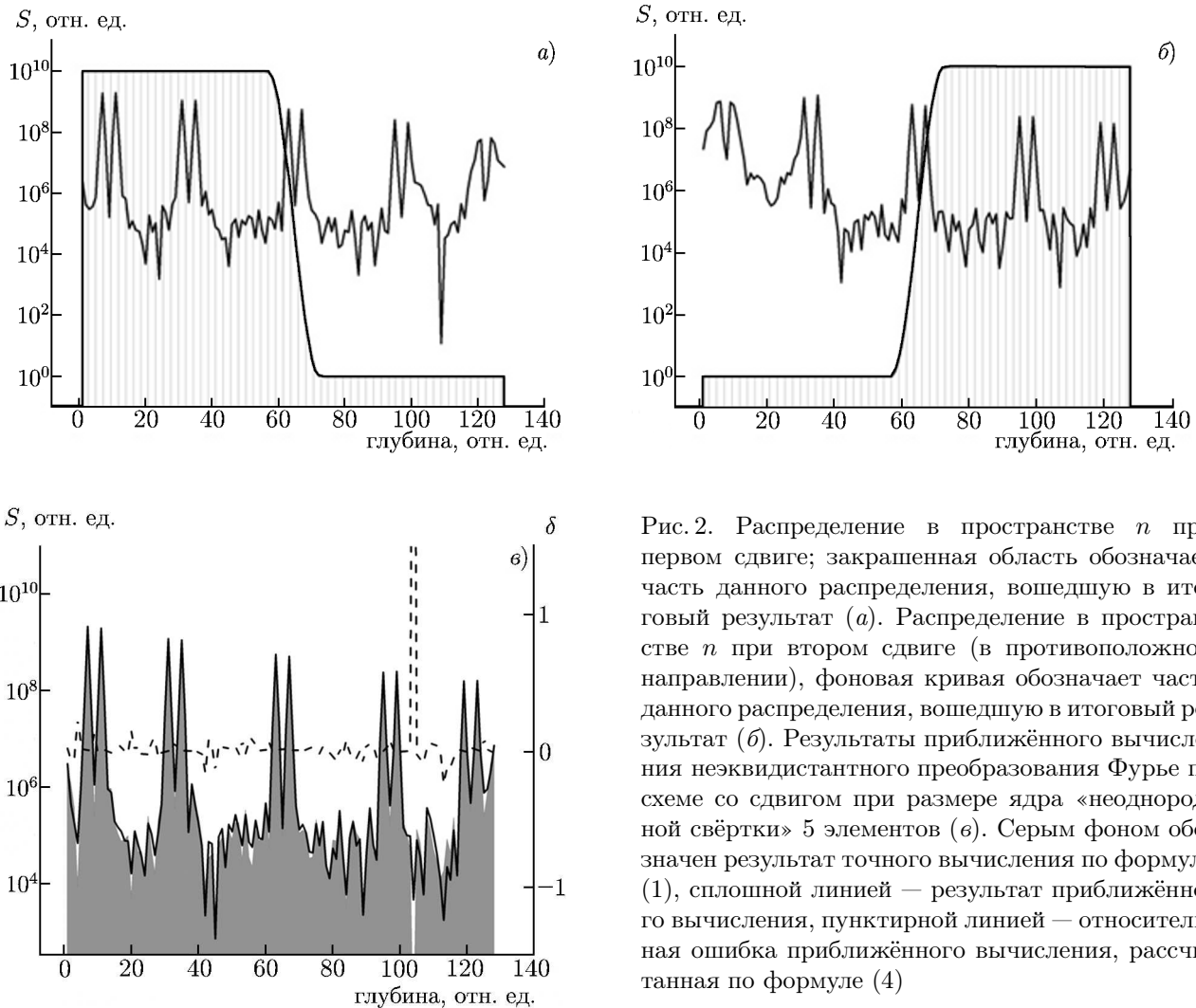


Рис. 2. Распределение в пространстве  $n$  при первом сдвиге; закрашенная область обозначает часть данного распределения, вошедшую в итоговый результат (а). Распределение в пространстве  $n$  при втором сдвиге (в противоположном направлении), фоновая кривая обозначает часть данного распределения, вошедшую в итоговый результат (б). Результаты приближённого вычисления неэквидистантного преобразования Фурье по схеме со сдвигом при размере ядра «неоднородной свёртки» 5 элементов (в). Серым фоном обозначен результат точного вычисления по формуле (1), сплошной линией — результат приближённого вычисления, пунктирной линией — относительная ошибка приближённого вычисления, рассчитанная по формуле (4)

Таким образом, приближённое вычисление неэквидистантного преобразования Фурье по данной схеме требует порядка  $O(mN) + O(N \log_2 N)$  операций. Как будет показано в дальнейшем, по крайней мере, для практически важного случая неэквидистантного преобразования Фурье в спектральной ОКТ достаточно взять  $m = 9$  для приближённого вычисления по предложенной в работе схеме. В результате для  $N = 512$  предложенный метод требует лишь в 2 раза больше операций, чем БПФ.

