

УДК 535.36

РАСПРОСТРАНЕНИЕ КОЛЛИМИРОВАННОГО ПУЧКА В РАССЕЙВАЮЩЕЙ СРЕДЕ С РЕФРАКЦИЕЙ

Я. А. Илюшин

Московский госуниверситет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия

Рассмотрена задача о распространении излучения точечного мононаправленного источника в рассеивающей среде с пространственно-неоднородным коэффициентом преломления. Предложена схема численного решения уравнения переноса излучения с выделением особенностей прямого и обратного потоков излучения. Показана возможность аналитического решения задачи в малоугловом приближении, в рамках которого также проведены численные расчёты углового распределения интенсивности с учётом дисперсии длин путей распространения рассеянного излучения.

ВВЕДЕНИЕ

Сосредоточенный коллимированный точечный мононаправленный источник излучения является основным элементарным источником в теории переноса излучения, в которой любая конфигурация источников излучения может быть представлена в виде некоторой линейной суперпозиции таких элементарных источников. Решения уравнения переноса излучения вместе с граничными условиями для такого источника фактически являются функциями Грина соответствующих задач, через которые могут быть выражены их общие решения. С появлением лазеров и других сосредоточенных источников сильно коллимированного излучения задача о вычислении электромагнитного поля, создаваемого точечным мононаправленным источником в рассеивающей среде, приобрела также и важное практическое значение.

Расчёт поля, создаваемого таким источником, является и наиболее сложным в вычислительном отношении по сравнению с нахождением полей, создаваемых другими типами источников. Поле точечного мононаправленного источника обладает наиболее сложной пространственной и угловой структурой интенсивности по сравнению с полями других основных типов источников [1]. При этом особенности структуры имеют место практически при любой индикатрисе рассеяния частиц среды, в том числе, когда она близка к изотропной. В случае сильно вытянутой вперёд индикатрисы рассеяния усиливается роль анизотропной части поля, т. е. излучения, рассеянного на малые углы.

По этой причине в практической численной схеме решения задачи о распространении излучения в среде должны быть приняты какие-то меры для регуляризации особенностей и анизотропии решения, в том числе проведено выделение нерегулярных частей решения в отдельные слагаемые, а также аподизация (свёртка решения с ограниченной функцией, моделирующей характеристику наблюдательного прибора). Так, в работе [2] поле точечного мононаправленного источника в среде вычислялось в виде суммы нерассеянного излучения и излучения, претерпевшего малоугловое рассеяние вперёд, рассматриваемого в диффузионном малоугловом приближении. В работе [3] поле было найдено в виде суммы направленной и диффузной компонент, вычисленных в малоугловом диффузионном и диффузионном приближениях соответственно.

Однако впоследствии была установлена симметрия структуры особенностей углового и пространственного распределений интенсивности излучения от точечного мононаправленного источника в среде, имеющая место как для однократно рассеянного излучения [4, 5], так и для излучения, претерпевшего рассеяние произвольной кратности [6]. Тем самым в численной схеме

с выделением особенностей обратный поток излучения должен быть также выделен в виде отдельной компоненты, основной вклад в которую определяется в приближении квазиоднократного обратного рассеяния.

Соответствующие схемы решения были предложены и реализованы для нахождения поля от точечного мононаправленного источника в двумерной [7] и трёхмерной [8] рассеивающих средах и для расчёта когерентного усиления обратного рассеяния [9].

При этом наиболее развитыми в теории переноса излучения являются методы решения задач о распространении излучения в рассеивающих средах при отсутствии пространственных градиентов коэффициента преломления. В настоящее время рассеивающие среды с рефракцией наиболее исследованы применительно к задачам лучистого переноса тепла [10, 11]. Известны результаты по решению уравнения переноса излучения для широких направленных источников излучения в средах с рефракцией [12], а также уравнений марковского приближения в таких средах [13]. Работы по исследованию распространения узких направленных пучков излучения в рассеивающих средах с рефракцией немногочисленны.

