

УДК 621.391.1

## ОБНАРУЖЕНИЕ СВЕРХШИРОКОПОЛОСНОГО КВАЗИРАДИОСИГНАЛА С НЕИЗВЕСТНЫМ ВРЕМЕНЕМ ПРИХОДА НА ФОНЕ БЕЛОГО ШУМА

*А. П. Трифонов, П. Е. Руднев*

Воронежский госуниверситет, г. Воронеж, Россия

Выполнены синтез и анализ максимально правдоподобного обнаружителя сверхширокополосного квазирадиосигнала, длительность которого может составлять несколько периодов или даже долю периода гармонического колебания с неизвестными амплитудой, фазой и временем прихода. Найдены характеристики классического квадратурного обнаружителя при приёме сверхширокополосного квазирадиосигнала. Приведены результаты статистического моделирования алгоритмов обнаружения.

### ВВЕДЕНИЕ

Задача оптимального приёма узкополосного радиосигнала с неизвестными амплитудой, фазой и временем прихода на фоне белого шума достаточно подробно изучена и её уже можно назвать классической для статистической радиофизики [1, 2]. Под узкополосными понимаются сигналы, относительная полоса частот которых, т. е. отношение полосы частот к центральной частоте их спектров, много меньше единицы. С этой точки зрения, так называемые широкополосные сигналы (радиосигналы с большой базой) также являются узкополосными. Узкополосные (квазигармонические) радиосигналы долгое время являлись одним из основных объектов исследования в радиофизике [1–3].

В последние годы всё больший интерес и применение в радиофизике и её приложениях находят так называемые сверхширокополосные сигналы (сигналы без несущей) [4–8]. У этих сигналов относительная полоса частот может быть порядка единицы и более. При таких значениях относительной полосы частот обычные определения огибающей и фазы теряют ясный физический смысл, что может привести к нецелесообразности их использования. Поэтому известные результаты по обнаружению радиосигналов с неизвестными амплитудой и фазой, существенно использующие их узкополосность, не могут быть применены к сверхширокополосным сигналам. Среди множества сверхширокополосных сигналов [4–6, 8] выделим в отдельный класс сверхширокополосные сигналы [7], структура которых подобна структуре узкополосных радиосигналов. Назовём их сверхширокополосными квазирадиосигналами. В [7] исследовано обнаружение сверхширокополосного квазирадиосигнала с неизвестными амплитудой и фазой. Рассмотрим здесь обнаружение сверхширокополосного квазирадиосигнала, у которого кроме амплитуды и фазы, как это часто имеет место во многих приложениях [2, 3, 9], априори неизвестно время прихода.

Как известно [1, 2], узкополосный радиосигнал (без фазовой модуляции) можно записать в виде

$$s(t, a_0, \varphi_0) = a_0 f(t) \cos(\omega_0 t - \varphi_0). \quad (1)$$

Если полоса частот  $\Delta\omega$  и частота  $\omega_0$  сигнала  $s(t, a_0, \varphi_0)$  удовлетворяют условию

$$\Delta\omega \ll \omega_0, \quad (2)$$

то сигнал (1) является узкополосным радиосигналом. Тогда  $a_0$ ,  $\omega_0$ ,  $\varphi_0$  — амплитуда, частота и начальная фаза, а  $f(t)$  — нормированная ( $\max[f(t)] = 1$ ) огибающая узкополосного радиосигнала (1). Отметим, что при выполнении (2),  $a_0$ ,  $\omega_0$ ,  $\varphi_0$  и  $f(t)$  могут быть найдены по заданному уз-

кополосному радиосигналу  $s(t, a_0, \varphi_0)$  [1, 2]. Очевидно, что сигнал вида (1) можно получить с помощью простейшей блок-схемы, показанной на рис. 1. Здесь 1 — генератор гармонического колебания

$$a_0 \cos(\omega_0 t - \varphi_0), \quad (3)$$

2 — генератор функции  $f(t)$ , 3 — перемножитель.

Выбором модулирующей функции  $f(t)$  можно обеспечить полосу частот  $\Delta\omega$  сигнала (1), близкую к частоте  $\omega_0$ . В этом случае формула (1) описывает сверхширокополосный квазирадисигнал. Соответственно,  $a_0, \omega_0, \varphi_0$  являются параметрами гармонического колебания (3), используемого для формирования сверхширокополосного квазирадисигнала (1). Эти параметры можно определить по сверхширокополосному квазирадисигналу  $s(t, a_0, \varphi_0)$ , только если модулирующая функция  $f(t)$  априори известна, что предполагается в дальнейшем. Таким образом, изменение модулирующей функции  $f(t)$  позволяет описать формулой (1) как сверхширокополосные квазирадисигналы с большой относительной полосой частот, так и узкополосные радиосигналы, для которых выполняется (2). В частности, при малой длительности модулирующей функции получаем сверхширокополосный квазирадисигнал, у которого на интервале, равном длительности сигнала, размещается лишь несколько периодов или даже доля периода гармонического колебания (3).

В данной работе синтезирован максимально правдоподобный обнаружитель сверхширокополосного квазирадисигнала с неизвестными амплитудой, фазой и временем прихода. Найдены его характеристики и характеристики известного [1, 2, 9] квадратурного обнаружителя, синтезированного в предположении, что выполняется (2).

## 1. МАКСИМАЛЬНО ПРАВДОПОДОБНЫЙ ОБНАРУЖИТЕЛЬ СВЕРХШИРОКОПОЛОСНОГО КВАЗИРАДИОСИГНАЛА

Рассмотрим задачу обнаружения сигнала (1) на фоне гауссовского белого шума  $n(t)$  с односторонней спектральной плотностью  $N_0$ . Наблюдаемую смесь сигнала (1) и шума  $n(t)$  представим в виде

$$\xi(t) = \gamma_0 s(t - \lambda_0, a_0, \varphi_0) + n(t), \quad t \in [0, T], \quad (4)$$

где  $[0, T]$  — интервал наблюдения,  $\lambda_0$  — время прихода сигнала, которое априори неизвестно. Возможные значения времени прихода  $\lambda$  лежат в интервале  $\Lambda_1 \leq \lambda \leq \Lambda_2$ , причём  $\Lambda_1 > \tau$ ,  $\Lambda_2 + \tau < T$ , где  $\tau$  — длительность сигнала (1). Дискретный параметр  $\gamma_0$  принимает значение  $\gamma_0 = 0$  при отсутствии сигнала в наблюдаемых данных или  $\gamma_0 = 1$  — при наличии сигнала. Тогда задача обнаружения сводится к оценке параметра состояния  $\gamma_0$  на основе наблюдаемых данных (4).

Для синтеза алгоритма обнаружения сигнала (оценки параметра  $\gamma_0$ ) воспользуемся методом максимального правдоподобия [1, 2, 9]. Согласно этому методу, по наблюдаемым данным (4) надо формировать логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОР)  $L(\gamma, \lambda, a, \varphi)$ , зависящий от параметра состояния  $\gamma$  и неизвестных значений  $\lambda, a$  и  $\varphi$ . Соответственно, оценка максимального правдоподобия  $\hat{\gamma}$  параметра  $\gamma_0$  определяется как значение  $\gamma$ , при котором логарифм ФОР достигает абсолютного (наибольшего) максимума. Согласно [1, 2, 9] имеем, что максимально правдоподобный алгоритм обнаружения сигнала (оценки параметра  $\gamma_0$ ) можно представить в виде

$$\hat{\gamma} = \begin{cases} 1, & L > h; \\ 0, & L < h, \end{cases} \quad (5)$$

здесь

$$L = \sup L(\lambda, a, \varphi) = L(\hat{\lambda}, \hat{a}, \hat{\varphi}), \quad (6)$$

$L(\lambda, a, \varphi) = L(\gamma = 1, \lambda, a, \varphi)$ , а  $(\hat{\lambda}, \hat{a}, \hat{\varphi}) = \arg \sup L(\lambda, a, \varphi)$  — оценки максимального правдоподобия неизвестных времени прихода, амплитуды и фазы сигнала (1). Порог  $h$  в (5) выбирается в соответствии с заданным критерием оптимального обнаружения [1, 2, 9].