На рис. 1в–д представлены результаты применения БПФ к модельным данным, а также результаты приближённого вычисления неэквидистантного преобразования Фурье по предложенной схеме. Здесь и далее графики полученных распределений приводятся в логарифмической шкале по величине модуля, кроме того, на графиках приводится значение относительной ошибки (шкала справа):

$$\delta_n = \frac{\ln(g_n) - \ln(g'_n)}{\ln(g_n)}, \tag{4}$$

где  $g_n$  — результат точного вычисления по формуле (1),  $\tilde{g}'_n$  — результат приближённого вычисления.

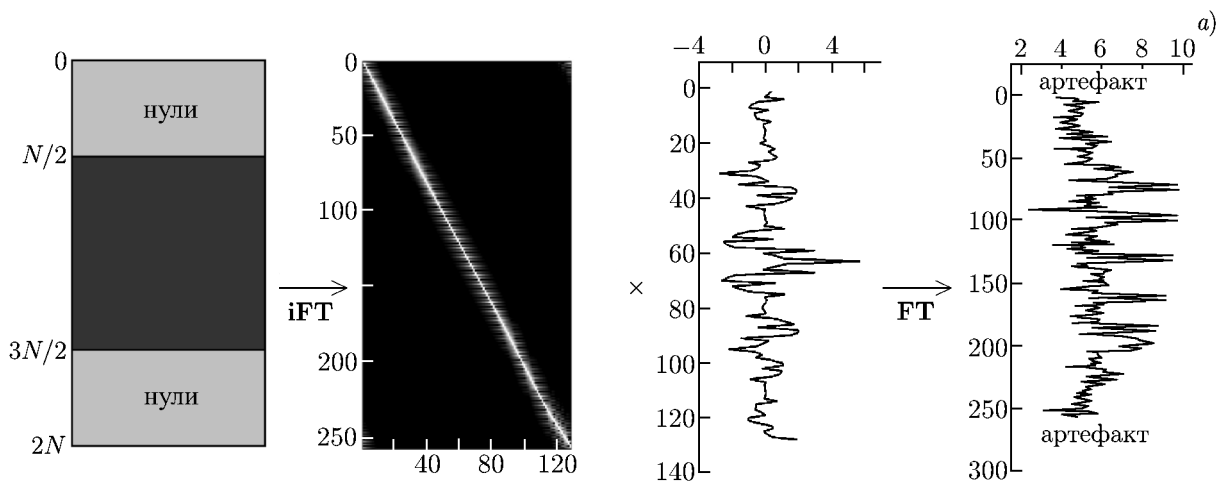
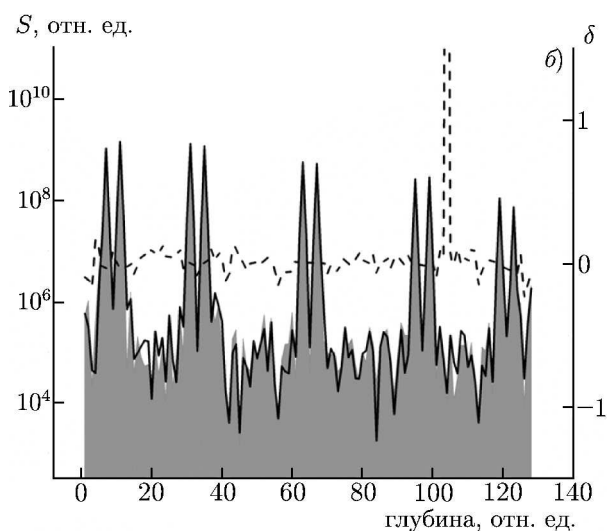