В то же время исследование сред с рефракцией также представляет значительный интерес. Сочетание рассеяния на случайных неоднородностях и регулярного пространственного градиента коэффициента преломления имеет место, например, в ионосферной [15] и солнечной [16] плазме, для диагностики которых используется направленное излучение с различными длинами волн. Так, в настоящее время созданы и эксплуатируются источники мощного радиоизлучения, оснащённые высоконаправленными антенными системами. Многие из них расположены вблизи зоны аврорального овала, где во время мощных солнечных событий наблюдаются весьма высокие уровни случайных флуктуаций концентрации плазмы, обуславливающие интенсивное рассеяние излучения. При этом некоторые из них работают на достаточно низких частотах, в том числе на частотах ниже критической частоты ионосферы. При анализе распространения радиоволн в этом случае учёт рефракции, безусловно, необходим. Кроме того, как было впервые замечено около двадцати лет назад [17], при однопозиционной радиолокации диффузных целей существенен эффект когерентного усиления обратного рассеяния, расчёт которого может быть сведён к задаче о нахождении поля точечного мононаправленного источника в среде. При наличии в зондируемой среде (например в ледяных и снежных покровах Земли и небесных тел [18, 19]) регулярных градиентов коэффициента преломления их учёт также может оказаться необходимым.

По указанным причинам представляет интерес решение задачи о распространении узких пучков излучения в среде с рассеянием и рефракцией. Решение указанной задачи и оценка степени влияния регулярного градиента коэффициента преломления и является целью данной работы.

В настоящей работе проведено численное моделирование распространения узконаправленного пучка излучения в рассеивающей среде с рефракцией. Сформулирована численная схема решения с выделением особенностей излучения в прямом и обратном направлениях. Получено численное решение уравнения переноса излучения в малоугловом приближении.

1. ТЕОРИЯ

Предлагаемое исследование по сути является обобщением подхода, развитого в работах [7–9] на случай сред с градиентом коэффициента преломления. Значительная часть полученных там расчётных формул использована здесь без изменения и поэтому в настоящей работе не приводится. Детальное описание общего подхода и необходимые формулы можно найти в указанных работах.

Скалярное уравнение переноса излучения для одномерно страфицированной плоскострой

среды с рефракцией записывается в виде [11]:

$$(\mathbf{\Omega} \nabla) L + \gamma(1 - \mu_z^2) \frac{dL}{d\mu_z} = -\varepsilon L + 2\mu_z \gamma L + \frac{\Lambda \varepsilon}{4\pi} \oint L(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}') x(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}') d\mathbf{\Omega}' + f(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}), \quad (1)$$

где $\mathbf{\Omega} = (\mu_x, \mu_y, \mu_z)$ — единичный вектор вдоль направления радиус-вектора $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $x(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}')$ — индикатриса рассеяния, $L(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$ — угловое распределение интенсивности, Λ — альбедо однократного рассеяния, ε — объёмный коэффициент ослабления в среде, n — коэффициент преломления среды, $\gamma = d(\ln n)/dz$ — логарифмическая производная коэффициента преломления среды. В этой работе, следуя [14], ограничимся рассмотрением сред с $\gamma = \text{const}$ как наиболее простого случая, позволяющего выявить основные эффекты, связанные с регулярным градиентом коэффициента преломления в среде. Коэффициент ослабления излучения в среде ε без ограничения общности положим равным единице.

Поле в среде будем искать в виде

$$L = L_0 + L_1 + L_2 + L_D, \quad (2)$$

где L_0 — нерассеянное поле от источника излучения, L_1 — поток излучения, рассеянного на малые углы вперёд, L_2 — обратный поток излучения, рассеянного на малые углы после однократного обратного рассеяния, L_D — неизвестная часть поля, не учтённая в приближении квазиоднократного обратного рассеяния.