При помехе в виде гауссовского белого шума логарифм ФОП можно записать как [2]

$$L(\lambda, a, \varphi) = \frac{2}{N_0} \int_0^T \xi(t) s(t - \lambda, a, \varphi) dt - \frac{1}{N_0} \int_0^T s^2(t - \lambda, a, \varphi) dt. \quad (7)$$

Подставим в (7) явный вид сверхширокополосного квазирадиосигнала (1) и преобразуем к виду

$$L(\lambda, a, \varphi) = a [X(\lambda) \cos \varphi + Y(\lambda) \sin \varphi] - Qa^2 [1 + \rho_c \cos(2\varphi) + \rho_s \sin(2\varphi)]/2, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X(\lambda) \\ Y(\lambda) \end{pmatrix} &= \frac{2}{N_0} \int_0^T \xi(t) f(t - \lambda) \begin{pmatrix} \cos[\omega_0(t - \lambda)] \\ \sin[\omega_0(t - \lambda)] \end{pmatrix} dt, \\ Q &= \frac{1}{N_0} \int_0^T f^2(t) dt; \quad \begin{pmatrix} \rho_c \\ \rho_s \end{pmatrix} = \frac{1}{QN_0} \int_0^T f^2(t) \begin{pmatrix} \cos(2\omega_0 t) \\ \sin(2\omega_0 t) \end{pmatrix} dt. \end{aligned} \quad (9)$$

Для получения решающей статистики (6) найдём оценки максимального правдоподобия амплитуды  $\hat{a}$  и фазы  $\hat{\varphi}$  сигнала (1). Решая систему уравнений правдоподобия

$$\left. \frac{\partial L(\lambda, a, \varphi)}{\partial a} \right|_{\hat{a}, \hat{\varphi}} = 0, \quad \left. \frac{\partial L(\lambda, a, \varphi)}{\partial \varphi} \right|_{\hat{a}, \hat{\varphi}} = 0$$

и подставляя найденные оценки в (8), имеем

$$L = \sup L(\lambda) = \sup L(\lambda, a, \varphi), \quad \lambda \in [\Lambda_1, \Lambda_2], \quad (10)$$

$$L(\lambda) = \frac{X^2(\lambda)(1 - \rho_c) + Y^2(\lambda)(1 + \rho_c) - 2X(\lambda)Y(\lambda)\rho_s}{2Q(1 - \rho_c^2 - \rho_s^2)}. \quad (11)$$

Максимально правдоподобный обнаружитель сверхширокополосного квазирадиосигнала (5), (11) можно реализовать, используя многоканальную обработку. Структурная блок-схема одного канала для фиксированного значения времени прихода  $\lambda$  приведена в [7].

Если полоса частот  $\Delta\omega$  сигнала (1) много меньше  $\omega_0$ , т. е. обнаруживается узкополосный радиосигнал и выполняется (2), то  $\{\rho_c, \rho_s\} \ll 1$ . Тогда, положив в (10) и (11)  $\rho_c = \rho_s = 0$ , получим для логарифма ФОП:

$$\hat{\tilde{L}} = \sup \tilde{L}(\lambda); \quad (12)$$

$$\tilde{L}(\lambda) = \frac{X^2(\lambda) + Y^2(\lambda)}{2Q}. \quad (13)$$

Алгоритм обнаружения узкополосного радиосигнала аналогично (5) можно записать в виде

$$\hat{\gamma} = \begin{cases} 1, & \hat{\tilde{L}} > h; \\ 0, & \hat{\tilde{L}} < h. \end{cases} \quad (14)$$

Формула (13), полученная как частный случай (11) в предположении, что выполняется (2), совпадает с известной формулой для логарифма ФОП при обнаружении узкополосного радиосигнала с неизвестными временем прихода, амплитудой и начальной фазой [2, 9]. Максимально правдоподобный обнаружитель узкополосного радиосигнала с неизвестными временем прихода, амплитудой и фазой (13) можно реализовать, используя многоканальную обработку. Структурная блок-схема одного канала приведена в [7]. Как было отмечено в [7], структура максимально правдоподобного обнаружителя сверхширокополосного квазирадиосигнала (5), (11) существенно отличается от структуры классического квадратурного обнаружителя узкополосного радиосигнала (13), (14).

## 2. ХАРАКТЕРИСТИКИ МАКСИМАЛЬНО ПРАВДОПОДОБНОГО ОБНАРУЖИТЕЛЯ

Эффективность обнаружителя обычно характеризуется величинами вероятности ошибок 1-го рода (ложной тревоги)  $\alpha$  и вероятности ошибок 2-го рода (пропуска сигнала)  $\beta$  [1, 2, 9]. Найдём эти вероятности для алгоритма (11) при обнаружении сверхширокополосного квазирадиосигнала.

При отсутствии полезного сигнала логарифм ФОП (11) принимает вид

$$L_0(\lambda) = \frac{N_c^2(\lambda)(1 - \rho_c) + N_s^2(\lambda)(1 + \rho_c) - 2N_c(\lambda)N_s(\lambda)\rho_s}{2Q(1 - \rho_c^2 - \rho_s^2)}, \quad (15)$$

где  $N_c(\lambda) = (2/N_0) \int_0^T n(t)f(t - \lambda) \cos[\omega_0(t - \lambda)] dt$ ,  $N_s(\lambda) = (2/N_0) \int_0^T n(t)f(t - \lambda) \sin[\omega_0(t - \lambda)] dt$ , причём  $N_c(\lambda)$  и  $N_s(\lambda)$  — гауссовские случайные процессы, которые обладают моментами  $\langle N_c(\lambda) \rangle = 0$ ,  $\langle N_s(\lambda) \rangle = 0$ ,  $\langle N_c(\lambda_1)N_c(\lambda_2) \rangle = \tilde{Q}(\Delta\lambda) \cos(\omega_0 \Delta\lambda) + \tilde{Q}_c(\Delta\lambda)$ ,  $\langle N_s(\lambda_1)N_s(\lambda_2) \rangle = \tilde{Q}(\Delta\lambda) \cos(\omega_0 \Delta\lambda) - \tilde{Q}_c(\Delta\lambda)$ ,  $\langle N_c(\lambda_1)N_s(\lambda_2) \rangle = \tilde{Q}(\Delta\lambda) \sin(\omega_0 \Delta\lambda) + \tilde{Q}_s(\Delta\lambda)$ , где  $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ . Здесь введены обозначения

$$\tilde{Q}(\Delta\lambda) = \frac{1}{N_0} \int_0^T f(t)f(t + \Delta\lambda) dt, \quad \tilde{Q}_c(\Delta\lambda) = \frac{1}{N_0} \int_0^T f(t)f(t + \Delta\lambda) \cos(2\omega_0 t + \omega_0 \Delta\lambda) dt,$$

$$\tilde{Q}_s(\Delta\lambda) = \frac{1}{N_0} \int_0^T f(t)f(t + \Delta\lambda) \sin(2\omega_0 t + \omega_0 \Delta\lambda) dt.$$

Таким образом,  $N_c(\lambda)$  и  $N_s(\lambda)$  — стационарные и стационарно связанные гауссовские процессы. Следовательно,  $L_0(\lambda)$  (15) — стационарный процесс. Из анализа корреляционной функции логарифма ФОП  $L_0(\lambda)$  (15) следует, что при конечной длительности обнаруживаемого сигнала

$$\langle [L_0(\lambda_1) - \langle L_0(\lambda_1) \rangle] (L_0(\lambda_2) - \langle L_0(\lambda_2) \rangle) \rangle \rightarrow 0$$

при  $|\Delta\lambda| = |\lambda_1 - \lambda_2| \rightarrow \infty$ . Следовательно, поток выбросов случайной функции  $L_0(\lambda)$  за достаточно высокий уровень  $H$  является асимптотически пуассоновским [9]. В этом случае вероятность ложной тревоги можно найти по приближённой формуле [9]:

$$\alpha \approx 1 - \exp[-\Lambda\Pi(H)], \quad (16)$$

где  $\Lambda = \Lambda_2 - \Lambda_1$ , а  $\Pi(H)$  — среднее число выбросов за уровень  $H$  случайного процесса  $L_0(\lambda)$  на единичном интервале определения неизвестного параметра  $\lambda$ . Формула (16) справедлива при условии, что  $H^2$  велико по сравнению с дисперсией логарифма ФОП (15) и  $\Lambda$  велико по сравнению

с величиной интервала  $\Delta\lambda_s$ , на котором  $\tilde{Q}(\Delta\lambda)$ ,  $\tilde{Q}_c(\Delta\lambda)$ ,  $\tilde{Q}_s(\Delta\lambda)$  отличны от нуля. Среднее число выбросов  $\Pi(H)$  стационарного случайного процесса (15) можно найти по формуле [2]:

$$\Pi(H) = \int_0^\infty yW_2(H, y) dy, \tag{17}$$

где  $W_2(x, y)$  — совместная плотность вероятности значений  $x = L_0(\lambda)$  процесса (15) и его первой производной  $y = dL_0(\lambda)/d\lambda$ . Для нахождения  $W_2(x, y)$  определим характеристическую функцию  $\Psi_2(u, \nu) = \langle \exp[j(ux + \nu y)] \rangle$  случайных величин  $L_0(\lambda)$  и  $L'_0(\lambda)$ . Введём случайный вектор  $\mathbf{N}^+(\lambda) = \|N_c(\lambda)N_s(\lambda)\|$ . Тогда формулу (15) можно записать в виде  $L_0(\lambda) = \mathbf{N}^+(\lambda)\mathbf{B}\mathbf{N}(\lambda)/(2Q)$ , где матрица

$$\mathbf{B} = \frac{1}{1 - \rho_c^2 - \rho_s^2} \begin{vmatrix} 1 - \rho_c & -\rho_s \\ -\rho_s & 1 + \rho_c \end{vmatrix}.$$