Рис. 3. Матрица неэквидистантного преобразования Фурье с добавленными нулями, результат преобразования Фурье такой матрицы (в каждом столбце оставлены лишь 9 элементов с наибольшей амплитудой), численно смоделированный спектр и результат преобразования Фурье произведения спектра и матрицы (соответствующие операции обозначены на рисунке, *a*). Результаты приближённого вычисления неэквидистантного преобразования Фурье по схеме с добавлением нулей (размер ядра «неоднородной свёртки» 5 элементов, *b*). Серым фоном обозначен результат точного вычисления по формуле (1), сплошной линией — результат приближённого вычисления, пунктирной линией — относительная ошибка (4)



Можно заметить, что малое число оставленных элементов  $m$  ведёт к некоторому отличию результатов точного и приближённого вычислений на низких частотах (на рисунках номера отсчётов спектра модельных данных  $n$  обозначены как «глубина» в силу особенностей спектральной ОКТ, для которой метод разрабатывался). В то же время, даже при малом значении  $m$  наблюдается хорошее совпадение приближённого и точного вычислений на высоких частотах (глубинах). Поскольку представление низких частот (глубин) ухудшается даже в сравнении с применением БПФ к начальным данным, в работе рассмотрен ряд способов преодоления данного недостатка вычислений по предложенной схеме. Отметим также, что наблюдаемый максимум в зависимости относительной ошибки соответствует минимуму модельного распределения, что не влияет на восприятие сигнала на фоне шума. Это же замечание можно сделать относительно последующих графиков как модельных (рис. 2, 3), так и экспериментальных (рис. 4) распределений.

## 2. СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ МЕТОДА

Наиболее очевидный способ преодоления упомянутого выше недостатка — это использование значений, соответствующих малым частотам (глубинам) из результатов применения БПФ к

неэквидистантно дискретизованным данным.

Другой возможный метод улучшения аппроксимации низких частот (глубин) — умножение исходных данных на дополнительный фазовый множитель, что с учётом теоремы о сдвиге при преобразовании Фурье сдвигает весь спектр вверх по частоте (фазовый множитель при этом должен рассчитываться в неэквидистантных отсчётах). При обработке наших данных хорошие результаты даёт использование величины смещения от  $N/8$  до  $N/4$  (два первых множителя в уравнении (5) соответствуют пересчёту на эквидистантные отсчёты исходных данных с дополнительной фазой, т. е. их спектр будет циклически сдвинут вверх по частоте относительно спектра исходных данных). Результат преобразования Фурье, соответствующий низким частотам (глубинам) отобразится в области более высоких частот (глубин) и не будет дополнительно размыт при приближённых вычислениях. Для того, чтобы данные частоты (глубины) отображались на своих местах, мы должны дополнительно сдвинуть реализацию вниз по частоте, умножая с обратным знаком на множитель с линейно изменяющейся фазой уже в пространстве эквидистантных отсчётов (данной операции отвечает последний множитель в приведённом ниже уравнении (5)). Таким образом, мы можем записать соответствующие коэффициенты для «неоднородной свёртки»  $C_{nk}$  как

$$C_{nk} = \frac{\exp\{i 2\pi [k + \Delta k(k) - (N - n)]\} - 1}{i 2\pi [k + \Delta k(k) - (N - n)]/N} \exp\left[\frac{i 2\pi L [k + \Delta k(k)]}{N}\right] \exp\left[-\frac{i 2\pi S n}{N}\right], \quad (5)$$

где  $L$  — величина смещения. Данные коэффициенты должны быть подставлены в первое из уравнений (3). Поскольку подобная операция приведёт к размытию высоких частот (частот, циклически сдвинутых в начало спектра (в район малых глубин)), для получения всего спектра мы должны выполнить аналогичную операцию с противоположным значением сдвига. Результирующее распределение может быть получено из двух промежуточных, полученных при разнонаправленных сдвигах. Результаты применения данного метода приближённого вычисления неэквидистантного преобразования Фурье модельных данных представлены на рис. 2. Можно заметить, что хорошая аппроксимация наблюдается уже при 5 элементах, оставленных в каждой строке матрицы  $\hat{\mathbf{A}}$ . Заметим также, что в практически важном случае спектральной ОКТ обратного сдвига можно не проводить и ограничиться лишь одним вычислением «неоднородной свёртки» и БПФ, поскольку большие глубины на изображениях ОКТ как правило представляют собой результат многократного рассеяния и не несут в себе информации.