Следуя работам [7–9], получим пару связанных уравнений для прямого и обратного потоков излучения с учётом дисперсии длин путей излучения в каждом потоке:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} L_1 + \mu_z^- \mu_x \frac{\partial}{\partial x} L_1 + \mu_z^- \mu_y \frac{\partial}{\partial y} L_1 = & +2\gamma L_1 - \gamma \mu_z^- (1 - \mu_z^2) \frac{dL_1}{d\mu_z} - \\ & - \mu_z^- L_1 + \mu_z^- M_1(\mathbf{\Omega}) \frac{\Lambda}{4\pi} \oint L_1(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}') x(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}') d\mathbf{\Omega}' + \mu_z^- M_1(\mathbf{\Omega}) f(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} L_2 + \mu_z^+ \mu_x \frac{\partial}{\partial x} L_2 + \mu_z^+ \mu_y \frac{\partial}{\partial y} L_2 = & +2\gamma L_2 - \gamma \mu_z^+ (1 - \mu_z^2) \frac{dL_2}{d\mu_z} - \\ & - \mu_z^+ L_2 + \mu_z^+ M_2(\mathbf{\Omega}) \frac{\Lambda}{4\pi} \oint [L_1(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}') + L_2(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}')] x(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}') d\mathbf{\Omega}' + \mu_z^+ M_2(\mathbf{\Omega}) f(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (4)$$

где μ_z^+ и μ_z^- — введённые в [8] тейлоровские разложения величины μ_z^{-1} по μ_z вблизи полюсов $\mu_z = +1$ и $\mu_z = -1$ соответствующих полюсов:

$$\mu_z^- \equiv 1 + (1 - \mu_z) + (1 - \mu_z)^2 + \dots + (1 - \mu_z)^n + o[(1 - \mu_z)^n] \approx \frac{1}{\mu_z} \Big|_{\mu_z \rightarrow +1}, \quad (5)$$

$$\mu_z^+ \equiv -1 - (1 + \mu_z) - (1 + \mu_z)^2 - \dots - (1 + \mu_z)^n + o[(1 - \mu_z)^n] \approx \frac{1}{\mu_z} \Big|_{\mu_z \rightarrow -1}, \quad (6)$$

$M_1(\mathbf{\Omega}) + M_2(\mathbf{\Omega}) \equiv 1$ — разбиение единицы на сфере [20] такое, что $M_1(\mu_z \rightarrow 1) \rightarrow 1$, $M_2(\mu_z \rightarrow 1) \rightarrow 0$ и $M_1(\mu_z \rightarrow -1) \rightarrow 0$, $M_2(\mu_z \rightarrow -1) \rightarrow 1$.

Решение уравнений (3) и (4) с соответствующими граничными условиями и является решением задачи о поле от точечного мононаправленного источника в однородной среде в приближении квазиоднократного обратного рассеяния. Подставляя искомое решение задачи (2) в уравнение

переноса излучения (1), для не учитываемой в этом приближении гладкой части решения L_D получим неоднородное уравнение вида (1) с функцией источников в правой части

$$\begin{aligned} f_D = & (\mu_z \mu_z^- - 1) \left(\mu_x \frac{\partial}{\partial x} L_1 + \mu_y \frac{\partial}{\partial y} L_1 + L_1 \right) + (\mu_z \mu_z^+ - 1) \left(\mu_x \frac{\partial}{\partial x} L_2 + \mu_y \frac{\partial}{\partial y} L_2 + L_2 \right) + \\ & + [1 - \mu_z \mu_z^- M_1(\Omega) - \mu_z \mu_z^+ M_2(\Omega)] \frac{\Lambda}{4\pi} \oint L_1(\mathbf{r}, \Omega') x(\Omega, \Omega') d\Omega' - \\ & - \gamma (1 - \mu_z \mu_z^-) (1 - \mu_z^2) \frac{dL_1}{d\mu_z} - \gamma (1 - \mu_z \mu_z^+) (1 - \mu_z^2) \frac{dL_2}{d\mu_z} + \\ & + [1 - \mu_z \mu_z^+ M_2(\Omega)] \frac{\Lambda}{4\pi} \oint L_2(\mathbf{r}, \Omega') x(\Omega, \Omega') d\Omega' + [1 - \mu_z \mu_z^- M_1(\Omega) - \mu_z \mu_z^+ M_2(\Omega)] f. \quad (7) \end{aligned}$$

Можно видеть, что вблизи направлений наибольшей анизотропии $\mu_z = 1$ и $\mu_z = -1$ функция источников f_D эффективно подавлена стремящимися к нулю множителями типа $(1 - \mu_z \mu_z^\pm) \propto (\mu_z \mp 1)^{(n+1)}$. По этой причине L_D является достаточно гладкой функцией направления Ω и может быть найдена известными численными методами без больших сложностей, связанных с анизотропией и другими особенностями решения.