С учётом последнего запишем производную логарифма ФОП (15)

$$L'_0(\lambda) = \mathbf{N}'^+(\lambda)\mathbf{B}\mathbf{N}(\lambda)/Q.$$

Соответственно, выражение для характеристической функции примет вид

$$\Psi_2(u, \nu) = \langle \exp[j(u\mathbf{N}^+(\lambda)\mathbf{B}\mathbf{N}(\lambda)/(2Q) + \nu\mathbf{N}'^+(\lambda)\mathbf{B}\mathbf{N}(\lambda)/Q)] \rangle. \tag{18}$$

Чтобы выполнить усреднение в (18), найдём совместную плотность вероятности векторов  $\mathbf{N} = \mathbf{N}(\lambda)$  и  $\mathbf{N}' = \mathbf{N}'(\lambda)$ . Векторы  $\mathbf{N}$  и  $\mathbf{N}'$  — гауссовские случайные векторы, поэтому их совместная плотность вероятности имеет вид

$$W(\mathbf{N}, \mathbf{N}') = \frac{1}{(2\pi)^2 \sqrt{\det \mathbf{A}}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} \mathbf{N}^+ & \mathbf{N}'^+ \end{vmatrix} \mathbf{A}^{-1} \begin{vmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{N}' \end{vmatrix} \right], \tag{19}$$

где  $\mathbf{A}$  — блочная матрица,

$$\mathbf{A} = Q \begin{vmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{A}_{11} = \begin{vmatrix} 1 + \rho_c & \rho_s \\ \rho_s & 1 - \rho_c \end{vmatrix}, \quad \mathbf{A}_{12} = \begin{vmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{A}_{21} = \begin{vmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{22} = \begin{vmatrix} \omega_0^2(1 + \rho_c) + d + d_c & \omega_0^2\rho_s + d_s \\ \omega_0^2\rho_s + d_s & \omega_0^2(1 - \rho_c) + d - d_c \end{vmatrix}.$$

При получении корреляционной матрицы  $\mathbf{A}$  было учтено, что  $\tilde{Q}(\Delta\lambda)$ ,  $\tilde{Q}_c(\Delta\lambda)$ ,  $\tilde{Q}_s(\Delta\lambda)$  — чётные функции своих аргументов, и введены обозначения

$$d = \frac{1}{QN_0} \int_0^T \left[ \frac{df(t)}{dt} \right]^2 dt, \quad d_c = \frac{1}{QN_0} \int_0^T \left[ \frac{df(t)}{dt} \right]^2 \cos(2\omega_0 t) dt,$$

$$d_s = \frac{1}{QN_0} \int_0^T \left[ \frac{df(t)}{dt} \right]^2 \sin(2\omega_0 t) dt.$$

Для вычисления характеристической функции введём в рассмотрение блочный вектор  $\mathbf{\Gamma}^+ = \|\mathbf{N}^+ \ \mathbf{N}'^+\|$  и блочную матрицу

$$\mathbf{Q}_0 = \frac{1}{Q} \begin{vmatrix} j u \mathbf{B} & j \nu \mathbf{B} \\ j \nu \mathbf{B} & 0 \end{vmatrix}.$$

Тогда формулу (18) можно переписать с учётом (19):

$$\Psi_2(u, \nu) = \frac{1}{(2\pi)^2 \sqrt{\det \mathbf{A}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[ \frac{1}{2} \mathbf{\Gamma}^+ \mathbf{Q}_0 \mathbf{\Gamma} - \frac{1}{2} \mathbf{\Gamma}^+ \mathbf{A} \mathbf{\Gamma} \right] d\mathbf{\Gamma}. \quad (20)$$

Интегрирование в выражении (20) приводит к следующему результату [10]:  $\Psi_2(u, \nu) = \{\det(\mathbf{I} - \mathbf{A} \mathbf{Q}_0)\}^{-1/2}$ , где  $\mathbf{I}$  — единичная матрица. Раскрывая определитель, получаем:

$$\Psi_2(u, \nu) = \left\{ \left[ 1 - ju + \nu^2 \left( a - \omega_0^2 \frac{\rho_c^2 + \rho_s^2}{1 - \rho_c^2 - \rho_s^2} \right) \right]^2 - (b^2 + c^2 - g^2) \nu^4 \right\}^{-1/2},$$

где  $a = (d - d_c \rho_c - d_s \rho_s) / (1 - \rho_c^2 - \rho_s^2)$ ,  $b = (d_c - d \rho_c) / (1 - \rho_c^2 - \rho_s^2)$ ,  $c = (d_s - d \rho_s) / (1 - \rho_c^2 - \rho_s^2)$ ,  $g = (d_s \rho_c - d_c \rho_s) / (1 - \rho_c^2 - \rho_s^2)$ . Зная  $\Psi_2(u, \nu)$ , мы можем найти  $W_2(x, y)$  по формуле [2]:

$$W_2(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \Psi_2(u, \nu) \exp[-jux - j\nu y] du d\nu. \quad (21)$$

Из (21) имеем совместную плотность вероятности процесса (15) и его производной:

$$W_2(x, y) = \frac{\exp(-x)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -ax\nu^2 + \omega_0^2 \frac{\rho_c^2 + \rho_s^2}{1 - \rho_c^2 - \rho_s^2} x\nu^2 - j\nu y \right\} I_0 \left\{ x\nu^2 \sqrt{b^2 + c^2 - g^2} \right\} d\nu, \quad (22)$$

где  $I_0(z)$  — функция Бесселя нулевого порядка от мнимого аргумента  $z$ . Подставляя (22) в (17) и выполняя интегрирование, получим выражение для среднего числа выбросов процесса  $L_0(\lambda)$  (15) за уровень  $H$  на интервале единичной длины:

$$\Pi(H) = \frac{\exp(-H)}{\sqrt{\pi}} \sqrt{H \frac{d - d_c \rho_c - d_s \rho_s - \omega_0^2 (\rho_c^2 + \rho_s^2)}{1 - \rho_c^2 - \rho_s^2}} J(p).$$

Здесь введены обозначения:

$$J(p) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \exp(-t^2) I_0(pt^2)}{t^2} dt, \quad (23)$$

где

$$p = \frac{\sqrt{(d - d_c \rho_c)^2 + (d_s - d \rho_s)^2 - (d_s \rho_c - d_c \rho_s)^2}}{d - d_c \rho_c - d_s \rho_s - \omega_0^2 (\rho_c^2 + \rho_s^2)}.$$

Теперь можем записать приближённое значение вероятности ложной тревоги [9]:

$$\alpha_1 \approx \begin{cases} 1 - \exp[-\xi_1 \sqrt{H} \exp(-H) / \sqrt{\pi}], & H \geq 1/2; \\ 1, & H < 1/2, \end{cases} \quad (24)$$

где  $\xi_1 = \lambda d_1$ ,  $d_1 = J(p) \sqrt{[d - d_c \rho_c - d_s \rho_s - \omega_0^2 (\rho_c^2 + \rho_s^2)] / (1 - \rho_c^2 - \rho_s^2)}$ .

Если порог  $H$  достаточно велик, то вероятность ложной тревоги алгоритма (11) в случае обнаружения сверхширокополосного квазирадиосигнала можно найти по приближённой формуле

$$\alpha_1 \approx \xi_1 \sqrt{H} \exp(-H) / \sqrt{\pi}. \quad (25)$$

Логарифм ФОП (11) при наличии сигнала можно представить в виде суммы сигнальной и шумовой функций:  $L(\lambda) = S_L(\Delta\lambda_0) + N_L(\lambda)$ , где  $\Delta\lambda_0 = \lambda - \lambda_0$ . Выражение для сигнальной функции имеет вид  $S_L(\Delta\lambda_0) = \langle L(\lambda) \rangle$ , а для шумовой функции —  $N_L(\lambda) = L(\lambda) - \langle L(\lambda) \rangle$ .