Аппроксимацию на низких частотах (глубинах) можно также улучшить с помощью пространственного разделения артефактов, вызванных занулением части элементов матрицы  $\hat{\mathbf{A}}$ , и информативной части результата преобразования неэквидистантно дискретизованных данных. Это можно сделать, если искусственно ввести дополнительные низкие частоты, дополнив для этого столбцы матрицы  $\hat{\mathbf{M}}$   $N$  нулями, например, следующим образом:  $N/2$  нулей,  $N$  элементов матрицы  $\hat{\mathbf{M}}$ ,  $N/2$  нулей, — и затем применить обратное преобразование Фурье к данной матрице. Таким образом, получим следующие коэффициенты

$$C_{nk} = \frac{\sin\{\pi [N - n + 2(k + \Delta k(k) + N)]/2\}}{\sin\{\pi [N - n + 2(k + \Delta k(k) + N)]/(2N)\}} \exp[-i\pi (N - n + k + \Delta k)]. \quad (6)$$

Эти коэффициенты должны быть подставлены в первое из уравнений (3) (в этом случае  $n$  будет изменяться от 0 до  $2N$ ). Можно также расположить  $N$  нулей по-другому: например,  $N$  нулей вслед за  $N$  элементами матрицы  $\hat{\mathbf{M}}$ , — это приведёт лишь к соответствующим изменениям коэффициентов (6). Результат БПФ произведения заполненной нулями матрицы и вектора  $\mathbf{g}_k$  содержит в себе искомое распределение спектра (распределение по глубине) для индексов, соответствующих элементам матрицы  $\hat{\mathbf{M}}$  (от  $N/2$  до  $N/2 + N$  в нашем случае). Процесс вычислений и их результат представлен на рис. 3.

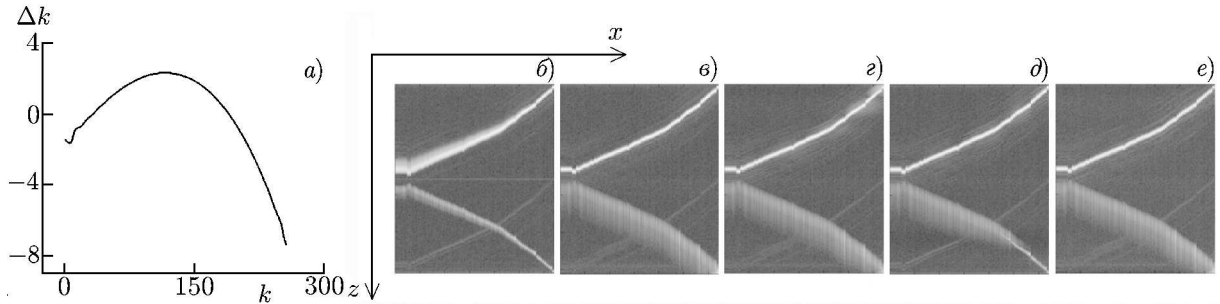


Рис. 4. Зависимость неэквидистантности спектрометра экспериментальной установки ОКТ от номера пиксела (а). Изображение поверхности, полученное с использованием установки спектральной ОКТ (б–е). Данные обрабатывались с помощью БПФ (б), точного неэквидистантного преобразования Фурье по формуле (1) (в), «неоднородной свёртки» с длиной ядра 9 элементов (з), «неоднородной свёртки со сдвигом» с длиной ядра 9 элементов (д), «неоднородной свёртки с добавлением нулей» с длиной ядра 9 элементов (е)