В части практического моделирования ограничимся вычислением поля от точечного мононаправленного источника в среде с рефракцией в малоугловом приближении с учётом дисперсии длин путей распространения рассеянного излучения, т. е. решением уравнения (3). Будем искать это решение в виде суммы нерассеянного излучения L_0 и рассеянного почти вперёд потока излучения L_1 .

Рассмотрим нормальное падение излучения от точечного мононаправленного источника на границу полубесконечной мутной среды с рефракцией, занимающей полупространство $z > 0$.

Нерассеянный поток излучения L_0 известен, так что L_1 удовлетворяет уравнению (3) с нулевым краевым условием на границе среды: $L_1(0) = 0$. Будем считать пучок бесконечно тонким, т. е. положим

$$L_0 = \delta(x)\delta(y)\delta(\Omega) \exp\left(\int \varepsilon dz\right), \quad (8)$$

тогда в уравнении (3) функция источника

$$f(\mathbf{r}, \Omega) = \frac{\Lambda}{4\pi} \oint L_0(\mathbf{r}, \Omega') x(\Omega, \Omega') d\Omega' = \delta(x)\delta(y) \frac{\Lambda}{4\pi} x(\Omega) \exp\left(-\int \varepsilon dz\right). \quad (9)$$

Поле излучения представим в виде разложения по сферическим гармоникам на сфере направлений и интеграла Фурье по пространственным переменным:

$$L(x, y, z, \Omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \tilde{c}_{nm}(k_x, k_y, z) Y_n^m(\theta, \phi) \exp(ik_x x + ik_y y) dk_x dk_y. \quad (10)$$

Индикатриса рассеяния также разлагается в ряд по сферическим гармоникам:

$$x(\Omega, \Omega') = 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n x_n Y_n^m(\Omega) Y_n^{m*}(\Omega'). \quad (11)$$

Неизвестные коэффициенты разложения (10) удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{C}_1 + \hat{\mu}_z^- \hat{\mu}_x i k_x \mathbf{C}_1 + \hat{\mu}_z^- \hat{\mu}_y i k_y \mathbf{C}_1 = -\hat{\mu}_z^- \mathbf{C}_1 + 2\gamma \mathbf{C}_1 - \gamma \mu_z^- \hat{\partial}_\mu \mathbf{C}_1 + \hat{\mu}_z^- \Lambda \hat{x} \mathbf{C}_1 + \hat{\mu}_z^- \Lambda \hat{y} \mathbf{C}_1, \quad (12)$$

где \mathbf{C}_1, \mathbf{f} — вектор-столбцы коэффициентов разложений (10) для L_1, f соответственно, $\hat{\mu}_x, \hat{\mu}_y, \hat{\mu}_z$ — матрицы операторов умножения на μ_x, μ_y, μ_z . Матрица $\hat{\partial}_\mu$ соответствует оператору $(1 - \mu_z^2) d/d\mu_z$. С помощью известных рекуррентных соотношений для присоединённых функций Лежандра можно вывести соотношение для сферических гармоник

$$(1 - \mu)^2 \frac{d}{d\mu} Y_j^m(\mu, \phi) = (1 + j) \sqrt{\frac{(j - m)(j + m)}{(2j - 1)(2j + 1)}} Y_{j-1}^m(\mu, \phi) - j \sqrt{\frac{(1 + j - m)(1 + j + m)}{(2j + 1)(2j + 3)}} Y_{j+1}^m(\mu, \phi), \quad (13)$$

из которого получаются явные выражения для элементов матрицы $\hat{\partial}_\mu$. Явные выражения для элементов матриц $\hat{\mu}_x, \hat{\mu}_y, \hat{\mu}_z$ можно найти в [22]. Матрицы $\hat{\mu}_z^+$ и $\hat{\mu}_z^-$ — матричные полиномы от $\hat{\mu}_z$, определяемые формулами (5) и (6). Если ограничиться расчётом малоугловой компоненты рассеянного вперёд излучения, разбиение единицы не требуется.