Определим подобласть  $\Lambda_s$  как часть интервала  $\Lambda$ , где сигнальная функция  $S_L(\Delta\lambda_0)$  заметно отличается от нуля. Вне этого интервала сигнальная функция близка к нулю, т. е.  $S_L(\Delta\lambda_0) \approx 0$  при  $|\Delta\lambda_0| > \Lambda_s$ . Тогда вероятность пропуска сигнала при достаточно большом отношении сигнал/шум можно найти по формуле [9]:

$$\beta_1 \approx (1 - \alpha_1) \tilde{\beta}_1, \quad (26)$$

где  $\tilde{\beta}_1$  — вероятность пропуска сигнала с априори известным временем прихода. Если вероятность ложной тревоги достаточно мала, то формулу (26) можно заменить приближённой:

$$\beta_1 \approx \tilde{\beta}_1.$$

Подробный расчёт  $\tilde{\beta}_1$  приведён в [7], поэтому здесь ограничимся лишь конечной формулой. Вероятность пропуска сигнала, время прихода которого априори известно, имеет вид [7]:

$$\tilde{\beta}_1 = \exp(-z_0^2 V/2) \int_0^H \exp(-L) I_0(\sqrt{2Lz_0^2 V}) dL, \quad (27)$$

где  $z_0^2 = Qa_0^2$  — отношение сигнал/шум для узкополосного радиосигнала, а  $V = 1 + \rho_c \cos(2\varphi_0) + \rho_s \sin(2\varphi_0)$ .

Если полоса частот функции  $f(t)$  много меньше  $\omega_0$ , т. е. сигнал является узкополосным, то  $\{\rho_c, \rho_s, d_c, d_s\} \ll 1$ . Тогда, положив в (24) и в (27)  $\rho_c = \rho_s = d_c = d_s = 0$ , получим выражения для вероятностей ложной тревоги и пропуска сигнала при обнаружении узкополосного радиосигнала обнаружителем (13):

$$\alpha_0 \approx \begin{cases} 1 - \exp[-\xi_0 \sqrt{H} \exp(-H)/\sqrt{\pi}], & H \geq 1/2, \\ 1, & H < 1/2, \end{cases}$$

$$\beta_0 = \exp(-z_0^2/2) \int_0^H \exp(-L) I_0(\sqrt{2Lz_0^2}) dL, \quad (28)$$

где  $\xi_0 = \Lambda \sqrt{d}$ .

Если порог  $H$  достаточно велик, то

$$\alpha_0 \approx \xi_0 \sqrt{H} \exp(-H)/\sqrt{\pi}. \quad (29)$$

Формулы (28) и (29), полученные как частный случай (24) и (27) в предположении, что  $\Delta\omega \ll \omega_0$ , совпадают с известными формулами для вероятностей ложной тревоги и пропуска при обнаружении узкополосного радиосигнала с неизвестным временем прихода обнаружителем (13) [9].

### 3. ХАРАКТЕРИСТИКИ КВАДРАТУРНОГО ОБНАРУЖИТЕЛЯ

Максимально правдоподобный обнаружитель сверхширокополосного квазирадиосигнала (11) имеет более сложную структуру, чем квадратурный обнаружитель узкополосного радиосигнала (13). Поэтому может оказаться целесообразным использование более простого квадратурного

обнаружителя для обнаружения сверхширокополосного квазирадиосигнала. Найдём характеристики квадратурного обнаружителя (13), когда обнаруживаемый сигнал (1), возможно, не удовлетворяет условию узкополосности (2). Анализ этих характеристик позволяет, в частности, сформулировать условия применимости модели узкополосного радиосигнала для решения задачи его обнаружения с заданной точностью.

При отсутствии полезного сигнала логарифм ФОП (13) принимает вид

$$\tilde{L}_0(\lambda) = \{N_c^2(\lambda) + N_s^2(\lambda)\} / (2Q). \quad (30)$$

Поскольку  $N_c(\lambda)$  и  $N_s(\lambda)$  — стационарные и стационарно связанные гауссовские процессы, то  $\tilde{L}_0(\lambda)$  — стационарный процесс. Из анализа корреляционной функции логарифма ФОП  $\tilde{L}_0(\lambda)$  следует, что при конечной длительности обнаруживаемого сигнала

$$\langle [\tilde{L}_0(\lambda_1) - \langle \tilde{L}_0(\lambda_1) \rangle] [\tilde{L}_0(\lambda_2) - \langle \tilde{L}_0(\lambda_2) \rangle] \rangle \rightarrow 0$$

при  $|\Delta\lambda| = |\lambda_1 - \lambda_2| \rightarrow \infty$ . Следовательно, поток выбросов случайной функции  $\tilde{L}_0(\lambda)$  за достаточно высокий уровень  $H$  является асимптотически пуассоновским [9]. В этом случае вероятность ложной тревоги можно рассчитать по приближённой формуле (16). Для этого необходимо найти  $\tilde{P}(H)$  — среднее число выбросов за уровень  $H$  случайного процесса  $\tilde{L}_0(\lambda)$  (30) на единичном интервале определения неизвестного параметра  $\lambda$ . Для стационарного случайного процесса значение  $\tilde{P}(H)$  можно найти по формуле (17), где  $W_2(x, y)$  — совместная плотность вероятности значений процесса  $x = \tilde{L}_0(\lambda)$  и его первой производной  $y = d\tilde{L}_0(\lambda)/d\lambda$ . Чтобы найти  $W_2(x, y)$ , определим характеристическую функцию  $\Psi_2(u, \nu) = \langle \exp(jux + j\nu y) \rangle$  случайных величин  $\tilde{L}_0(\lambda)$  и  $\tilde{L}'_0(\lambda)$ . Опять используем случайный вектор  $\mathbf{N}^+(\lambda) = \|N_c(\lambda)N_s(\lambda)\|$ . Тогда формулу (30) можно записать в виде  $\tilde{L}_0(\lambda) = \mathbf{N}^+(\lambda)\mathbf{IN}(\lambda)/(2Q)$ . С учётом последнего можно записать значение производной логарифма ФОП (30) как  $\tilde{L}'_0(\lambda) = \mathbf{N}'^+(\lambda)\mathbf{IN}(\lambda)/Q$ .

Теперь выражение для характеристической функции примет вид

$$\Psi_2(u, \nu) = \langle \exp[j(u\mathbf{N}^+(\lambda)\mathbf{IN}(\lambda)/(2Q) + \nu\mathbf{N}'^+(\lambda)\mathbf{IN}(\lambda)/Q)] \rangle. \quad (31)$$

Чтобы выполнить усреднение в (31), применим формулу (19). Используя предыдущие результаты, получим

$$\Psi_2(u, \nu) = \left\{ \det(\mathbf{I} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{Q}}_0) \right\}^{-1/2},$$

где

$$\tilde{\mathbf{Q}}_0 = \frac{1}{Q} \begin{vmatrix} ju\mathbf{I} & j\nu\mathbf{I} \\ j\nu\mathbf{I} & 0 \end{vmatrix}.$$

Раскрывая определитель и используя формулу (21) для вычисления совместной плотности вероятности процесса (30) и его первой производной, находим

$$W_2(x, y) = \frac{1}{2\pi \sqrt{1 - \rho_c^2 - \rho_s^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-xC(\nu) - j\nu y] I_0[xD(\nu)] d\nu, \quad (32)$$

где введены обозначения:

$$C(\nu) = 1/(1 - \rho_c^2 - \rho_s^2) + \nu^2 d - \omega_0^2 \nu^2 (\rho_c^2 + \rho_s^2)/(1 - \rho_c^2 - \rho_s^2),$$



$$D^2(\nu) = \frac{\rho_c^2 + \rho_s^2}{(1 - \rho_c^2 - \rho_s^2)^2} \left\{ 1 + \omega_0^2 \nu^2 (\rho_c^2 + \rho_s^2) - \nu^2 \frac{(d_c \rho_c + d_s \rho_s)(1 - \rho_c^2 - \rho_s^2)}{\rho_c^2 + \rho_s^2} \right\}^2 +$$

$$+ \nu^4 \frac{(d_c \rho_s - d_s \rho_c)^2}{\rho_c^2 + \rho_s^2} + j 4\nu^3 \omega_0 \frac{d_c \rho_s - d_s \rho_c}{1 - \rho_c^2 - \rho_s^2} - 4\omega_0^2 \nu^2 \frac{\rho_c^2 + \rho_s^2}{(1 - \rho_c^2 - \rho_s^2)^2}.$$

Подставляя (32) в (17) и выполняя интегрирование, получим среднее число выбросов процесса  $\tilde{L}_0(\lambda)$  (30) за уровень  $H$  на интервале единичной длины:

$$\tilde{\Pi}(H) = \frac{\exp[-H/(1 - \rho_c^2 - \rho_s^2)]}{\sqrt{\pi} \sqrt{1 - \rho_c^2 - \rho_s^2}} \sqrt{H [d - \omega_0^2 (\rho_c^2 + \rho_s^2)/(1 - \rho_c^2 - \rho_s^2)]} \tilde{J}(H).$$

Здесь введено обозначение

$$\tilde{J}(H) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ I_0 \left( \frac{H \sqrt{\rho_c^2 + \rho_s^2}}{1 - \rho_c^2 - \rho_s^2} \right) - \exp(-t^2) I_0 \left\{ HD \left[ t / \sqrt{H \left( d - \omega_0^2 \frac{\rho_c^2 + \rho_s^2}{1 - \rho_c^2 - \rho_s^2} \right)} \right] \right\} \right] \frac{dt}{t^2}.$$