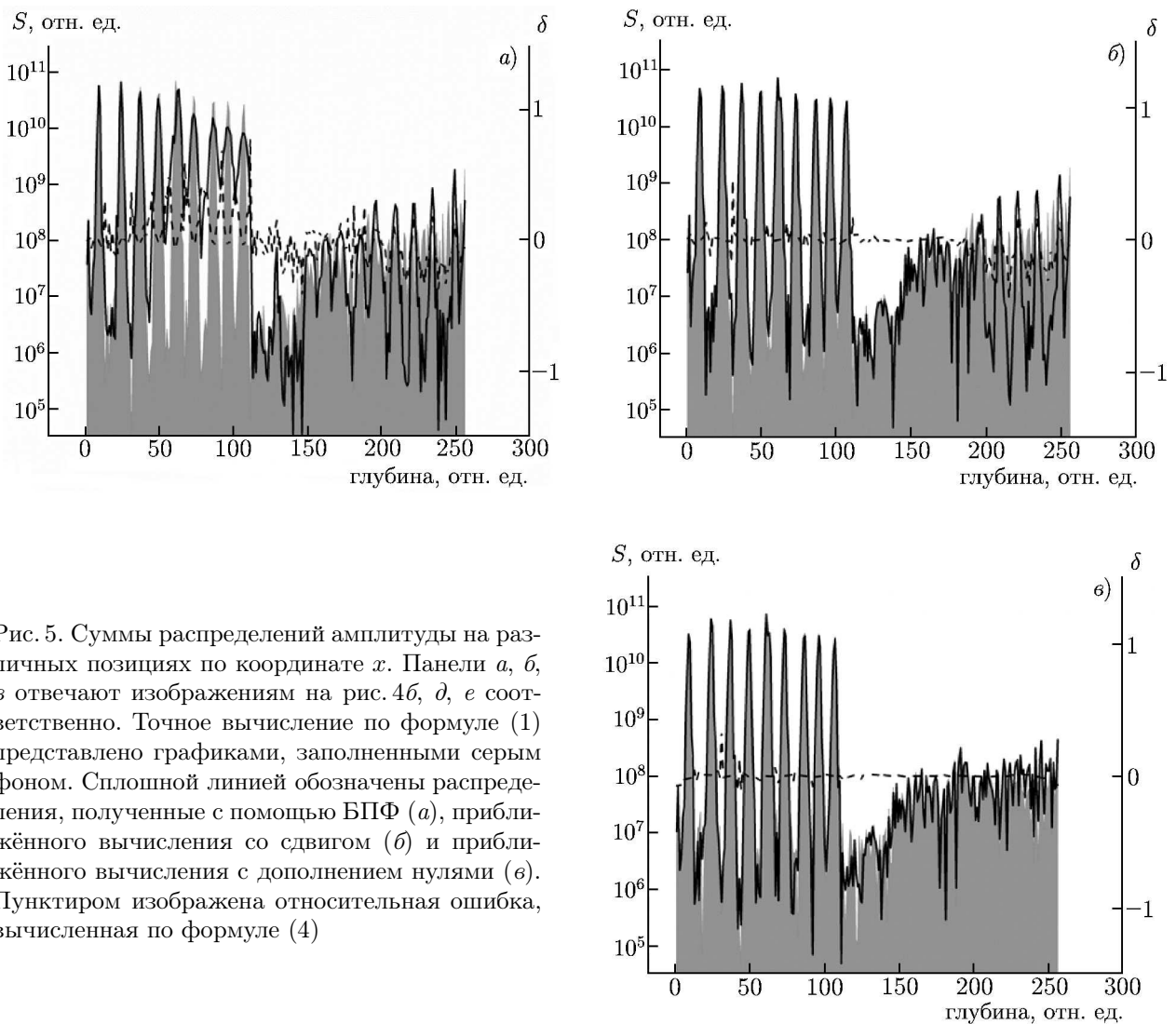


Рис. 5. Суммы распределений амплитуды на различных позициях по координате  $x$ . Панели а, б, в отвечают изображениям на рис. 4б, д, е соответственно. Точное вычисление по формуле (1) представлено графиками, заполненными серым фоном. Сплошной линией обозначены распределения, полученные с помощью БПФ (а), приближённого вычисления со сдвигом (б) и приближённого вычисления с дополнением нулями (в). Пунктиром изображена относительная ошибка, вычисленная по формуле (4)

Заметим, что использование данной техники позволяет получить хорошую аппроксимацию уравнения (1) с длиной ядра «неоднородной свёртки», равной 5.

### 3. ПРИБЛИЖЁННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ПО НЕЭКВИДИСТАНТНЫМ ОТСЧЁТАМ ПО ДАННЫМ СПЕКТРАЛЬНОЙ ОПТИЧЕСКОЙ КОГЕРЕНТНОЙ ТОМОГРАФИИ

Как уже упоминалось, одним из возможных приложений предлагаемого метода является спектральная оптическая когерентная томография. Сигнал в такой системе принимается эквидистантно по значениям длин волн  $\lambda$ , в то время как для получения распределения рассеивателей по глубине требуются данные, дискретизованные эквидистантно по значениям волнового числа  $k$ . Также упоминалось, что большие глубины на изображениях ОКТ как правило не несут в себе информации, а представляют собой результат многократного рассеяния. Кроме того, в части установок спектральной ОКТ используется лишь половина распределения по глубине, в то время как вторая половина представляет собой так называемый «зеркальный артефакт» [11]. Таким образом, для обработки данных спектральной ОКТ мы будем пользоваться «сдвиговой» тактикой без применения сдвига в обратную сторону и последующего синтеза итогового изображения из двух промежуточных. Результаты представлены на рис. 4, 5 (для наглядной демонстрации особенностей работы метода в нижней половине изображений рис. 4б–е оставлены не полностью подавленные «зеркальные» артефакты, связанные с не точным представлением сигнала в комплексной форме). Отметим, что использование «сдвиговой» техники без сдвига в обратную сторону приводит к тому, что часть зеркального артефакта на изображении выглядит более чёткой (рис. 4д).