Практические приближённые вычисления функций с особенностями, как правило, применяют аподизацию численного решения [21]. В настоящей работе применена та же техника аподизации, что и в [8].

Примеры численных результатов проиллюстрированы на рис. 1. Уравнение (3) в матричном представлении (12) с учётом дисперсии в первом порядке по μ_z ($\hat{\mu}_z^- = 2 - \hat{\mu}$) решалось с помощью конечно-разностной схемы.

В численных расчётах использовалась индикатриса рассеяния Хеньи—Гринштейна [23] с параметром анизотропии $g = 0,94$, альбедо однократного рассеяния Λ принято равным единице.

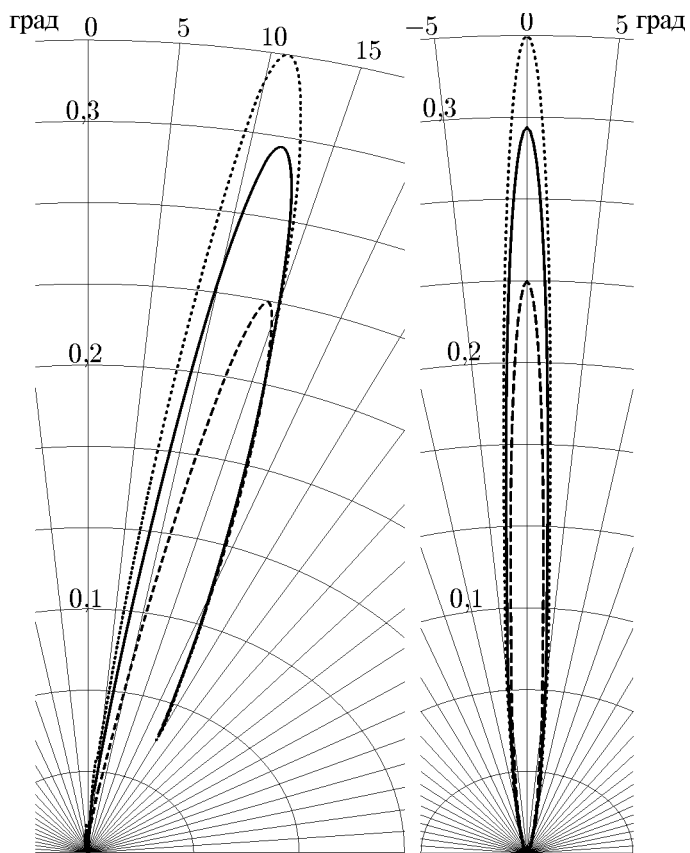


Рис. 1. Угловые распределения интенсивности в среде в отн. ед. Оптическая толщина среды $z = 5$, расстояние до оси пучка $R = 0,8, g = 0,94, \Lambda = 1$, индикатриса рассеяния соответствует модели Хеньи—Гринштейна [23]. Слева изображено меридиональное сечение, справа — поперечное сечение, проходящее через направление максимальной интенсивности. Сплошная линия отвечает отсутствию рефракции ($\gamma = 0$), пунктирная линия — $\gamma = 0,05$, штриховая линия — $\gamma = -0,1$

Вычисления проводились в приближении P_{99} [24] метода сферических гармоник. Таким образом, учитывалось $(99 + 1)^2 = 10\,000$ членов в разложениях типа (10).

2. ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОДЫ

В данной работе реализована эффективная вычислительная модель для расчётов распространения излучения точечного мононаправленного источника в рассеивающей среде с плавным пространственным изменением коэффициента преломления. Проведено численное моделирование для среды с высоким значением параметра анизотропии рассеяния $g = 0,94$. Известные асимптотические решения уравнения переноса излучения обобщены на случай сред с рефракцией.