Теперь можем записать приближённое выражение для вероятности ложной тревоги [9]:

$$\alpha_2 \approx \begin{cases} 1 - \exp(-\xi_2(H) \sqrt{H} \exp\{-H/[\sqrt{\pi} (1 - \rho_c^2 - \rho_s^2)]\}), & H \geq 1/2, \\ 1, & H < 1/2, \end{cases} \tag{33}$$

где  $\xi_2(H) = \Lambda d_2(H)$ ,  $d_2(H) = \tilde{J}(H) \sqrt{d - \omega_0^2 (\rho_c^2 + \rho_s^2)/(1 - \rho_c^2 - \rho_s^2)} / \sqrt{1 - \rho_c^2 - \rho_s^2}$ . Если порог  $H$  достаточно велик, то вероятность ложной тревоги алгоритма (13) в случае обнаружения сверхширокополосного квазирадиосигнала можно найти по приближённой формуле:

$$\alpha_2 \approx \xi_2(H) \sqrt{H} \exp[-H/(1 - \rho_c^2 - \rho_s^2)] / \sqrt{\pi}. \tag{34}$$

Логарифм ФОП (13) при наличии сигнала можно представить в виде суммы сигнальной и шумовой функций:  $\tilde{L}(\lambda) = \tilde{S}_L(\Delta\lambda_m) + \tilde{N}_L(\lambda)$ , где  $\Delta\lambda_m = \lambda - \lambda_m$ , а  $\lambda_m$  — положение максимума сигнальной функции  $\tilde{S}_L(\lambda)$ , причём будем полагать, что сигнальная функция  $\tilde{S}_L(\lambda)$  имеет лишь один ярко выраженный максимум. Выражение для сигнальной функции имеет вид  $\tilde{S}_L(\Delta\lambda_m) = \langle \tilde{L}(\lambda) \rangle$ , а для шумовой функции:  $\tilde{N}_L(\lambda) = \tilde{L}(\lambda) - \langle \tilde{L}(\lambda) \rangle$ . Определим подобласть  $\Lambda_s$  как часть интервала  $\Lambda$ , где сигнальная функция  $\tilde{S}_L(\Delta\lambda_m)$  заметно отлична от нуля. Вне этого интервала сигнальная функция близка к нулю, т. е.  $\tilde{S}_L(\Delta\lambda_m) \approx 0$  при  $|\Delta\lambda_m| > \Lambda_s$ . Тогда вероятность пропуска сигнала при достаточно большом отношении сигнал/шум можно найти по формуле (26), заменив в ней  $\alpha_1$  на  $\alpha_2$  (33) и  $\tilde{\beta}_1$  на  $\tilde{\beta}_2$ . Здесь  $\tilde{\beta}_2$  — вероятность пропуска сигнала квадратурным обнаружителем (13), когда  $|\lambda - \lambda_m| < \Lambda_s$ . При больших отношениях сигнал/шум  $\tilde{\beta}_2$  совпадает с вероятностью пропуска сигнала, время прихода которого  $\lambda_0$ , но он обнаруживается так, как будто его время прихода равно  $\lambda_m$ . Это значит, что решение принимается в результате сравнения величины  $\tilde{L}(\lambda_m)$  с порогом  $H$  [9]. Если вероятность ложной тревоги  $\alpha_2$  достаточно мала, то формулу (26) можно заменить приближённой формулой:

$$\beta_2 \approx \tilde{\beta}_2.$$

Для расчёта  $\tilde{\beta}_2$  можно воспользоваться плотностью вероятности логарифма ФОП (13), приведённой в [7], заменив математические ожидания квадратур на следующие:

$$m_X = \tilde{\rho} \cos[\omega_0 (\lambda_m - \lambda_0) - \varphi_0] + \tilde{\rho}_c \cos \varphi_0 + \tilde{\rho}_s \sin \varphi_0,$$

$$m_Y = -\tilde{\rho} \sin[\omega_0 (\lambda_m - \lambda_0) - \varphi_0] - \tilde{\rho}_c \sin \varphi_0 + \tilde{\rho}_s \cos \varphi_0,$$

где  $\tilde{\rho} = \tilde{Q} (\lambda_m - \lambda_0)/Q$ ,  $\tilde{\rho}_c = \tilde{Q}_c (\lambda_m - \lambda_0)/Q$ ,  $\tilde{\rho}_s = \tilde{Q}_s (\lambda_m - \lambda_0)/Q$ .

Проводя дальнейшие вычисления аналогично [7], мы можем убедиться, что вероятность пропуска сигнала для обнаружителя (13) имеет вид

$$\beta_2 = \tilde{\beta}_2 = \frac{1}{2\pi \sqrt{1 - \rho_c^2 - \rho_s^2}} \exp \left\{ -\frac{z_0^2 [m_X^2 (1 - \rho_c) + m_Y^2 (1 + \rho_c) - 2\rho_s m_X m_Y]}{2(1 - \rho_c^2 - \rho_s^2)} \right\} \times \\ \times \int_0^H \int_{-\pi}^{\pi} \exp \left\{ \frac{\sqrt{2Lz_0^2} r_1(\theta) - L[1 - \rho_c \cos(2\theta) - \rho_s \sin(2\theta)]}{1 - \rho_c^2 - \rho_s^2} d\theta dL \right\}, \quad (35)$$

$$r_1(\theta) = [m_X(1 - \rho_c) - m_Y \rho_s] \cos \theta + [m_Y(1 - \rho_c) - m_X \rho_s] \sin \theta.$$

Таким образом, если обнаруживаемый сигнал (1) не является узкополосным, то формулы для характеристик квадратурного обнаружителя (34), (35) существенно отличаются от классических формул (28), (29), известных в литературе (см. [1, 2, 9] и др.). Если полоса  $\Delta\omega$  сигнала много меньше  $\omega_0$ , т. е. обнаруживается узкополосный радиосигнал и выполняется (2), то формулы (34), (35) переходят в (28), (29). Действительно, пусть обнаруживаемый сигнал (1) является узкополосным, так что выполняется (2). Полагая в (34), (35)  $\lambda_m = \lambda_0$ ,  $\rho_c = \rho_s = \tilde{\rho}_c = \tilde{\rho}_s = 0$ ,  $d_c = d_s = 0$  и  $\tilde{\rho} = 1$  опять приходим к формулам (28), (29) для характеристик квадратурного обнаружителя (13) при обнаружении узкополосного радиосигнала с неизвестным временем прихода.

#### 4. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИК ОБНАРУЖИТЕЛЕЙ СВЕРХШИРОКОПОЛОСНОГО КВАЗИРАДИОСИГНАЛА

В качестве примера рассмотрим обнаружение сверхширокополосного квазирадиосигнала, который задан формулой

$$s(t - \lambda_0, a_0, \varphi_0) = a_0 \exp[-\pi(t - \lambda_0)^2/(2\tau^2)] \cos[\omega_0(t - \lambda_0) - \varphi_0], \quad 0 \leq t \leq T. \quad (36)$$

Основными параметрами этой модели сигнала, определяющими эффективность обнаружения при фиксированных  $a_0$  и  $\varphi_0$ , являются:

$$z_0^2 = a_0^2 \tau / N_0, \quad \rho_c = \exp(-4\pi\kappa^2), \quad \rho_s = 0, \quad d = \pi/(2\tau^2), \quad d_s = 0, \\ d_c = \pi \exp(-4\pi\kappa^2) (1 - 8\pi\kappa^2)/(2\tau^2).$$

Здесь  $\kappa = \tau\omega_0/(2\pi)$  — число периодов гармонического колебания на временном отрезке, равном длительности сигнала  $\tau$ .

Сравним эффективность оптимального обнаружения узкополосного радиосигнала алгоритмом (13) с эффективностью оптимального обнаружения сверхширокополосного квазирадиосигнала алгоритмом (11). Для этих двух сигналов при неизвестном времени прихода вероятности пропуска практически совпадают с вероятностями пропуска при известном времени прихода, если отношение сигнал/шум велико, а вероятность ложной тревоги достаточно мала. Сравнительный анализ вероятностей пропуска таких сигналов выполнен в [7], поэтому здесь ограничимся сопоставлением вероятностей ложной тревоги.