Отметим ещё раз, что действие алгоритма не зависит от общего количества элементов  $N$  и зависит лишь от размера ядра «неоднородной свёртки»  $m$ . Таким образом, для массива с размером 512 элементов предлагаемый метод требует лишь в два раза больше вычислений, чем БПФ.

### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлен метод приближённого вычисления преобразования Фурье по неэквидистантным отсчётам. Данный метод требует порядка  $O[2(mN + N \log_2 N)]$  операций, где  $N$  — количество отсчётов,  $m$  — размер ядра «неоднородной свёртки». Было показано, что  $m$  может быть выбрано порядка  $5 \div 9$ , вне зависимости от величины  $N$ . При размере линейного массива данных в 512 элементов и  $m = 9$  число операций будет сокращено примерно в 14 раз, а для массива в 1024 — в 27 раз. В практически важном случае спектральной оптической когерентной томографии, когда изображение на больших глубинах неинформативно, число операций в предложенном методе вычисления преобразования Фурье по неэквидистантным отсчётам может быть дополнительно сокращено в два раза. Заметим, что число учитываемых элементов  $m$  зависит от функции  $\Delta k(k)$ , и должно быть предварительно оценено в каждом приложении.

Работа выполнена при поддержке гранта Правительства Российской Федерации (11.G34.31.0066), РФФИ (гранты 12–02–01160-а, 12–02–31166, 12–02–31754) и Совета по грантам Президента РФ по поддержке ведущих научных школ (грант НШ-5430.2012.2).



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fercher A. F., Hitzengerger C. K., Kamp G., El-Zaiat S. Y. // *Opt. Commun.* 1995. V. 117. P. 43.
2. Cooley J. W., Tukey J. W. // *Math. Comput.* 1965. V. 19. P. 297.
3. Fercher A. F., Bartelt H., Becker H., Wiltschko E. // *Appl. Optics.* 1979. V. 18, No. 14. P. 2427.
4. Vergnole S., Lévesque D., Lamouche G. // *Opt. Express.* 2010. V. 18, No. 10. P. 10446.
5. Cense B., Nassif N. A., Chen T. C., et al. // *Opt. Express.* 2004. V. 12, No. 11. P. 2435.
6. Leitgeb R. A., Drexler W., Unterhuber A., et al. // *Opt. Express.* 2004. V. 12, No. 10. P. 2156.
7. Jackson J. I., Meyer C. H., Nishimura D. G., Macovski A. // *IEEE Trans. Medical Imaging.* 1991. V. 10, No. 3. P. 473.
8. Hillmann D., Huttmann G., Koch P. // *SPIE.* 2009. V. 7372. *Opt. Coherence Tomography and Coherence Techniques IV.* Art. no. 73720R-6.
9. Lomb N. R. // *Astrophys. Space Sci.* 1976. V. 39, No. 2. P. 447.
10. Bagchi S., Mitra S. K. // *IEEE Trans. Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing.* 1996. V. 43, No. 6. P. 422.
11. Leitgeb R. A., Wojtkowski M. // *Opt. Coherence Tomography* / Ed. by W. Drexler, J. Fujimoto. Berlin: Springer, 2008. P. 177.

Поступила в редакцию 2 ноября 2012 г.; принята в печать 27 ноября 2012 г.

**COMPUTATIONALLY EFFICIENT FOURIER TRANSFORM  
OF NON-EQUIDISTANT SAMPLED DATA**

*A. A. Moiseev, G. V. Gelikonov, P. A. Shilyagin, and V. M. Gelikonov*

We present an approximate method of performing the Fourier transform of the data sampled in non-equidistant readings. It is shown that the data can be recalculated as equidistant samples by using the “inhomogeneous convolution”, i.e., a convolution of a certain function whose form depends on the calculated element and the character of non-equidistance. Thus, this recalculation does not require calculation of the quantities of the initial data in intermediate samples (unlike the linear approximation, spline, or other recalculations). Since the size of the kernel of this “inhomogeneous convolution” is about 9, the method proposed here can serve as the basis for an efficient computational algorithm. Applicability of the proposed approach to spectral optical coherent tomography is demonstrated.