Автор благодарит администрацию НИВЦ МГУ им. М. В. Ломоносова за предоставленный доступ к вычислительным ресурсам высокопроизводительных параллельных суперкомпьютерных комплексов СКИФ-ГРИД «Чебышев» и «Ломоносов» [25]. Автор признателен анонимному рецензенту за конструктивные замечания и рекомендации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гермогенова Т. А. Локальные свойства решений уравнения переноса. М.: Наука, 1986.
2. Долин Л. С. // Изв. вузов. Радиофизика. 1966. Т. 9, № 1. С. 61.
3. Долин Л. С., Сергеева Е. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 2001. Т. 44, № 11. С. 931.
4. Siewert C. E. // J. Quant. Spec. Rad. Trans. 1985. V. 33. P. 551.
5. Sanchez R. // Ann. Nucl. Energy. 2000. V. 27. P. 1167.
6. Pyushin Ya. A. // J. Opt. Soc. Amer. A. 2012. V. 29, No. 9. P. 1986.
7. Pyushin Y. A., Budak V. P. // J. Opt. Soc. Amer. A. 2011. V. 28, No. 2. P. 76.
8. Pyushin Y. A., Budak V. P. // J. Opt. Soc. Amer. A. 2011. V. 28. P. 1358.
9. Pyushin Y. A. // J. Quant. Spec. Rad. Trans. 2012. V. 113, No. 5. P. 348.
10. Krishna N. A., Mishra S. C. // J. Quant. Spec. Rad. Trans. 2006. V. 102, No. 3. P. 432.
11. Lemonnier D., Dez V. L. // J. Quant. Spec. Rad. Trans. 2002. V. 73. P. 195.
12. Дашей Р., Захариасен Ф., Манк У., Уотсон К. Распространение звука во флуктуирующем океане. М.: Мир, 1982.
13. Bitjukov A. A., Gherm V. E., Zernov N. N. // Radio Science. 2002. V. 37, No. 4. P. 19.
14. Pyushin Y. A. // J. Quant. Spec. Rad. Trans. 2013. V. 117. P. 133.
15. Pyushin Y. A. // Planet. Space Sci. 2009. V. 57, No. 12. P. 1458.
16. Afanasiev A. // J. Atmos. Solar-Terr. Phys. 2005. V. 67, No. 11. P. 1002.
17. Napke B. // Icarus. 1990. V. 88, No. 2. P. 407.
18. Arthern R., Winebrenner D., Waddington E. // Icarus. 2000. V. 144, No. 2. P. 367.
19. Pyushin Y. A. // Planet. Space Sci. 2004. V. 52. P. 1195.
20. Федорюк М. В. Асимптотика. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987. 544 с.
21. Браво-Животовский Д. М., Долин Л. С., Лучинин А. Г., Савельев В. А. // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1969. Т. 5, № 2. С. 160.
22. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972. 418 с.
23. Penney L. G., Greenstein J. L. // Astrophys. J. 1941. V. 93. P. 70.
24. Arridge S. R. // Inverse Problems. 1999. V. 15. P. R41.
25. Воеводин Вл. В., Жуматий С. А., Соболев С. И. и др. // Открытые системы. М.: Изд. дом «Открытые системы», 2012. С. 7.

Поступила в редакцию 25 октября 2012 г.; принята в печать 27 ноября 2012 г.

PROPAGATION OF A COLLIMATED BEAM IN THE REFRACTIVE SCATTERING MEDIUM

Ya. A. Pyushin

The problem of propagation of radiation from a point unidirectional source in a scattering medium with spatially inhomogeneous refractive factor is considered. The scheme for numerical solving of the radiation-transfer equation with isolation of the singularities of forward and backward fluxes is proposed. The possibility of analytical solution of the problem in the small-angle approximation within the framework of which the numerical calculations of the angular distribution of intensity with allowance for the variances of the scattered-radiation propagation path lengths are also performed is demonstrated.