Из формул (25) и (29) можно сделать вывод, что отношение ложных тревог  $\chi = \alpha_1/\alpha_0$  не зависит от порога  $H$ , а определяется параметрами  $\rho_c$ ,  $\rho_s$ ,  $d$ ,  $d_c$ ,  $d_s$ . Для рассматриваемого сигнала:

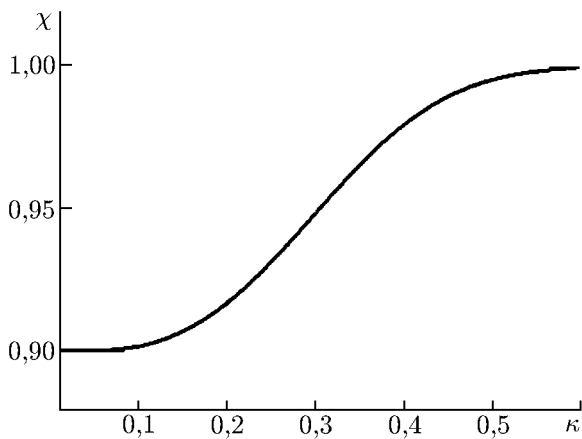


Рис. 2

$\chi = J(p)$  (23), где

$$p = 8\pi\kappa^2 \exp(-4\pi\kappa^2) / [1 - \exp(-9\pi\kappa^2)].$$

На рис. 2 приведена зависимость  $\chi$  от  $\kappa$ . Если  $\chi < 1$ , то при таких  $\kappa$  вероятность ложной тревоги обнаружителя (11) меньше вероятности ложной тревоги обнаружителя (13). Из графика видно, что различие между вероятностями ложной тревоги не превышает 10%, а с ростом  $\kappa$  это отличие быстро уменьшается и при  $\kappa \geq 0,4$  составляет менее 2%.

Сравним эффективность обнаружения сверхширокополосного квазирадиосигнала с помощью обнаружителей (11) и (13). Для этого выберем вероятности ложной тревоги обнаружителя (11)  $\alpha_1$  равными  $10^{-2}$ ,  $10^{-3}$ ,  $10^{-4}$ , затем из (25), полагая, что  $\Lambda = 10\tau$ , найдём пороговые значения  $H_1 = 7,32$ ,  $H_2 = 9,77$ ,  $H_3 = 12,18$ , которые соответствуют этим вероятностям ложной тревоги. Аналогично полагая, что  $\Lambda = 1000\tau$ , найдём пороговые значения  $\tilde{H}_1 = 12,19$ ,  $\tilde{H}_2 = 14,58$ ,  $\tilde{H}_3 = 16,96$ , которые соответствуют тем же вероятностям ложной тревоги.

Подставив полученные пороги в (34), получим вероятности ложной тревоги обнаружителя (13)  $\alpha_2$  при этих порогах, т. е. когда вероятности ложной тревоги для обнаружителя (11) имеют значения  $10^{-2}$ ;  $10^{-3}$ ;  $10^{-4}$ . На рис. 3 и 4 построены зависимости  $\chi_0 = \alpha_2/\alpha_1$  отношения вероятности ложной тревоги обнаружителя (13) к вероятности ложной тревоги обнаружителя (11) от  $\kappa$  для выбранных пороговых значений. Кривые 1, 2, 3 на рис. 3 показывают зависимости  $\chi_0 = \alpha_2/\alpha_1$  от  $\kappa$  для порогов  $H_1, H_2, H_3$  для значений вероятности ложной тревоги  $\alpha_1$ , равных  $10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$  соответственно, при  $\Lambda = 10\tau$ . Кривые 1, 2, 3 на рис. 4 показывают зависимости  $\chi_0$  от  $\kappa$  для порогов  $\tilde{H}_1, \tilde{H}_2, \tilde{H}_3$  при  $\Lambda = 1000\tau$ . Из рис. 3 и 4 видно, что отличие вероятности ложной тревоги обнаружителя (13) от вероятности ложной тревоги обнаружителя (11) более значительно для малых значений вероятностей  $\alpha_1$ , т. е. для больших порогов  $H$ . Также из сравнения рис. 3 и 4 следует, что при равных порогах  $H$  отличие  $\alpha_2$  и  $\alpha_1$  становится более существенным при увеличении длины  $\Lambda$  интервала возможных значений неизвестного времени прихода сигнала. При

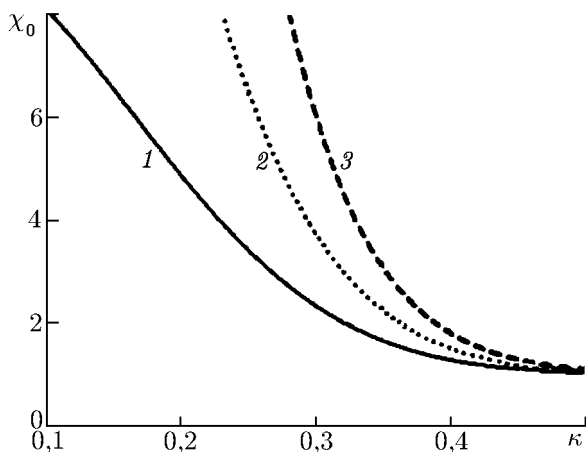


Рис. 3

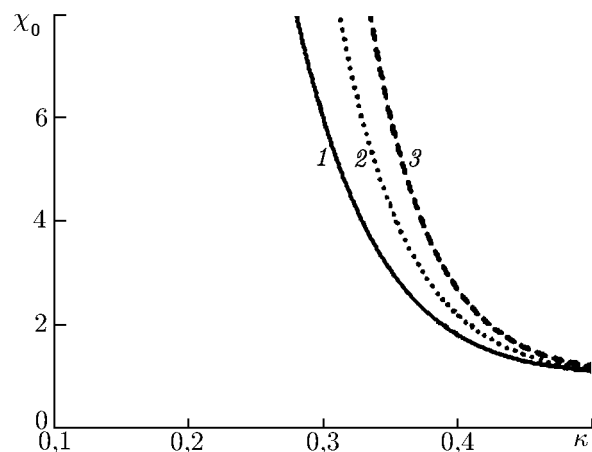


Рис. 4

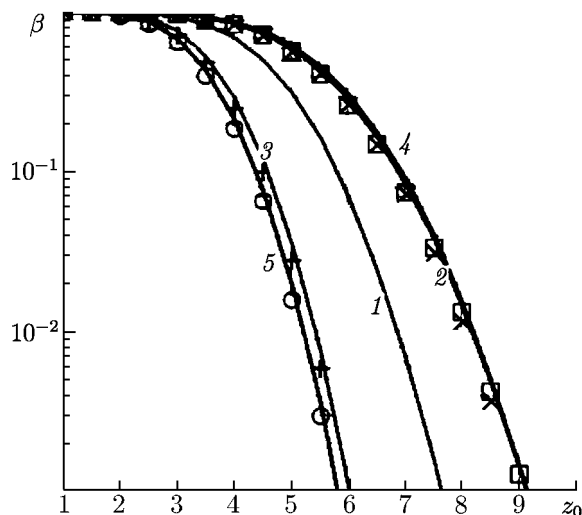


Рис. 5

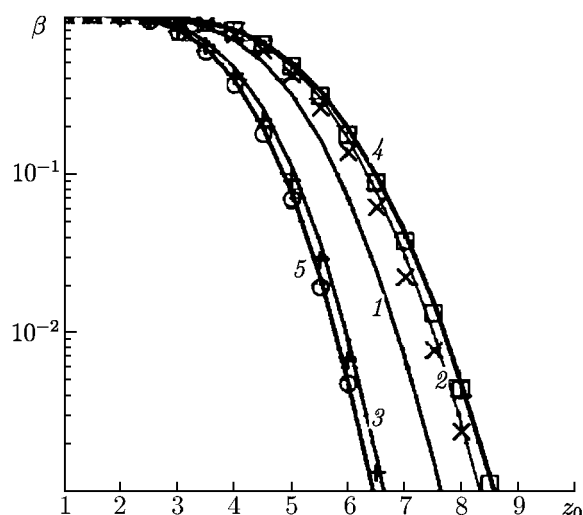


Рис. 6

увеличении  $\kappa$  различие между  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  уменьшается, однако пороговое значение  $\kappa$ , начиная с которого можно было бы пренебречь их отличием, оказывается различным для различных  $H$  и  $\Lambda$ . Для больших  $H$ , что соответствует меньшим вероятностям ложной тревоги, значение порогового  $\kappa$  больше. Аналогично с увеличением интервала  $\Lambda$  значение порогового  $\kappa$  также возрастает. Таким образом, при обнаружении сверхширокополосного квазирадиосигнала и малых значениях  $\kappa$  величина вероятности ложной тревоги квадратурного обнаружителя (13) может быть существенно больше, чем вероятности ложной тревоги обнаружителя (11).

Проведём сравнение вероятностей пропуска сигнала обнаружителей (11) и (13) при приёме сверхширокополосного квазирадиосигнала. Для вычисления вероятностей пропуска  $\beta_1$  и  $\beta_2$  будем использовать такие пороги, при которых вероятности ложных тревог соответствующих обнаружителей (11) и (13) равны  $10^{-3}$ , при условии  $\Lambda = 20\tau$ .

На рис. 5 и 6 кривая 1 соответствует вероятности  $\beta_0$  пропуска узкополосного радиосигнала обнаружителем (13), 2 и 3 — вероятностям  $\beta_1$  пропуска сверхширокополосного квазирадиосигнала обнаружителем (11), 4 и 5 — вероятностям  $\beta_2$  пропуска сверхширокополосного квазирадиосигнала обнаружителем (13). Кривые построены как функции отношения сигнал/шум  $z_0$ . На рис. 5 кривая 2 построена для  $\kappa = 0,2$  и  $\varphi_0 = \pi/3$ , кривая 3 — для  $\kappa = 0,2$  и  $\varphi_0 = 0$ , кривая 4 — для  $\kappa = 0,2$  и  $\varphi_0 = \pi/3$ , кривая 5 — для  $\kappa = 0,2$  и  $\varphi_0 = 0$ . На рис. 6 для кривых 2–5 выбрано  $\kappa = 0,3$ , а значения фазы  $\varphi_0$  аналогичны рис. 5. Из рис. 5 и 6 видно, что вероятности пропуска сигнала  $\beta_1$  и  $\beta_2$  существенно зависят от фазы  $\varphi_0$ . В зависимости от параметра  $\varphi_0$  вероятность пропуска сверхширокополосного квазирадиосигнала обнаружителем (11) может быть больше, чем вероятность пропуска аналогичного сигнала обнаружителем (13) и наоборот. Это объясняется зависимостью энергии сверхширокополосного квазирадиосигнала от параметра  $\varphi_0$ . При увеличении  $\kappa$  кривые  $\beta_1$  и  $\beta_2$  приближаются к  $\beta_0$ , т. к. сигнал (36) становится узкополосным.

## 5. РЕЗУЛЬТАТЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Полученные выше формулы для характеристик обнаружения сверхширокополосного квазирадиосигнала с неизвестными амплитудой, фазой и временем прихода являются лишь асимптотически точными с увеличением  $\Lambda$ ,  $h$  и  $z_0$ . С целью проверки работоспособности синтезированного алгоритма обнаружения сверхширокополосного квазирадиосигнала и определения границ применимости асимптотически точных формул для характеристик обнаружения проводилось ста-

тистическое численное моделирование максимально правдоподобного обнаружителя сверхширокополосного квазирадиосигнала с неизвестными амплитудой, фазой и временем прихода (11) и классического квадратурного обнаружителя (13) аналогичного сигнала. Моделировалось обнаружение сигнала (36).

Для численного моделирования функций (11) и (13) использовались нормированные аргументы  $\eta = \lambda/\tau$  и  $x = t/\tau$ :

$$L_x(\eta) = \frac{(1 - \rho_c) X^2(\eta) + (1 + \rho_c) Y^2(\eta) - 2\rho_s X(\eta)Y(\eta)}{2(1 - \rho_c^2 - \rho_s^2)}, \quad (37)$$

$$\tilde{L}_x(\eta) = \frac{X^2(\eta) + Y^2(\eta)}{2}, \quad (38)$$

где

$$X(\eta) = \gamma_0 S_c(\eta - \eta_0) + N_c(\eta), \quad Y(\eta) = \gamma_0 S_s(\eta - \eta_0) + N_s(\eta), \quad (39)$$

$$S_c(\Delta\eta_0) = z_0 [\hat{\rho}(\Delta\eta_0) \cos(2\pi\kappa \Delta\eta_0 - \varphi_0) + \hat{\rho}_c(\Delta\eta_0) \cos \varphi_0 + \hat{\rho}_s(\Delta\eta_0) \sin \varphi_0],$$

$$S_s(\Delta\eta_0) = -z_0 [\hat{\rho}(\Delta\eta_0) \sin(2\pi\kappa \Delta\eta_0 - \varphi_0) + \hat{\rho}_c(\Delta\eta_0) \sin \varphi_0 - \hat{\rho}_s(\Delta\eta_0) \cos \varphi_0],$$

$$\begin{pmatrix} N_c(\eta) \\ N_s(\eta) \end{pmatrix} = \sqrt{2/\tilde{Q}_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{n}(x) f(x - \eta) \begin{pmatrix} \cos[2\pi\kappa(x - \eta)] \\ \sin[2\pi\kappa(x - \eta)] \end{pmatrix} dx, \quad (40)$$

$$\tilde{n}(x) = n(x\tau) \sqrt{2\tau/N_0}, \quad \tilde{Q}_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) dx, \quad \hat{\rho}(\Delta\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) f(x + \Delta\eta) dx / \tilde{Q}_0,$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\rho}_c(\Delta\eta) \\ \hat{\rho}_s(\Delta\eta) \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) f(x + \Delta\eta) \begin{pmatrix} \cos(4\pi\kappa x + 2\pi\kappa \Delta\eta) \\ \sin(4\pi\kappa x + 2\pi\kappa \Delta\eta) \end{pmatrix} dx / \tilde{Q}_0,$$

$$\Delta\eta_0 = \eta - \eta_0, \quad \gamma_0 = \{1, 0\}.$$

Таким образом, для получения логарифмов ФОП (37) и (38) формировались процессы (40) как функционалы от реализации нормированного белого шума  $\tilde{n}(x)$ . При наличии сигнала ( $\gamma_0 = 1$ ) дополнительно вычислялись значения функций  $S_c(\Delta\eta_0)$  и  $S_s(\Delta\eta_0)$ .

В результате моделирования вырабатывались отсчёты функций (39) с шагом  $\Delta\eta$ . На основе сформированных дискретных последовательностей реализации этих процессов аппроксимировались ступенчатыми функциями. Относительная среднеквадратическая погрешность аппроксимации определялась по формуле [11]:

$$\delta_N = \sqrt{2[1 - R_N(\Delta\eta/2)]}, \quad (41)$$

где  $R_N(x)$  — коэффициент корреляции одного из процессов  $N_c(\eta)$  или  $N_s(\eta)$ :

$$R_{N_c} = \frac{\langle N_c(\eta_1) N_c(\eta_2) \rangle}{\langle N_c^2(\eta) \rangle} = \frac{\hat{\rho}(\eta_1 - \eta_2) \cos[2\pi\kappa(\eta_1 - \eta_2)] + \hat{\rho}_c(\eta_1 - \eta_2)}{1 + \rho_c},$$

$$R_{N_s} = \frac{\langle N_s(\eta_1) N_s(\eta_2) \rangle}{\langle N_s^2(\eta) \rangle} = \frac{\hat{\rho}(\eta_1 - \eta_2) \cos[2\pi\kappa(\eta_1 - \eta_2)] - \hat{\rho}_c(\eta_1 - \eta_2)}{1 + \rho_c},$$

Следует отметить, что бесконечные пределы в интеграле (40) могут быть заменены на конечные, поскольку подынтегральная функция  $f(x)$  существенно отлична от нуля лишь на интервале  $\Delta_f$ .

В данной работе интервал  $\Delta_f$  выбирался таким, чтобы за его пределами значение функции  $f(x)$  всюду было меньше  $10^{-3}$ . Учитывая, что  $f(x)$  — чётная функция, преобразуем (40) к виду

$$\begin{pmatrix} N_c(\eta) \\ N_s(\eta) \end{pmatrix} \approx \sqrt{2/\tilde{Q}_0} \int_{-\Delta_f/2}^{+\Delta_f/2} \tilde{n}(\tilde{x} + \eta) f(\tilde{x}) \begin{pmatrix} \cos[2\pi\kappa(\tilde{x})] \\ \sin[2\pi\kappa(\tilde{x})] \end{pmatrix} d\tilde{x}.$$

Дискретные отсчёты процессов  $N_c(\eta)$  и  $N_s(\eta)$  формировались на основе последовательности независимых гауссовских случайных чисел методом скользящего суммирования [11]:

$$\begin{pmatrix} \tilde{N}_{cj}(\eta) \\ \tilde{N}_{sj}(\eta) \end{pmatrix} \approx \sqrt{2\Delta_f/M\tilde{Q}_0} \sum_{k=0}^{M-1} \alpha_{k+j(r+1)} \begin{pmatrix} C_{ck} \\ C_{sk} \end{pmatrix}, \quad (42)$$

где  $\alpha_k$  — независимые гауссовские числа с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями [11],  $M = \text{int}(\Delta_f/\Delta\eta) + r$ ,  $r$  — целое число,  $j \in \{0, \text{int}[\Lambda/(\Delta\eta\tau)]\}$ ,  $\text{int}(z)$  — целая часть числа  $z$ ,

$$C_{ck} = f[\tilde{x}_k] \cos(2\pi\tilde{x}_k), \quad C_{sk} = f[\tilde{x}_k] \sin(2\pi\tilde{x}_k), \quad \tilde{x}_k = -\Delta_f/2 + \Delta_f(k+1)/M.$$

Число слагаемых  $M$  в (42) корректировалось с помощью параметра  $r$  таким образом, чтобы относительное отклонение дисперсии сформированного отсчёта от дисперсии моделируемого процесса не превышало заданную величину  $\epsilon$ , т. е. согласно [11]

$$\left| 1 - \sigma_c^{-2} \sum_{k=0}^{M-1} C_{ck}^2 \right| < \epsilon_c, \quad \left| 1 - \sigma_s^{-2} \sum_{k=0}^{M-1} C_{sk}^2 \right| < \epsilon_s, \quad (43)$$

где  $\sigma_c^2$  — дисперсия процесса  $N_c(\eta)$ ,  $\sigma_s^2$  — дисперсия процесса  $N_s(\eta)$ .

Для построения ступенчатой аппроксимации процессов  $N_c(\eta)$  и  $N_s(\eta)$  шаг аппроксимации  $\Delta\eta$  выбирался таким, чтобы относительная среднеквадратичная погрешность аппроксимации, вычисленная по формуле (41), не превышала  $10^{-1}$ . Отметим, что при  $\kappa < 1$  величина  $r = 0$  и относительное отклонение дисперсий сформированных отсчетов  $\tilde{N}_{cj}$  и  $\tilde{N}_{sj}$  от дисперсий процессов  $N_c(\eta)$  и  $N_s(\eta)$  было ограничено сверху величиной

$$\epsilon_c < 10^{-2}, \quad \epsilon_s < 10^{-2}.$$

В процессе моделирования с шагом  $\Delta\eta$  вырабатывались отсчёты логарифмов ФОП (37) и (38), затем, отдельно для каждого логарифма ФОП, простым перебором значений определялся наибольший отсчёт, который сравнивался с порогом. Если при  $\gamma_0 = 0$  порог превышался, то фиксировалась ошибка ложной тревоги. Если при  $\gamma_0 = 1$  наибольшее значение логарифма ФОП не превышало порога, то фиксировалась ошибка пропуска сигнала. В качестве оценок вероятностей ложной тревоги и пропуска сигнала использовалась относительная частота появления соответствующих ошибок.

Моделирование выполнялось для значения длины априорного интервала возможных значений неизвестного времени прихода сверхширокополосного квазирадиосигнала  $\Lambda = 20\tau$ . При наличии полезного сигнала истинное значение времени прихода выбиралось в середине априорного интервала. С целью экономии машинного времени использовался метод зависимых испытаний. В каждом цикле статистических испытаний формировались отсчёты логарифма ФОП (37) и (38) для различных значений  $z_0$ . Число циклов испытаний  $N$  было выбрано равным  $10^5$ .

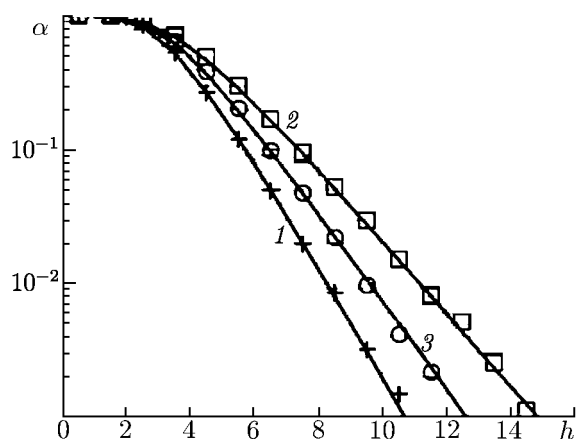


Рис. 7

няются от экспериментальных значений вероятностей ложной тревоги и пропуска сигнала не более, чем на 5% при  $\{\alpha, \beta\} > 0,01$  и не более, чем на 10% при  $\{\alpha, \beta\} > 2,8 \cdot 10^{-3}$ .

Результаты моделирования приведены на рис. 5–7. На рис. 5 и 6 прямыми и наклонными крестиками нанесены экспериментальные значения вероятности пропуска сверхширокополосного квазирадиосигнала обнаружителем (11). Кружочками и квадратиками на этих рисунках нанесены экспериментальные значения вероятности пропуска сверхширокополосного квазирадиосигнала обнаружителем (13). Сопоставляя экспериментальные значения со сплошными кривыми, следует отметить удовлетворительное согласие результатов расчёта по асимптотически точным формулам с экспериментальными данными.

На рис. 7 кривая 1 соответствует вероятности ложной тревоги обнаружителя (11) при обнаружении сверхширокополосного квазирадиосигнала, кривые 2, 3 — вероятности ложной тревоги обнаружителя (13) при обнаружении сверхширокополосного квазирадиосигнала. Кривые построены как функции порога  $h$  при значении длины априорного интервала возможных значений неизвестного времени прихода сверхширокополосного квазирадиосигнала  $\Lambda = 20\tau$ . Кривые 1 и 2 построены для  $\kappa = 0,2$ , кривая 3 — для  $\kappa = 0,3$ . Следует отметить, что вероятность ложной тревоги обнаружителя (11) слабо зависит от значения  $\kappa$ . Крестиками на рис. 7 обозначены экспериментальные значения вероятности ложной тревоги обнаружителя (11) при  $\kappa = 0,2$ . Квадратиками и кружочками — экспериментальные значения вероятности ложной тревоги обнаружителя (13) при  $\kappa = 0,2$  и  $\kappa = 0,3$  соответственно. Сопоставляя экспериментальные значения со сплошными кривыми, мы можем отметить удовлетворительное согласие результатов расчёта по асимптотически точным формулам с экспериментальными данными.

### 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показано, что невыполнение условия относительной узкополосности сигнала приводит к существенному отличию структуры и характеристик максимально правдоподобного обнаружителя сверхширокополосного квазирадиосигнала от структуры и характеристик классического квадратурного обнаружителя узкополосного радиосигнала. В частности, применение классического квадратурного обнаружителя узкополосного радиосигнала для обнаружения сверхширокополосного квазирадиосигнала может привести к заметному увеличению вероятности ложной тревоги.

Определим точность полученных экспериментальных значений вероятностей ложной тревоги и пропуска сигнала. При достаточно большом числе испытаний  $N$  доверительная вероятность приблизительно определяется выражением [11]:

$$P_d \approx 2\Phi \left[ \delta_p \sqrt{\frac{pN}{1-p}} \right] - 1,$$

где  $p$  — оценка одной из вероятностей ошибок,  $\delta_p$  — относительный доверительный интервал. При  $N = 10^5$  получаем, что с вероятностью  $P_d = 0,9$  границы доверительных интервалов отклоняются от экспериментальных значений вероятностей ложной тревоги и пропуска сигнала не более, чем на 5% при  $\{\alpha, \beta\} > 0,01$  и не более, чем на 10% при  $\{\alpha, \beta\} > 2,8 \cdot 10^{-3}$ .

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Ахманов С. А., Дьяков Ю. Б., Чиркин А. С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. М.: Наука, 1981.
2. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. М.: Сов. радио, 1966.
3. Ванжа А. В., Силаев А. М. // Изв. вузов. Радиофизика. 1995. Т. 38, № 12. С. 1257.
4. Астанин Л. Ю., Костылев А. А. Основы сверхширокополосных радиолокационных измерений. М.: Радио и связь, 1989.
5. Taylor J. D. Introduction to Ultrawideband Radar Systems. New York: CRC press, 1995.
6. Кольцов Ю. В. Методы и средства анализа и формирования сверхширокополосных сигналов. М.: Радиотехника, 2004.
7. Трифонов А. П., Руднев П. Е. // Изв. вузов. Радиофизика. 2009. Т. 52, № 9. С. 749.
8. Радзиевский В. Г., Трифонов П. А. Обработка сверхширокополосных сигналов и помех. М.: Радиотехника, 2009.
9. Теория обнаружения сигналов / Под ред. П. А. Бакута. М.: Радио и связь, 1984.
10. Беллман Р. Введение в теорию матриц; Пер. с англ. М.: Наука, 1969.
11. Быков В. В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. М.: Сов. радио, 1971.

Поступила в редакцию 28 марта 2011 г.; принята в печать 23 июня 2011 г.

**DETECTION OF ULTRAWIDEBAND QUASI-RADIO SIGNALS WITH UNKNOWN ARRIVAL TIME AGAINST A BACKGROUND OF WHITE NOISE**

*A. P. Trifonov and P. E. Rudnev*

We have synthesized and analyzed a maximum-likely detector of ultrawideband quasi-radio signal whose duration can be several periods or even a part of a period of harmonic oscillation with unknown amplitude, phase, and arrival time. Characteristics of the classic quadrature detector during reception of an ultrawideband quasi-radio signal have been obtained. The results of statistical simulation of detection algorithms are presented.